

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots$$

Stephan Sigler (Hrsg.)

Mathematikthemen für die 9. Klasse

Ausgearbeitet nach der Unterrichtspraxis an Waldorfschulen

edition waldorf

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots$$



Mat h e m a t i k t h e m e n

für die 9. Klasse
ausgearbeitet nach der Unterrichtspraxis
an Waldorfschulen

Kegelschnitte
Planimetrie
Ortskurven
Arithmetik und Geometrie
Arithmetik und Algebra
Die Neuner- und die Elferprobe
Gleichungslehre
Kombinatorik
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Peter Baum, Arnold Bernhard, Sigurd Bindel, Karl-Fr. Georg,
Uwe Hansen, Friedrich Hartmann, Markus Hünig,
Klaus Labudde, Rolf Rosbigalle

Herausgegeben von Stephan Sigler für die Lehrplaninitiative der
Pädagogischen Forschungsstelle Kassel, 2010

edition waldorf

Impressum

Herausgegeben am Standort Kassel, einer Abteilung der
Pädagogische Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen
Wagenburgstraße 6 · 70184 Stuttgart

Sie finden uns im Internet unter
www.forschung-waldorf.de · www.waldorfbuch.de

© edition waldorf
Stuttgart, 4. Auflage 2022,
unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 2010
ISBN 978-3-940606-62-4

Satz: Peter Schwab, Hofgeismar-Hombressen
Herstellung: BoD – Books on Demand, Norderstedt

Alle Rechte vorbehalten.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen
bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung der Pädagogischen
Forschungsstelle Stuttgart.

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Vorwort zur Auflage von 1999	3
Zur Methodik des Mathematikunterrichts in den Oberstufenklassen UWE HANSEN	5
Zur Behandlung der Kegelschnitte in der 9. Klasse UWE HANSEN	13
Die Kegelschnitte als Symmetralen und ihre Fadenkonstruktionen MARKUS HÜNIG	17
Planimetrie als ein Einstieg in die Mathematik der Oberstufe ROLF ROSBIGALLE	27
Eine Anmerkung zum geometrischen Ort UWE HANSEN	93
Geometrische Ortskurven SIGURD BINDEL UND KLAUS LABUDDE	97
Die Irrationalität in Arithmetik und Geometrie PETER BAUM	117
Zur Arithmetik und Algebra der 9. Klasse F. J. HARTMANN	145
Die Division durch 9 und die Neunerprobe ARNOLD BERNHARD	159
Die Division durch 11 und die Elferprobe ARNOLD BERNHARD	173

Die Gleichungslehre in der 9. und 10. Klasse	181
KLAUS LABUDDE	
Eine Anregung zur Einführung von Gleichungssystemen	203
UWE HANSEN	
Kombinatorik-Epoche 9. Klasse	207
KARL-FRIEDRICH GEORG	
Ein Beitrag zur Kombinatorikepoche in der 9. Klasse	231
K. LABUDDE	
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik	251
UWE HANSEN	
Literaturverzeichnis	259

Vorwort

Die neunte Klasse an Waldorfschulen stellt Schüler wie Lehrer vor neue Herausforderungen: Die Schüler werden aus der Klassenlehrerzeit entlassen, erleben das häufig gesund befreiend und blicken erwartungsvoll zwischen Optimismus und Bangigkeit schwankend auf ihre Oberstufenzeit. Die Oberstufenlehrer, die eine neunte Klasse unterrichten sollen, stehen in der Verpflichtung, diesen Erwartungen standzuhalten und sie nicht zu enttäuschen. Dazu gehört Mut, Einfallsreichtum und Humor - aber auch die nötige Strenge und Führung. Nicht selten sehen auch noch erfahrene Kolleginnen und Kollegen ihrer Aufgabe, eine neunte Klasse zu unterrichten, mit Respekt entgegen. Gerade im Fach Mathematik, in dem nun in den Augen der Schüler die „richtige Mathematik“ beginnen soll, die von einem „Fachmann“ gegeben wird, kann das Verhältnis des Schülers zu diesem Fach nachhaltig geprägt werden. Hier liegt eine große Chance, die mit einer ebenso großen Gefahr verbunden ist.

Insofern scheint es berechtigt zu sein, das längst vergriffene Buch zum Mathematikunterricht der neunten Klasse leicht überarbeitet und in neuem Gewand wieder aufzulegen, um den Herausforderungen, den der pädagogische Alltag stellt, begegnen zu können. Die Kolleginnen und Kollegen der Lehrplangruppe Mathematik, die sich nach wie vor im Rahmen der Forschungsstelle Kassel in leicht veränderter Zusammensetzung etwa vier Mal im Jahr treffen, haben die Beiträge des alten Buches kritisch durchgesehen und auf ihre Qualität und Aktualität geprüft. Die einhellige Auffassung war, das Buch wieder erscheinen zu lassen, zumal auch keine weiteren Publikationen zu den Themen der Mathematik der neunten Klasse an Waldorfschulen veröffentlicht wurden. Auch die Beiträge des im November 2007 verstorbenen ARNOLD BERNHARDS zur Neuner- und Elferprobe, die auch für die 8. Klasse geeignet erscheinen, sind wiederum abgedruckt, weil sie in exemplarischer Weise zeigen, wie man methodisch sorgfältig in das Gefüge der Zahlen eindringen kann und wie sich dadurch tieferliegende Einsichten ergeben.

Es ist mittelfristig geplant, einen weiteren Band zu dieser Klassenstufe herauszugeben, um Themen, die hier nur unzureichend kurz oder gar nicht behandelt werden, darzustellen. Dies auch vor dem Hintergrund, dass immer weniger der neu an Waldorfschulen anfangenden Kol-

beginnen und Kollegen eine waldorfpädagogische Zusatzausbildung absolviert haben und somit dringend auf Literatur und Vorschläge zum konkreten Unterricht angewiesen sind. Insofern sei auch auf die weiteren Bände zur zehnten und elften Klasse hingewiesen, die ebenfalls von der Lehrplangruppe herausgegeben wurden. Weiterhin ist für 2010 und 2011 geplant, zur zwölften Klasse zwei Bände zu publizieren, die durch ein ausführlich kommentiertes Epochenheft zum Einstieg in die Differenzialrechnung ergänzt werden sollen.

Am Ende sei besonders Herrn Peter Schwab gedankt, der in mühevoller Arbeit die Korrekturen eingearbeitet, den Satz erstellt und die Zeichnungen nochmals bearbeitet hat.

Kassel, Februar 2010

Stephan Sigler

Vorwort zur Auflage von 1999

Die vorliegende Sammlung enthält 15 Beiträge zum Mathematikunterricht in der 9. Klasse an Waldorfschulen. Fünf von Ihnen waren in der Vorausauflage dieses Heftes enthalten und erscheinen hier in einer überarbeiteten Fassung. Alle Beiträge stammen aus der Praxis. Die Autoren sind Mathematiklehrer an Waldorfschulen und treffen sich etwa viermal im Jahr zu einem Gespräch über Fragen des Lehrplans. Dort wurden auch diese Beiträge diskutiert. Sie sind aber nicht apodiktisch gemeint sondern sollen im Gegenteil den ausübenden Lehrer anregen, eigene Wege im Gelände der Mathematik zu erkunden. Für den anfangenden Mathematiklehrer können sie eine Hilfe sein, den Unterricht inhaltlich und methodisch vorzubereiten. Sie ersetzen jedoch nicht eine fachliche Einführung in Gebiete der Mathematik.

Die Methodenvielfalt schlägt sich in mehreren Beiträgen zum gleichen Thema nieder. Manchmal ergaben sich in den Gesprächen über die Lehrplaninhalte auch kontroverse Sichtweisen, so z. B. zur Bedeutung der Kombinatorik als Unterrichtsgegenstand. Wir bringen sie in einem Nachwort zum Ausdruck. Es versteht sich von selbst, dass die Beiträge von den Autoren verantwortet werden und nicht die Initiative der Gruppe darstellen, auch wenn sie von letzterer einmütig akzeptiert wurden.

Der Mathematikunterricht an Waldorfschulen hat, wie auch jedes andere Fach, vorwiegend zwei Aspekte, die in den verschiedenen Altersstufen verschiedenes Gewicht haben: zum einen soll er den Schülern das Handwerkszeug liefern, um nach der Schulzeit im äußeren Leben bestehen zu können; zum anderen dient er der geistig-seelischen und leiblichen Entwicklung der Kinder. So werden z. B. Algorithmen zum Wurzelziehen nicht als Hilfsmittel zur Berechnung von Wurzeln trainiert – schließlich gibt es den Taschenrechner – sondern als Denkübung verstanden. Der Schüler soll erleben, dass er einen mathematischen Prozess verstehen und durchführen kann.

An so etwas möge der Leser denken, wenn er über Sinn und Zweck mancher der angeführten Details nachsinnt.

Im Übrigen sind die Autoren für jede Kritik dankbar.

Die Durchsicht der Manuskripte zu einer druckreifen Ausgabe besorgte in mühevoller Kleinarbeit Peter Schwab, der auch die Zeichnungen fer-

tigte und manche Fehler beseitigte, die sich eingeschlichen hatten. Ihm sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Kassel, den 08.03.1999

Im Namen der Autoren:

Peter Baum und Manfred v. Mackensen

Zur Methodik des Mathematikunterrichts in den Oberstufenklassen

UWE HANSEN

Richtungweisend für die Auswahl und für die Behandlung des Stoffes in der 9. Klasse – und weitgehend auch für die kommenden Klassen – kann die folgende Ausführung über die Bedeutung des Denkens sein, die Rudolf Steiner im 1. Teil (vom Wesen des Menschen) seiner „Theosophie“ (GA 9) gab:

"Durch das Denken wird der Mensch über das Eigenleben hinausgeführt. Er erwirbt sich etwas, das über seine Seele hinausreicht. Es ist für ihn eine selbstverständliche Überzeugung, dass die Denkgesetze in Übereinstimmung mit der Weltenordnung sind. Er betrachtet sich deshalb als ein Einheimischer in der Welt, weil diese Übereinstimmung besteht. Diese Übereinstimmung ist eine der gewichtigen Tatsachen, durch die der Mensch seine eigene Wesenheit kennen lernt. In seiner Seele sucht der Mensch nach Wahrheit, und durch diese Wahrheit spricht sich nicht allein die Seele, sondern sprechen sich die Dinge der Welt aus. Was durch das Denken als Wahrheit erkannt wird hat eine selbständige Bedeutung, die sich auf die Dinge der Welt bezieht, nicht bloß auf die eigene Seele."

Der gesamte Unterricht sollte von dieser Stimmung geprägt sein: meine Gedanken sind nicht in der Weise auf mich bezogen wie meine Gefühle, meine Empfindungen. Durch das Bilden von Gedanken, durch das freie Anerkennen der Gesetze des Denkens löse ich mich von den engen Fesseln des Eigenlebens und finde damit wieder neu eine Gemeinschaft, die mir durch meine eigene Entwicklung in den letzten Jahren verloren gegangen ist. Das Durchgehen durch die Pubertät ist ja durchaus wie ein Fallen aus dem Paradies der Geborgenheit, des Gehaltenseins in die Isolation, in die Schutzlosigkeit, die Verletzbarkeit und in die Einsamkeit der eigenen Seele.

Diese sehr schmerzlichen Erlebnisse lassen die Sehnsucht nach innerem Halt, nach innerer Festigkeit und nach neuer Gemeinschaft entstehen. Diese Sehnsucht wird befriedigt, wenn der Heranwachsende die Welt mit

eigenen Gedanken durchdringen kann, wenn er die schöpferische Kraft seines eigenen Denkens erlebt, wenn er erlebt, wie er durch diese neue Fähigkeit Wahrheiten finden kann, die für die ganze Welt und auch für andere Menschen von Bedeutung sind.

In diesem Lebensalter (14–15 Jahre) muss dem Schüler das Gefühl vermittelt werden, dass er selbst es ist, der die Gesetze gefunden hat, dass er von innen heraus durch die Kraft seines schöpferischen Denkens die Wahrheit erkannt hat. Den ganzen Unterricht muss diese Entdeckerfreude durchziehen; man muss mit Freude sich ins Abenteuer des Denkens hineinstürzen.

Es muss die ganz neue Qualität des Denkens erlebt werden: es ist nicht notwendig alle Handlungen wirklich auszuführen, um zu einem Ergebnis zu kommen; es genügt, sie im Denken vorzustellen. Die Anzahl der Sitzordnungen einer Klasse z.B. wird nicht durch Ausprobieren, sondern durch Nachdenken ermittelt. Gedanken der Kombinatorik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung befriedigen daher den Schüler dieses Alters.

Durch das Denken wird auch die innere Anschauung geschult: schneidet man einen Zylinder weder senkrecht noch parallel zur Achse mit einer Ebene, so entsteht als Schnittlinie eine Ellipse. Diese Tatsache lässt vermuten, dass die Ellipse nicht mehr entstehen kann, wenn der Zylinder zu einem Kegel verformt wird. Durch eine Folge von Gedanken wird gezeigt, dass diese Vermutung falsch ist, so dass das Denken die innere Anschauung korrigiert und verfeinert.

Im Erarbeiten von geometrischen Örtern wird die Beobachtung und Beweglichkeit eigener Gedanken geübt. Es ist ein Abwenden von der konkreten Einzelsituation und ein Hinwenden zum übergeordneten Gesetz; wie ja alles Mathematische gekennzeichnet ist durch dieses Einbetten eines Einzelfalls in einen größeren Zusammenhang und damit ein Lösen von dem unmittelbar Gegebenem. Diese Tätigkeit ist eine metamorphosierte Aufrichtetätigkeit. Dies gilt allgemeiner: Alles Mathematische hat seinen Ursprung in Bewegungsvorgängen, in Vorgängen, in denen der Mensch aktiv den Raum ergreift. Dieses innere Aufrichten und Lösen vom unmittelbar Gegebenen lässt die folgenden Ausführungen Rudolf Steiners verstehen, die er in dem Aufsatz „Mathematik und Okkultismus“ (GA 35) entwickelt:

"Wenn ich mathematisch denke, denke ich über das Sinnliche, aber ich denke zugleich nicht *im* Sinnlichen. ... Das ist das Wesentliche der mathematischen Anschauung, dass mich ein einzelnes sinnliches Gebilde über sich selbst hinausführt, dass es mir nur Gleichnis sein kann für eine umfassende geistige Tatsache. An dem mathematischen Gebilde kann ich auf sinnliche Art übersinnliche Tatsachen kennenlernen."

Die Erfahrung zeigt also, dass mathematische Begriffe an der Grenze zwischen der sinnlichen und einer rein geistigen Welt liegen. Diese Berührung mit dem Übersinnlichen bewirkt, dass der junge Mensch in der mathematischen Betätigung eintaucht in einen Bereich größter Harmonie, absoluter Reinheit, Schönheit und Klarheit.

Dieses Eintauchen wirkt reinigend auf das noch wenig durchgeformte, ja oft chaotische Seelische des jungen Menschen. Diese heilende Wirkung des Mathematischen, diese Befreiung vom persönlichen Gestimmtsein, die eine tiefe Sehnsucht des heranwachsenden Jugendlichen ist, wird in schöner Weise von R. Steiner in einem Vortrag angesprochen:

"Nehmen wir einmal an, wir haben den Gedanken eines Dreiecks. Wir müssen uns ihm hingeben, ohne dass dieser Herr Gedanke sich darum kümmert, ob ich gerade Kopfschmerzen oder Magenschmerzen habe. Es ist ihm ordentlich gleichgültig, wie ich persönlich gestimmt bin. Es ist ihm sogar gleichgültig, ob ich irgendwie anders gestimmt bin, traurig oder heiter bin, ob mir etwas weh tut oder wohl tut – der Gedanke des Dreiecks herrscht mit einer gewissen vornehmen Nonchalance in meinem Kopfbewusstsein und kümmert sich nicht um mein subjektives Befinden.“ (GA 212, vierter Vortrag)

Steiner hat wiederholt davon gesprochen, dass das mathematische Tun ein inneres Konstruieren und ein gleichzeitiges Anschauen der eigenen Tätigkeit ist. (GA 324, 3. Vortrag) Die mathematischen Begriffe sind aus der Willensnatur des Menschen hervorgegangen. Diese Willensfähigkeit wird dann zum Vorstellungsbild aufgeheilt, so dass die mathematischen Begriffe dann Bildcharakter bekommen. Dieses Ineinandergreifen und sich gegenseitig Befruchten von willentlicher und vorstellender Tätigkeit ist notwendig für alles mathematische Tun. Ist die Willensseite zu schwach, erstarrt diese Tätigkeit zum Formalismus; ist die Vorstellungsseite zu schwach, so fehlt die notwendige Klarheit.

Auch die Forderung Steiners, die Zahlen und die Rechenarten stärker aus der Division herauszuarbeiten, also die Addition nicht in den Vordergrund zu stellen, zeigt die Betonung der Willensseite. Die einseitige Beanspruchung der Vorstellungsseite soll vermieden werden. Wie ja überhaupt oft auf eine falsche Anschaulichkeit hingewiesen wird:

"Wenn der Mensch nur durch einen Anschauungsunterricht durchgeht, dann wird er seelisch völlig ausgedörnt, dann ersterben nach und nach die inneren Triebkräfte der Seele.“ (GA 296, vierter Vortrag) Diesem stellt Steiner das Folgende gegenüber:

"Wir müssen uns der bildenden Kraft unserer Seele bewusst bleiben und müssen in dem Kinde auch nicht die Vorstellung erwecken, dass es bevor es *innerlich* das Dreieck erkannt hat, das Wesentliche vom Dreieck

in der äußeren Welt begreifen kann.“ (GA 301 13. Vortrag) Steiner weist dann darauf hin, dass man charakterisieren soll und nicht definieren, dass man "nicht tote, sondern lebendige Begriffe, lebendige Empfindungen dem Kinde übermitteln soll. Und so soll man auch versuchen, Geometrie zum Beispiel so lebendig als möglich zu gestalten. ... Das Geometrische wird von demjenigen, der selbst gewisse Erfahrungen mit der Geometrie gemacht hat, wirklich so empfunden werden können, dass es allmählich aus dem Ruhenden ins Lebendige hereingeholt werden sollte. ... So ist es gut, in dem Kinde die Vorstellung des Dreiecks hervorzurufen, das eigentlich in innerer Beweglichkeit ist, so dass man gar nicht die Vorstellung bekommt eines ruhenden Dreiecks, sondern die Vorstellung eines bewegten Dreiecks ...“

Auch im Bereich des Zahlenmäßigen gilt es, diese innere Lebendigkeit zu erzielen, bei der Einführung der negativen Zahlen, der Potenzen, der Logarithmen, usw.

Diese Hinweise gelten für alle Gebiete. Schwache Schüler haben z.B. Schwierigkeiten, eine Gleichung aufzustellen. Sie verstehen nicht, woher die zwei Seiten kommen sollen, da man doch nur eine Sache betrachtet. Diese Erfahrung zeigt, dass es diesen Schülern nicht gelingt, ihre eigene Willensbetätigung ins Bild zu bringen. Eigene Erlebnisse und Gleichung fallen auseinander.

Dies sei an einem sehr einfachen Beispiel erläutert: Welche Zahl ergibt – nach dem ihr Dreifaches um 5 vermehrt und die Summe dann halbiert wurde – die Zahl 13?

Um den Schüler in den Prozess mit einzubeziehen, kann man die einzelnen Schritte zunächst nacheinander aufschreiben:

die gesuchte Zahl	x
ihr Dreifaches	$3x$
das um 5 vermehrte Dreifache	$3x + 5$
davon die Hälfte	$\frac{3x + 5}{2}$

Es ist sinnvoll, den Auflösevorgang zunächst ohne Gleichungen, also begrifflich durchzuführen: Wenn $\frac{3x+5}{2}$ gleich 13 ist, so muss $3x + 5$ das Doppelte von 13 also 26 sein. Die Vergrößerung um 5 wird rückgängig gemacht, also ist $3x$ gleich 21. Die gesuchte Zahl muss also 7 sein.

Man sieht, dass der Schüler in der Lage sein muss, eine Folge von verschiedenen Handlungen in der Vorstellung umzukehren. Er muss also seine Handlungen beobachten können, um sie rückgängig zu machen. Beide Seiten einer Gleichung mit 2 zu multiplizieren, bzw. beide Seiten um 5 zu vermindern usw., ist dem Schüler ein zunächst ganz fremder Gedanke.

Im unmittelbaren Erleben verdoppelt man nicht zwei Dinge, sondern nur eines. Man denkt über dasselbe zu verschiedenen Zeiten unterschiedlich und bezeichnet dasjenige daher auch unterschiedlich. Zusammengefasst könnte man den ganzen Prozess wie folgt aufschreiben:

$$\begin{array}{ccc}
 x & & x = 7 \\
 3x & & 3x = 21 \\
 3x + 5 & & 3x + 5 = 26 \\
 \frac{3x + 5}{2} & \xrightarrow{\quad} & \frac{3x + 5}{2} = 13
 \end{array}$$

Damit wird die Symmetrie von Aufstellen der Gleichung und Lösen der Gleichung betont.

Es genügt, diese umfangreiche Darstellung an wenigen Beispielen zu erläutern. Die Schüler haben dann ihre Freude, wenn sie die Aufgaben auch in der üblichen Form lösen können. Dieses Beispiel sollte zeigen, wie man die zugrunde liegenden Tätigkeiten stärker ins Bewusstsein bringt, wenn man das zeitliche Element mehr betont und die Bilder nicht an den Anfang stellt.

Die Angaben von Steiner für die Unterstufe lassen sich auf die Themen der Oberstufe übertragen. So kann man den Hinweis, vom Ganzen in die Teile zu gehen, auch in der Stereometrie der 9. Klasse anwenden:

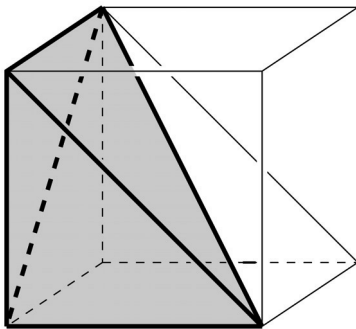
Wie kann man einen Würfel durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper mit gleichem Volumen zerlegen?

Man kann die Ebene parallel zu zwei Seitenflächen durch den Mittelpunkt führen oder als Diagonalebene durch zwei gegenüberliegende Kanten oder so, dass sie eine Würfel diagonale im Mittelpunkt senkrecht schneidet. Man wird erkennen: jede Ebene, die durch den Würfelmittelpunkt geht, erzeugt zwei kongruente Teilkörper. Im allgemeinen sind sie spiegelsymmetrisch. Die Schnittfläche kann ein Quadrat, ein Rechteck, ein Rhombus, ein Parallelogramm oder ein Sechseck sein, das auch regelmäßig sein kann. Die Seitenanzahl kann nicht größer als 6 sein, da es 6 Würfel Flächen gibt. Wegen der Symmetrie des Würfels muss außerdem die Eckenanzahl gerade sein.

Nimmt man eine zweite Ebene hinzu, kann man erreichen, dass die beiden kongruenten Teilkörper wieder halbiert werden. Es entstehen dann vier Körper mit gleichem Volumen. Kann man den Würfel auch in 3 kongruente Teilkörper zerlegen? Verbindet man die Ecken einer Würfel fläche mit einer Ecke der gegenüberliegenden Fläche, so erhält man eine schiefe Pyramide. Man erkennt leicht, dass man den Würfel in drei solche Pyramiden zerlegen kann.

Verbindet man den Würfelmittelpunkt mit den vier Ecken einer Würfel­fläche, erhält man eine senkrechte Pyramide, die ein Sechstel des Würfelvolumens umschließt, da es sechs Würfel­flächen gibt. Dies legt die Vermutung nahe, dass eine senkrechte Pyramide, deren Spitze Mittelpunkt einer Würfel­fläche und deren Grundfläche die gegenüberliegende Würfel­fläche ist, auch ein Drittel des Würfels ausfüllt. Das Volumen einer Pyramide wird also vermutlich nicht geändert, wenn die Spitze parallel zur Grundfläche verschoben wird (Scherung).

Davon ausgehend, kann man den Würfel sehr unterschiedlich zerlegen. Es seien einige Beispiele angegeben:

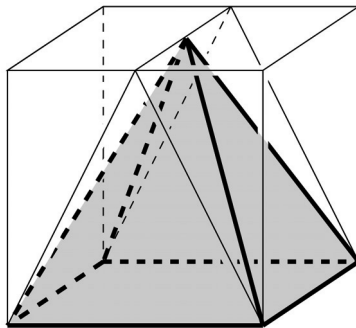


Zerlegung eines Würfels in zwei Prismen.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Dann wird ein Prisma zerlegt in eine Pyramide und ein Tetraeder

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

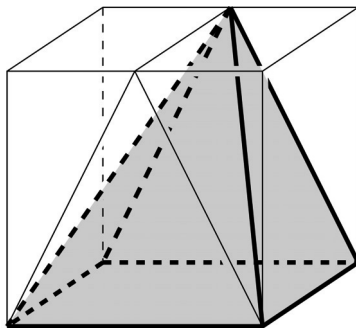


Zerlegung eines Würfels in drei Prismen.

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

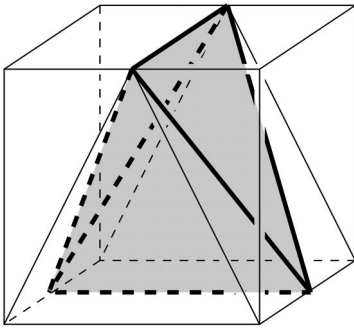
Das mittlere Prisma wird zerlegt in zwei Tetraeder und eine Pyramide

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$$



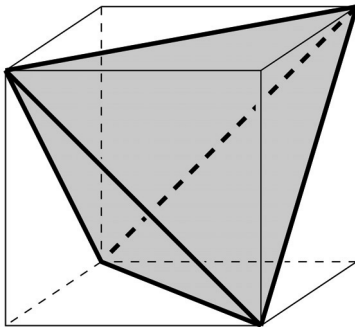
Wird die Pyramidenspitze an den Rand geschoben, so verschwindet das eine Tetraeder und das andere wird doppelt so groß. Man erhält:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$



Das mittlere Prisma kann auch in ein Tetraeder und zwei Pyramiden zerlegt werden.

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$



Ein Würfel kann in sechs Tetraeder zerlegt werden – die oben genannten drei Pyramiden werden halbiert. Eine Zerlegung in fünf Tetraeder ist auch möglich:

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

Hier hat das mittlere Tetraeder das doppelte Volumen wie die anderen vier Tetraeder.

An diesem Beispiel sollte erläutert werden, wie gerade das Gliedern eines Ganzen in die Teile ein Feld schöpferischer Betätigung eröffnet. Dieses methodische Vorgehen kann Leitbild sein nicht nur für den Aufbau einer Epoche, sondern auch für eine einzelne Unterrichtsstunde. Im Laufe der Oberstufe wird dieses Vorgehen dann noch befruchtet durch das Prinzip der Metamorphose.

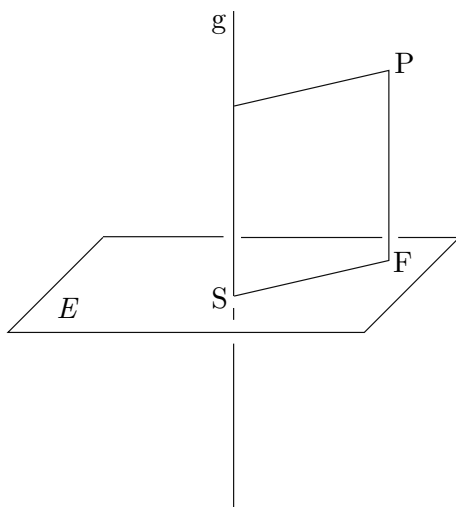
In den folgenden Beiträgen sind die in dieser Einleitung gegebenen Gesichtspunkte stärker differenziert dargestellt.

Zur Behandlung der Kegelschnitte in der 9. Klasse

UWE HANSEN

In der Zukunft wird es immer mehr notwendig sein, die Vorstellungskraft des jungen Menschen intensiv zu stärken. Daher ist es berechtigt, auch das Vorstellen von Raumgebilden zu üben.

1. Beispiel: Gegeben sei eine Ebene E und eine Gerade g , die sich im Punkte S rechtwinklig schneiden. Gesucht sind die Punkte P , die von g genau soweit entfernt liegen wie von E . Jeder Punkt P dieser Eigenschaft liegt so, dass der Winkel $\angle PSF = 45^\circ$ ist (F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf E), denn die Gerade SP muss den 90° -Winkel bei S halbieren. Dies bedeutet: Alle Punkte P liegen auf dem Mantel eines Doppelkegels, dessen Mantellinien mit der Kegelachse einen Winkel von 45° bilden.



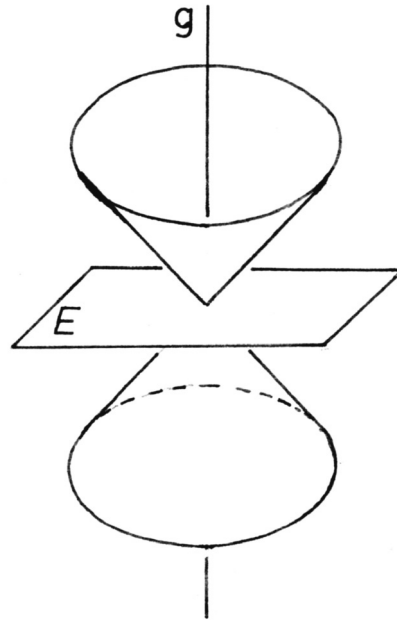
Man kann diese Aufgabe auch in der folgenden Weise stellen: Eine Ebene E – sie sei in waagerechter Stellung – bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit nach oben bzw. nach unten. Eine zu E senkrechte Gerade g sei die Achse eines Zylinders Z , dessen Radius sich mit der gleichen Geschwindigkeit vergrößere, wobei der Zylinderradius zu Beginn die Länge Null habe. Welche Fläche wird durch die Schnittlinie von E und Z erzeugt? Man erhält den gleichen Doppelkegel wie oben: aufgrund der gleichen Geschwindigkeiten sind die entsprechenden Abstände zu g und E stets gleich.

Dieser Doppelkegel entsteht also dadurch, dass ein sich vergrößernder Kreis mit konstanter Geschwindigkeit nach oben bzw. nach unten

wandert.

Beide Aufgaben führen zum selben Ergebnis. Die zweite Art der Fragestellung lässt aber den Doppelkegel entstehen und erfordert vom Schüler daher eine größere Aktivität. Die Erfahrung zeigt, dass 9-Klässler solche Vorstellungsübungen mit innerer Befriedigung machen: die erforderliche Konzentration wirkt sehr disziplinierend auf den Unterricht. Als Lehrer muss man die behandelten Flächen sehr intensiv vorstellen. Die Bewegungen der eigenen Hände sind vor allem für schwächere Schüler eine entscheidende Hilfe.

Bewegen sich Ebene und Zylinder mit verschiedener, aber konstanter Geschwindigkeit, so entsteht ein Doppelkegel mit einem anderen Öffnungswinkel. Zur Anregung seien einige weitere Beispiele genannt:



2. Beispiel: Der Radius r einer Kugel vergrößere sich mit konstanter Geschwindigkeit; der Kugelmittelpunkt M bewegt sich nicht und liegt zu Beginn, wenn $r = 0$ ist, auf der Ebene E . E bewege sich mit der halben Geschwindigkeit parallel nach oben bzw. nach unten – die Ebene E sei in waagerechter Stellung.

Welche Fläche beschreibt der Schnittkreis? In diesem Fall erhält man ebenfalls einen Doppelkegel; sein Öffnungswinkel ist $\alpha = 120^\circ$.

3. Beispiel: A und B seien die Mittelpunkte zweier Kugeln, deren Radien mit der gleichen Geschwindigkeit wachsen. Zu Beginn seien beide Radien gleich Null. Die Schnittlinie der beiden Kugeln ist (falls vorhanden) eine Kreislinie, die beim Vergrößern der Kugeln eine Ebene überstreicht (Mittelsenkrechte Ebene von A und B).

4. Beispiel: Wie bei Beispiel 3, die eine Kugel soll aber zu Beginn bereits einen von Null verschiedenen Radius haben. Der Schnittkreis beschreibt in diesem Fall nicht eine Ebene, sondern die „Hälfte“ eines zweischaligen

Hyperboloids.

5. Beispiel: Wie Beispiel 3, beide Kugeln haben zu Beginn den Radius Null. Der eine Radius vergrößert sich aber (z.B.) doppelt so schnell wie der andere. Der Schnittkreis beschreibt dann eine Kugel – „Divisionskugel“ in Anlehnung an den Begriff „Divisionskreis“.

6. Beispiel: Wieder seien zwei Kugeln gegeben, der Radius der einen Kugel wächst in dem Maße, wie sich der Radius der anderen Kugel verringert. Der Schnittkreis der beiden Kugeln beschreibt dann ein Ellipsoid, falls die Anfangsbedingungen dies zulassen, d. h. falls $r_1 + r_2$ größer als der Abstand der beiden Kugelmittelpunkte – die dann zu Brennpunkten werden – ist.

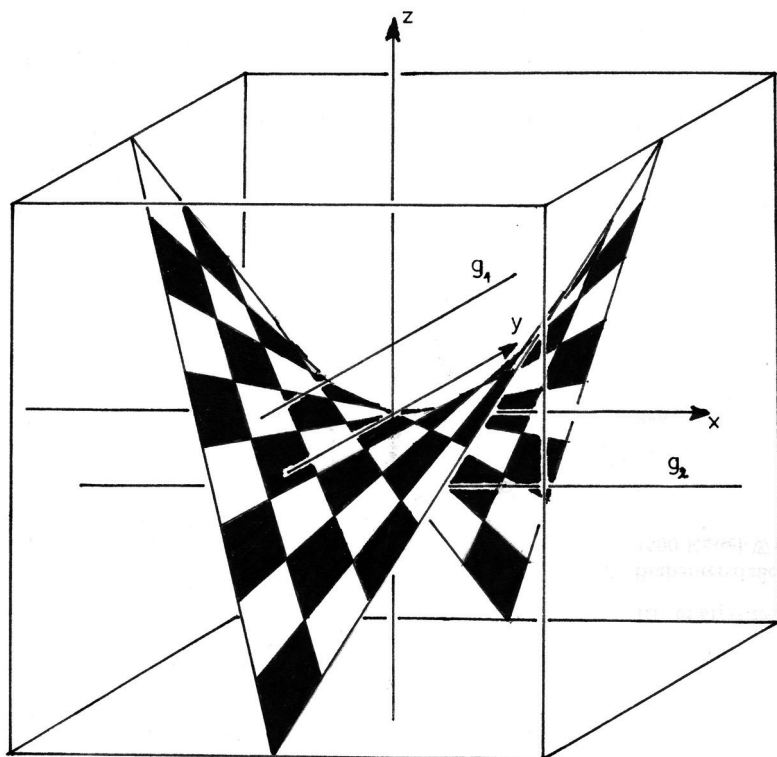
7. Beispiel: Man stelle sich die Ebene E waagrecht im Raum liegend vor; der Mittelpunkt einer Kugel befindet sich über der Ebene. Die Ebene wird mit konstanter Geschwindigkeit nach oben bewegt (Parallelverschiebung), der Radius der Kugel vergrößere sich mit der selben Geschwindigkeit. Welche Fläche beschreibt der Schnittkreis von Ebene und Kugel? Antwort: Ein Paraboloid.

Alle diese Übungen lassen sich erfolgreich mit 9-Klässlern durchführen – es ist natürlich ein behutsames und systematisches Vorgehen notwendig, um auch den schwächeren Schülern das Mitmachen zu ermöglichen. Das sinnvolle Wiederholen ist hier sehr wichtig. Selbstverständlich war es nicht Aufgabe der Schüler die Ergebnisse der Übungen zeichnerisch darzustellen. Die Folgende Aufgabe ist nur für besonders begabte Schüler lösbar:

8. Beispiel Zwei Zylinder, deren Achsen sich nicht schneiden, deren Richtungen aber senkrecht aufeinanderstehen, vergrößern ihre Radien mit gleicher Geschwindigkeit. Welche Fläche erzeugt die Schnittlinie der beiden Zylinder? Antwort: ein hyperbolisches Paraboloid (siehe Skizze).

Durch Variation der Anfangsbedingungen kann man auch ein einschaliges Hyperboloid erhalten. g_1 und g_2 sind die beiden Zylinderachsen.

Ich habe diese Übungen stets zu Beginn des Hauptunterrichts gemacht – als Einstieg in den Unterricht.



$$x^2 - y^2 = 4z \quad g_1 : z = 1, x = 0 \quad g_2 : z = -1, y = 0$$

Die Kegelschnitte als Symmetralen und ihre Fadenkonstruktionen

MARKUS HÜNIG

Vorbemerkung

Die Jugendlichen am Beginn der Oberstufenzeit stehen in einer Phase der notwendigen Neuorientierung (Wechsel vom Klassenlehrer zum Oberstufenkollegium, Pubertätskrise etc.). Das richtige Sich-Einordnen zwischen verschiedene Anforderungen gehört zu ihren vordringlichen Aufgaben.

Die Behandlung der gemeinhin als „Kegelschnitte“ bezeichneten Kurven in der neunten Klasse kann dann zu einer Hilfe in diesem Alter werden, wenn diese Kurven als Symmetral-Linien in der Ebene eingeführt und behandelt werden. Vielleicht sollte nicht einmal der Begriff „Kegelschnitte“ verwendet werden; man kann auch von „Kurven 2. Ordnung“ oder einfach von „Ellipse, Parabel und Hyperbel“ sprechen.

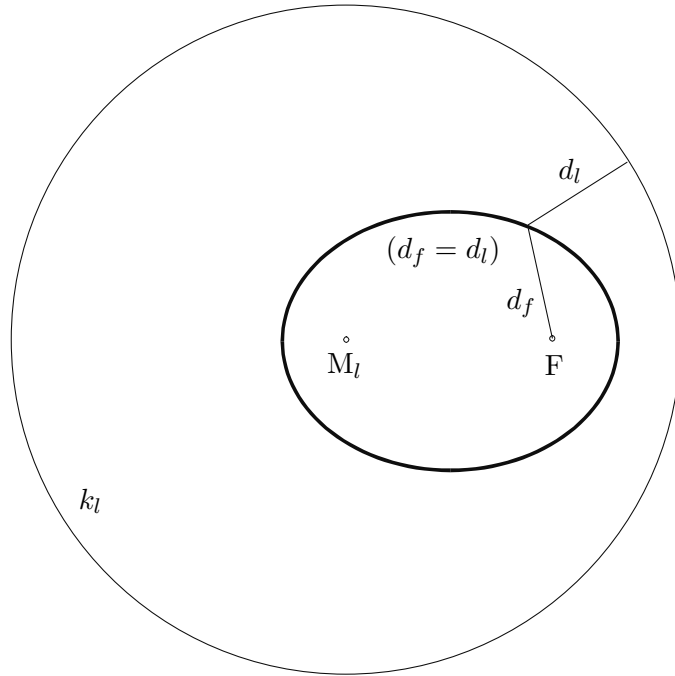
Die Bezeichnung Symmetrale wird in diesem Beitrag verwendet für einen geometrischen Ort, der in irgendeiner Weise durch einen gleichen Abstand gekennzeichnet ist. So kann z. B. die Mittelsenkrechte über zwei Punkten als Symmetrale angesehen werden, ebenso die Winkelhalbierende zwischen zwei sich kreuzenden Geraden.

Eine gleichbleibende Länge kann durch einen Faden konstanter Länge dargestellt werden. Bekannt sind Fadenkonstruktionen für den Kreis und die Ellipse. Weniger bekannt sind meistens die Fadenkonstruktionen für die anderen Kegelschnitte; diese sollen im Folgenden aus der Fadenkonstruktion der Ellipse hergeleitet werden.

Was hier dargestellt ist, ist nicht epochenfüllend. Vielmehr soll hier demjenigen, der die entsprechende Epoche in der neunten Klasse unterrichtet, eine Anregung gegeben werden, die dazu beitragen kann, die erzieherische Qualität dieses Gebietes fruchtbar zu machen.

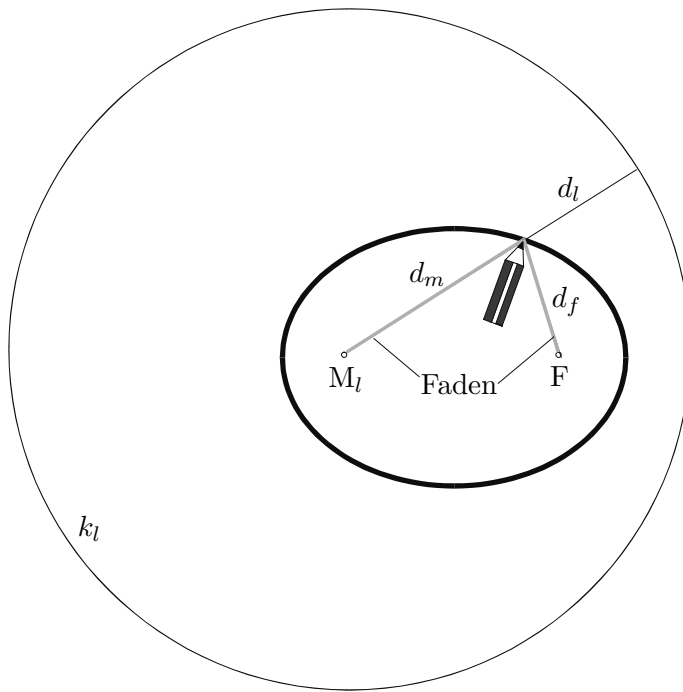
Die Ellipse

Gegeben seien ein Kreis („Leitkreis“ k_l) sowie ein Punkt („Brennpunkt“ F) innerhalb dieses Kreises. Gesucht ist diejenige Linie, welche stets zum Brennpunkt und zur Kreislinie gleichen Abstand hält - d.h. die Symmetrale zwischen Brennpunkt und Kreislinie.



Die so gewonnene Symmetrale ist eine Ellipse. Die beiden für jeden Punkt auf der Ellipse gleich langen Linien d_f und d_l bezeichnen wir als Brennstrahl bzw. Leitstrahl. Die Strecke vom Ellipsenpunkt zum Kreismittelpunkt sei d_m . Damit ist $d_m + d_l = r_l$, wenn wir den Leitkreisradius mit r_l bezeichnen.

Da nun $d_f = d_l$ gelten soll, ist auch $d_m + d_f = r_l$; diese konstante Länge kann durch einen Faden der Länge r_l dargestellt werden, welcher in den Punkten F und M_l z.B. mit Reißzwecken befestigt wird. Wird der Faden mit dem Bleistift gespannt, so befindet sich der Bleistift auf einem Ellipsenpunkt.



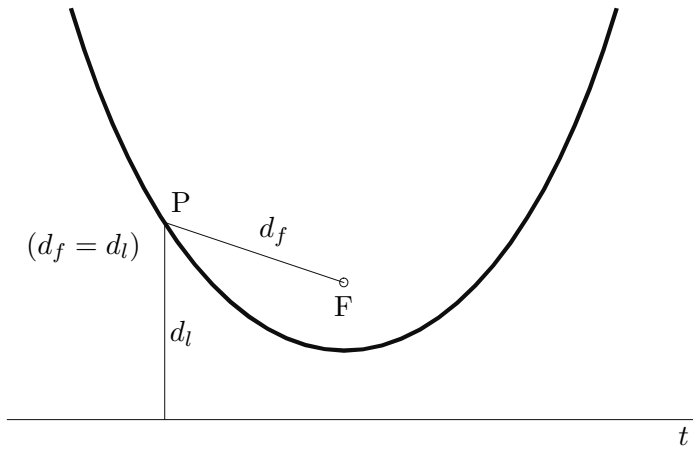
Fadenkonstruktion der Ellipse (Leitkreis zum Verständnis)

Es ist also zunächst erforderlich, von der Gleichheit zweier Längen überzugehen auf eine gleichbleibende Längensumme, indem man die eine Länge von einer dritten (konstanten) Größe subtrahiert. Dieser Grundgedanke soll uns auch bei den Fadenkonstruktionen für Parabel und Hyperbel leiten.

Die Parabel

Wir denken uns nun den Radius des Leitkreises unendlich anwachsend, so dass seine Krümmung immer geringer wird und schließlich eine Leitgerade daraus wird. Wieder wird die Symmetrale gesucht:

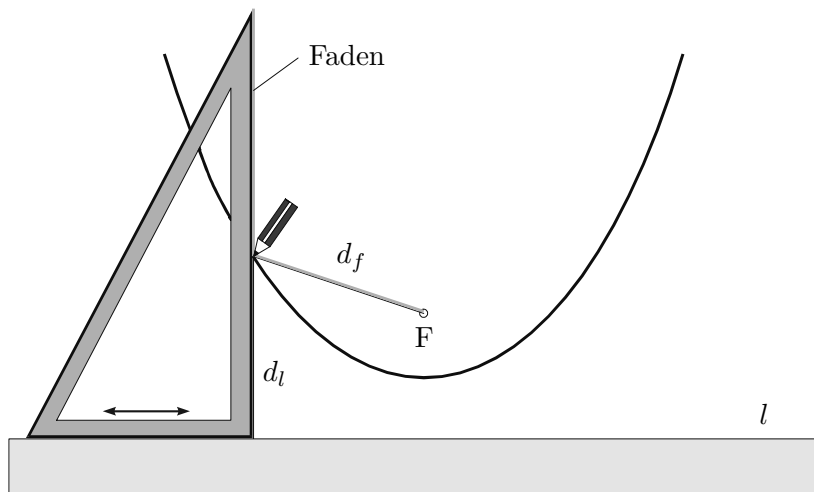
Gegeben seien eine Gerade („Leitgerade“ l) sowie ein Punkt („Brennpunkt“ F) außerhalb dieser Geraden. Gesucht ist diejenige Linie, welche stets zum Brennpunkt und zur Geraden gleichen Abstand hält. – Die so gefundene Linie ist eine Parabel.



Eine zwischen zwei Enden gespannte Schnur kann aber immer nur eine konstante Gesamtlänge darstellen. Hier gilt nun wieder $d_f = d_l$. Durch Umformung erhält man:

$$d_f - d_l = 0 \Leftrightarrow d_f + c - d_l = c \Leftrightarrow d_f + (c - d_l) = c.$$

Um also eine Fadenkonstruktion der Parabel zu ermöglichen, geben wir uns einen Faden einer willkürlichen konstanten Länge (c) vor und stellen den einen der beiden Strahlen als das zu dieser Länge fehlende Stück dar (es ist einfacher, den Leitstrahl so darzustellen): Die Leitgerade l wird durch ein Lineal dargestellt; ein darauf entlangleitendes Dreieck ergibt den senkrechten Leitstrahl d_l . Das eine Ende des Fadens wird z. B. mit einer Reißzwecke im Brennpunkt befestigt, das andere an der Spitze des Dreiecks. Die Fadenlänge ist genau die Länge der senkrechten Dreiecks-kante. Mit dem Bleistift spannt man nun den Faden an das Dreieck. Es ist leicht einzusehen, dass das Fadenstück vom Bleistift bis zum Brennpunkt genauso lang ist wie das „fehlende“ Fadenstück an der senkrechten Dreiecks-kante. Indem das Dreieck auf der Leitgeraden entlangfährt, zeichnet der Stift die gesuchte Parabel.



Fadenkonstruktion der Parabel

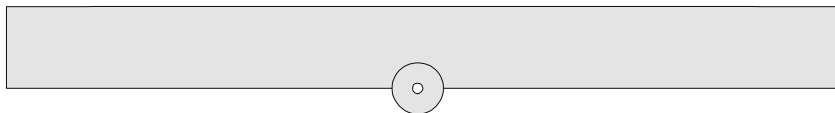
Die Hyperbel

Wir führen nun die Verformung des Leitkreises (der Ellipse) zur Leitgeraden (der Parabel) konsequent weiter und erhalten wieder einen Leitkreis, allerdings nun nach der anderen Seite gekrümmt; d. h. der Brennpunkt liegt nun außerhalb des Leitkreises:

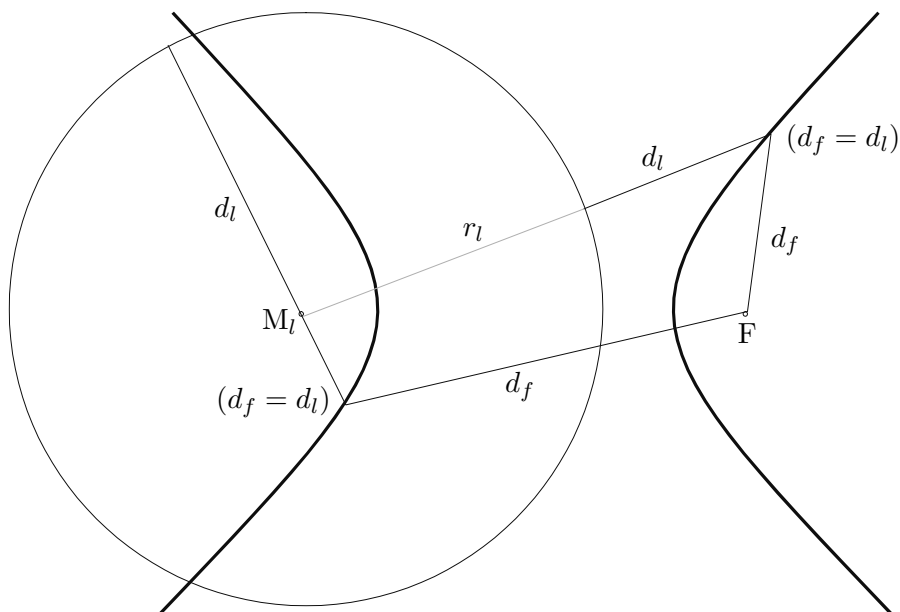
Gegeben seien ein Kreis („Leitkreis“ k_l) sowie ein Punkt („Brennpunkt“ F) außerhalb dieses Kreises. Gesucht ist diejenige Linie, welche stets zum Brennpunkt und zur Kreislinie gleichen Abstand hält - d. h. die Symmetrale zwischen Brennpunkt und Kreislinie. - Es entsteht zunächst ein Hyperbelast.

Den zweiten Hyperbelast erhält man, wenn man den Leitstrahl nicht zum nächstgelegenen Punkt der Kreislinie führt, sondern zum entferntesten. Auch dort trifft er rechtwinklig (zur Tangente) auf. Wie kann hier eine Fadenkonstruktion erfolgen?

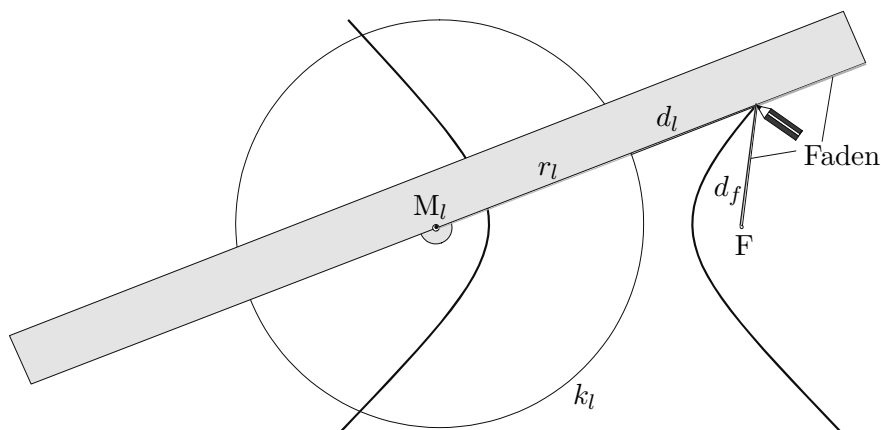
Wir benötigen für eine einigermaßen sichere Konstruktion ein kleines Spezialwerkzeug, das jedoch leicht selbst hergestellt werden kann. Es stellt ein Lineal dar, welches auf der Linie drehbar befestigt werden kann:



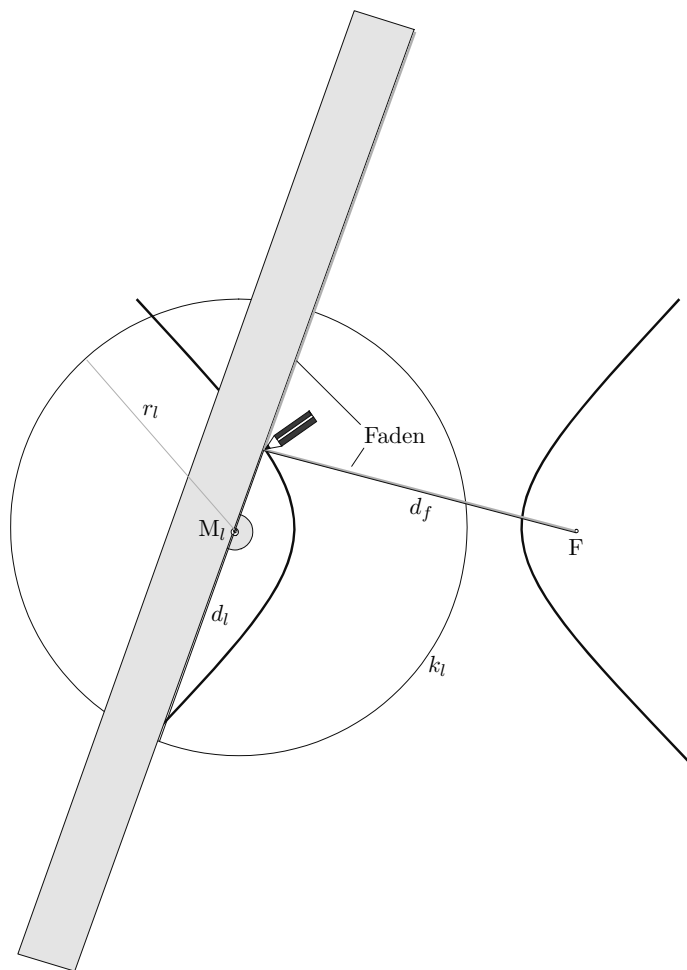
Der Drehpunkt wird nun z. B. mit einer Reißzwecke im Mittelpunkt des Leitkreises befestigt. Den Faden fixiert man am einen Ende des „Lineals“;



seine Länge reicht genau bis zum Leitkreis, und zwar je nach gewünschtem Hyperbelast bis zur nächsten oder weitesten Stelle der Kreislinie. Das noch freie Ende wird wieder im Brennpunkt fixiert. Wenn wir jetzt den Faden mit dem Bleistift gegen das Lineal spannen wird deutlich, dass der Faden vom Bleistift bis zum Brennpunkt gerade das Fadenstück ist, was vom Stift bis zur Kreislinie „fehlt“.



Fadenkonstruktion der Hyperbel (rechter Ast)



Fadenkonstruktion der Hyperbel (linker Ast)

Es wird deutlich, dass die Symmetraleigenschaften der Kegelschnitte unmittelbar mit der Möglichkeit von Fadenkonstruktionen zusammenhängen: Der stets gleiche Abstand zu den zwei unterschiedlichen Örtern wird über den Umweg einer Differenzbildung auf eine gleichbleibende Längensumme zurückgeführt, welche durch einen Faden dargestellt wird (siehe Gleichung im Abschnitt 3). - Manchen Schülern wird über diese Konstruktionen der Zugang zur Geometrie der Kegelschnitte erleichtert oder erst ermöglicht. Die Balance zwischen unterschiedlichen Bezugsobjekten kann hier jedenfalls als ein kontinuierlicher Prozess erlebt werden, welcher eine durchgehende Spur hinterlässt.

Die üblichen Konstruktionen einzelner Punkte dieser Kurven mit Zirkel und Lineal sollen nicht durch die Fadenkonstruktionen ersetzt werden; manche Aspekte dieser Kurven lassen sich mit ihrer Hilfe viel besser herausarbeiten.

In der Praxis haben sich zur Befestigung des Fadens je nach den Gegebenheiten auch Stecknadeln oder Verschlussklammern (von Versandtaschen) bewährt. An der Tafel kann man gut mit Saugnäpfen arbeiten (schwierig bei lackierten Tafeln).

Die Schüler können sich das für die Hyperbel benötigte Speziallineal aus fester Pappe mit einem Federmesser ausschneiden (der Buckel um den Drehpunkt kann auch eckig sein!). Für die Tafel kann man eine grade Holzlatte nehmen; in der Gegend des Drehpunktes wird sie etwas ausgekerbt und dann eine Schrauböse dort eingedreht. So entsteht ein sicherer Drehpunkt.

Eine Variation zur Fadenkonstruktion der Hyperbel kommt ohne die drehbare Latte aus. Hierbei wird der Faden im Leitkreismittelpunkt befestigt und sein äußeres Ende nach außen gespannt; dort ist er mit einem zweiten (kürzeren) Faden verknüpft, dessen anderes Ende im Brennpunkt befestigt ist. An der Stelle des Bleistiftes werden die beiden Fäden mit einem Ring zusammengehalten.

Planimetrie als ein Einstieg in die Mathematik der Oberstufe

ROLF ROSBIGALLE

I	Einleitung	28
II	Unterrichtsgänge mit Erläuterungen	29
	1. Stunde (Einfache Figuren)	29
	2. Stunde (Berechnung einfacher Figuren, Flächenverwandlungen)	34
	Einige Bemerkungen zum Kopfrechnen:	35
	Eine Bemerkung zur Angabe der Einheiten	36
	Beispiele für Scherungsprobleme	37
	Ergänzungsparallelogramme	44
	Orientierungsmotiv für die Behandlung der Planimetrie	44
	3. Stunde (Trapez, lebenspraktische Berechnungen ebener Figuren, Vertiefung)	46
	noch einmal: Umgang mit Einheiten	48
	Alternativer Einstieg, Umfang: 3 Stunden	53
	4. Stunde (Längenbeschreibung „schräger“ Seiten, Vertiefung des bisher Behandelten)	57
	Schema des hier verwendeten Stundenaufbaus	60
	Hinweis auf Angaben R. Steiners zur Stundeneinteilung	60
	Funktion des rhythmischen Teils und Methodenwechsel	60
	Kopfrecheneinheiten, in die Hauptteile des Unterrichts überleitend – zugleich eine Angabe weiterer Unterrichtsinhalte, unter anderem:	61
	Schriftliches Wurzelziehen	61
	Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	64
	Zusammenhang aufeinanderfolgender Quadratzahlen	67
	gleichschenkelig-rechtwinkliges und gleichseitiges Dreieck	69
	Berechnen und Umrechnen von Flächeninhalten	71
	Umfangsberechnungen	75
	Die Kreisausmessung – die Zahl π	78

Die Berechnung verschiedenster Figuren	83
Ausblick	89
III Anhang: Unterrichtsgepflogenheiten	90
Zur Heftführung:	91
Literaturangaben	92
Weitere Literatur	92

I Einleitung

Bei Übernahme einer 9. Klasse im Fach Mathematik empfiehlt es sich, schnell herauszufinden, welche Grundlagen vorliegen. Hierfür eignen sich leichte, nicht uninteressante Einstiege, die

- „voraussetzungslos“ sind,
- in kurzer Zeit festen Boden schaffen *ohne* langwierige Wiederholungen und ein Gefühl der Sicherheit vermitteln,
- unmittelbar in Schwierigeres und Neues einmünden können,
- dabei den Schüler zur Selbsttätigkeit in der Lösungsfindung erziehen.

Die folgenden Unterrichtsbeispiele beschreiben erste Hauptunterrichtsstunden der ersten Epoche in einer 9. Klasse (bzw. enthalten Kerne für Übstunden oder Hauptunterrichtsstunden). Sie sind so angeordnet, dass sie eine in sich geschlossene Stundenfolge charakterisieren. Einzelne Stundenkomplexe können aber auch herausgelöst und für sich behandelt werden. Vielfach wird eine *Kopfrechen-Phase* dargestellt und gezeigt, wie man hieraus leicht in die Erarbeitung von Neuem gelangen kann (*Weg in den Hauptteil eines Hauptunterrichts*) bzw. wie man das am Vortage Behandelte wieder aufgreifen und vertiefen kann, und das geradezu spielerisch, so dass Berührungängste an der Mathematik, manchmal eine Hypothek aus der Klassenlehrerzeit, gar nicht erst aufkommen. *Die ersten vier Unterrichtsstunden* (Hauptunterrichte, zum Stundenaufbau siehe S. 60) habe ich sehr detailliert beschrieben. Vielleicht hilft dies dem Anfänger, sich im sorgfältigen Vorbereiten von Unterrichtsgängen bzw. im genauen Durchdenken einer möglichen Gesprächsführung zu üben. Ein *alternativer Einstieg* ist zur Ergänzung eingefügt. Alles hier Dargestellte wurde mehrfach erprobt und hat sich bewährt, ist aber selbstverständlich immer wieder neu und anders zu greifen und auch verbesserungswürdig. Der dargestellte Inhalt und die Methode orientieren sich am bisher in

beginnenden 9. Klassen Vorgefundenen, nicht am vielleicht Wünschenswerten. Man findet vieles von dem wieder, was nach Auffassung einiger Autoren (A. Bernhard, G. Ott) in die 8. Klassenstufe gehört; allerdings wird es in meiner Ausarbeitung nicht unter dem Aspekt des Neuen behandelt, sondern unter dem der kurzen, prägnanten Wiederholung in einer um ein Jahr älteren Klasse.

II Unterrichtsgänge mit Erläuterungen

1. Stunde

Kopfrechnen: Prozentrechnung

Wieviel € sind $3\frac{1}{2}\%$ von 6000 €? Es folgen zunächst einige solche Aufgaben. Wie hast Du das gerechnet? Durch 100 mal $3\frac{1}{2}$. Oder: 2 Stellen von 6000 abstreichen, dann mal 3, also 3 mal 60, und dann noch die Hälfte von 60 dazu. Man nimmt weitere solche Übungen mit nachfolgendem Vorrechnen, eventuell mit Neunerprobe.¹ Den Schwierigkeitsgrad wählt man jeweils so, dass *alle* Schüler drankommen können und müssen. Dann kann man das Tempo steigern und den Schwierigkeitsgrad erhöhen. Dieser Kopfrechenteil führt zunächst nicht in das eigentliche Thema hinein, hat sich aber für den Einstieg in die mathematische Arbeit einer 9. Klasse bewährt. Deshalb wird er an diese Stelle gesetzt. Er dient hier zunächst der Kontaktaufnahme und dem „Aufwecken“. Zum Zwecke der Überleitung in den Hauptteil schließt sich eine Vorstellungsübung an. Man kann, wenn man möchte, auch den obigen Kopfrechenteil weglassen und gleich mit der Vorstellungsübung beginnen.

Vorstellungsübung

Wir stellen uns ein Quadrat vor, dessen Grundseite waagerecht liegt. Diesem beschreiben wir nun ein Dreieck ein, dessen Ecken P, Q und R folgendermaßen liegen: P liegt auf der oberen Seite, Q auf der rechten Seite und R in der linken unteren Ecke des Quadrates.

- Wie müssen P und Q liegen, damit das Dreieck gleichschenkelig ist?
- Welche besonderen Lagen gibt es, wenn man P und Q auf den Seiten wandern lässt?
- Wie groß ist in diesen Fällen jeweils der Flächeninhalt?

¹Siehe die Ausarbeitung zur Neunerprobe von A. Bernhard in dieser Sammlung, S. 159.

Die Tafel wird umgeschlagen, und es erscheint folgendes Bild:²

$A_{\square}$: Flächeninhalt des Quadrats
M: Mittelpunkt der jeweiligen Seite

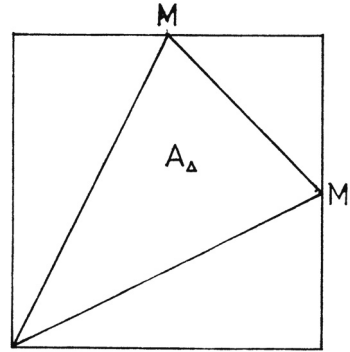


Bild 1: $A_{\Delta} : A_{\square} = ?$

Man wird die Lösungsvorschläge sammeln, besprechen, evtl. vorführen lassen und einen oder mehrere Lösungswege an der Tafel festhalten. Die wesentlichen, bewusst zu vollziehenden Schritte hierzu sind

- die Bezeichnung von Flächen, evtl. von Kantenlängen
- der Flächeninhalt eines (rechtwinkligen) Dreiecks
- die fragliche Fläche als Restfläche

Man erhält auf diese Weise $A_{\Delta} : A_{\square} = 3 : 8$.

Mögliche Anknüpfungspunkte sind:

1. Wieviel Prozent der Quadratfläche nimmt die innere Dreiecksfläche ein? nimmt jeweils eine der anderen Dreiecksflächen ein? Da muss ich also das Verhältnis in eine Dezimalzahl umrechnen und in Hundertstel ausdrücken, um den prozentualen Anteil zu haben.
2. Die Frage „Was sind das für Dreiecke, die da in der Figur vorkommen?“ führt zu den Überlegungen
 - Was wissen wir über gleichschenklige Dreiecke?
 - Was wissen wir über rechtwinklige Dreiecke?
und weiter zu Winkelbetrachtungen an dieser oder anderen Figuren oder zum Satz von Pythagoras.
3. Verhältnisgleichungen können ohne Mühe, z. B. im Kopfrechnen, aufgegriffen und geübt werden. Ihre didaktische Bedeutung für das wirkliche Verstehen z. B. der Strahlensätze und der Winkelbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck wird gelegentlich unterschätzt.

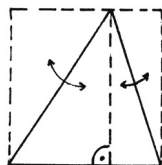
²Siehe P. Eigenmann: Geometrische Denkaufgaben, Klett Verlag, Stuttgart 1981, Aufgabe 10 aus Teil I

Die im eigentlichen Unterrichtsgang nicht berücksichtigten Anknüpfungspunkte können gut in den Übstunden aufgegriffen werden.

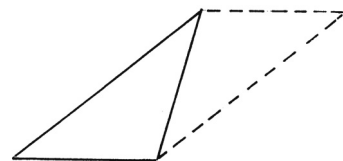
Die Anknüpfung an 2. ermöglicht jetzt zu besprechen, warum der Flächeninhalt *jedes* Dreiecks sich durch „Grundlinie mal Höhe durch Zwei“ ergibt. Folgende Gedankengänge können sich hier anschließen:

(1) Die Schüler ergänzen das Dreieck zum Rechteck (Skizze 1), was bei Dreiecken der Form $\triangleleft$ auf Probleme stößt. Dann gelingt die Ergänzbarkeit zum Parallelogramm (Skizze 2) und daraufhin dessen Umwandlung in ein Rechteck durch „Abschneiden und Dranflicken“ (Skizze 3). Oder die Schüler nennen gleich das Parallelogramm; siehe oben.

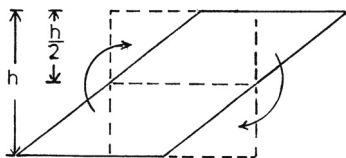
Skizze 1



Skizze 2

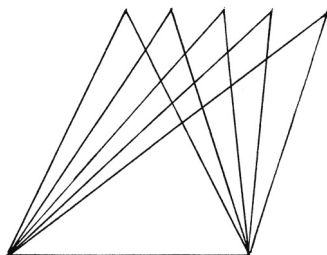


Skizze 3



(2) Die Schüler kommen gleich mit dem Prinzip der Scherung. Liegt ein Dreieck laut Skizze 1 vor, leitet man mit geeigneten Zeichnungen zur Scherung über (Skizze 4). Liegt ein Dreieck der Form $\triangleleft$ vor, so muss man die Inhaltsinvarianz erst herausarbeiten, wozu sich Gedankengang (1) anbietet.

Skizze 4



Im „Stillarbeitsteil“ wird von den Schülern Bild 1 (Seite 30) mit Lösung notiert, vom Lehrer gezeichnete Scherungsbilder und Skizzen obiger Art und Flächeninhaltsformeln von Dreieck und Parallelogramm (Rechteck und Quadrat als Spezialfälle) ebenfalls.

Man sollte bei der Wahl der Unterrichtsform im engeren Sinne immer berücksichtigen, inwieweit man auf Einzelarbeit,

auf Einzelarbeit mit gegenseitiger Hilfe oder z. B. auf Arbeit in selbstgewählten Gruppen hinzielen will. Es ist ja durchaus sinnvoll, die Fähigkeit zu letzterer Arbeitsform im Sinne einer Übung im Sozialen auszubilden. Wichtig für die hier gemeinte Unterrichtsphase ist nur, dass der einzelne Schüler auf jeden Fall zu einer wirklichen Eigentätigkeit im Üben, Probieren, Zeichnen usw. kommt. Siehe hierzu auch S. 58.

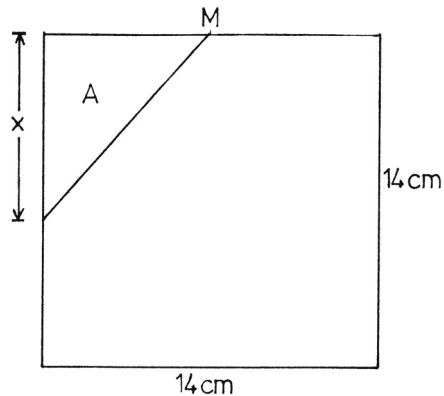
In der restlichen Zeit werden schon die Hausaufgaben begonnen. Hierzu befinden sich auf einer Tafelfläche die folgenden Figuren:³

Aufgabe 1

Sei der Flächeninhalt des Quadrats: Q .

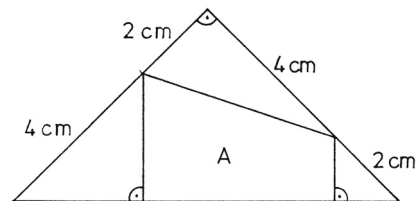
$$\text{Sei } A = \frac{Q}{7}.$$

$$x = ?$$



Aufgabe 2

$$A = ?$$



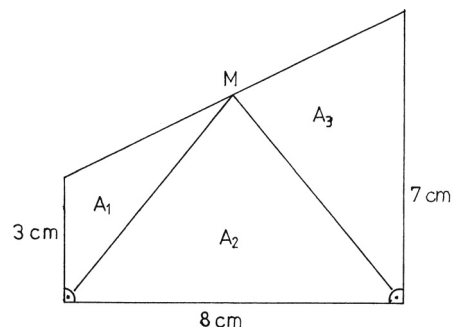
Aufgabe 3

M sei der Mittelpunkt der schrägen Seite.

$$A_1 = ?$$

$$A_2 = ?$$

$$A_3 = ?$$



³ Aus P. Eigenmann: Geometrische Denkaufgaben

Aufgabe 1: Teil I, 26; Aufgabe 2: Teil I, 22; Aufgabe 3: Teil I, 4

Lösungen: Aufgabe 1: $x = 8 \text{ cm}$; Aufgabe 2: $A = 9 \text{ cm}^2$; Aufgabe 3: $A_1 = 6 \text{ cm}^2$, $A_2 = 20 \text{ cm}^2$, $A_3 = 14 \text{ cm}^2$

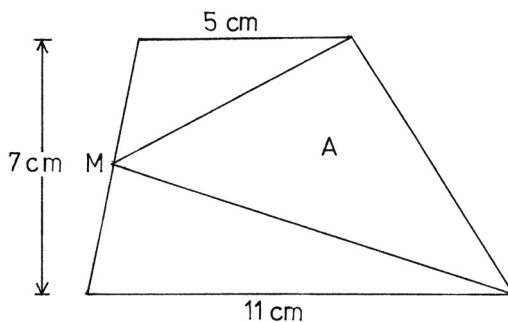
An dieser Stelle sei ein *Hinweis zur Arbeitsweise des Lehrers* gestattet. Der elementarmathematisch Versierte findet immer mehrere Lösungsmöglichkeiten; manchmal muss man dafür die eine oder andere noch nicht behandelte Tatsache hinzunehmen. Der Lehrer tut gut daran, solche Aufgaben und ihre verschiedenen Lösungswege vor der Behandlung im Unterricht genauestens und auf vielfältige Weise zu durchdenken. Denn einerseits bringt er die Schüler im Unterrichtsgespräch, wenn die Lösungsvorschläge ins Stocken geraten, durch Einhilfe unter Umständen auf einen unverständlichen Weg und erzeugt Katastrophen. Zum anderen schafft erst ein breit vorbereiteter Lehrer, selbst wenn er die Schüler ganz selbständig arbeiten lässt, die für Problemlösungen fruchtbare Atmosphäre. Der Lehrer tut weiter gut daran, sich dann im Unterricht bis zu einem gewissen Grade innerlich leer zu machen, um für alle Schüleräußerungen, für jeden noch so eigentümlichen Gedankengang offen zu sein.

Ergänzung

In diesem Zusammenhang geeignet sind auch die folgenden Probleme:⁴

Aufgabe 4

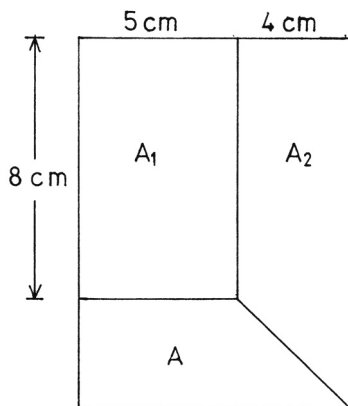
$A = ?$



Aufgabe 5

Sei $A_1 = A_2$

$A = ?$



⁴ Aus P. Eigenmann: Geometrische Denkaufgaben

Aufgabe 4: Teil I, Aufgabe 18 (Lösung: $A=28 \text{ cm}^2$; Aufgabe 5: Aufgabe 20 (Lösung: $A=28 \text{ cm}^2$). Dort befinden sich viele weitere geeignete Problemstellungen.

2. Stunde

Kopfrecheneinheit 1

$$7 \cdot 13 = ? \quad 3 \cdot 13 = ? \quad 13 \cdot 13 = ?$$

Wie habt ihr das gerechnet?

$$11 \cdot 13 = ? \quad 9 \cdot 13 = ? \quad 6 \cdot 13 = ?$$

$$5 \cdot 14 = ? \quad 9 \cdot 14 = ? \quad 4 \cdot 14 = ? \quad 14 \cdot 14 = ?$$

Was war $13 \cdot 13$? Nun $13 \cdot 14$? Wie kann man das rechnen? $10 \cdot 14$ und $3 \cdot 14$ dazu, Oder? $13 \cdot 13$ und 13 dazu. Oder? $14 \cdot 14$ und 14 ab.

Man kann nun noch zu weniger leichten Rechen-Folgen übergehen, wobei man auf die Quadratzahlen zusteuert. Je nach Voraussetzungen der Schüler geht man bis 20^2 oder 25^2 . Wenn nicht anders, rechnet man $19 \cdot 19 = 10 \cdot 19 + 9 \cdot 19$, also noch nicht unbedingt nach den binomischen Formeln (s.u. S. 70).

Schließlich erinnert man sich gemeinsam: Was war $13 \cdot 13$? Was $14 \cdot 14$? usw. Auf diese Weise geht man alle Quadratzahlen bis zur gesetzten Grenze durch und notiert sie ganz nebenbei auf der etwas abseits stehenden **Merktafel**:

$1^2 = \dots$	$11^2 = \dots \dots \dots$	$41^2 = \dots$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	$50^2 = \dots$

Wie man sieht, kann die fertig beschriebene Merktafel gut bis 50^2 oder weiter reichen. Man ergänzt also im Laufe der Zeit die Quadratzahlen über 25^2 hinaus, was in den Kopfrechenphasen geschehen kann. Siehe hierzu insbesondere Kopfrecheneinheit 5, S. 70. Dieser Anschrieb wird für einige Zeit nicht mehr gelöscht.

Nun geht man über zum Im-Kopf-Berechnen von Flächeninhalten, orientiert an den Quadratzahlen. Es bieten sich Aufgaben der folgenden Art an:

- Aus einem quadratischen Blech der Kantenlänge 10 cm ist eine quadratische Fläche mit der Kantenlänge 5 cm ausgestanzt. Wie groß ist der Inhalt der Restfläche?

- Wir nehmen ein rechteckiges Blech mit den Kantenlängen 15 cm und 7,5 cm und stanzen zwei quadratische Löcher der Kantenlänge 6 cm aus. Inhalt der Restfläche?

(Schnellste Berechnung der Rechtecksfläche? $15 \cdot \frac{15}{2} = \frac{15^2}{2} = \dots$!)

- Wir haben quadratische Holzbretter mit den Kantenlängen 15 cm, 20 cm, 25 cm. Ist der Flächeninhalt der ersten beiden Bretter, zusammen genommen, größer als der des dritten?

Wie ist das bei den Kantenlängen 14 cm, 19 cm, 24 cm? usw. Nennt die Kantenlängen dreier Holzbretter, bei denen der Flächeninhalt der ersten beiden zusammen genau gleich dem des dritten ist!

- Sägt aus dem quadratischen Brett mit der Kantenlänge 25 cm eines mit der Kantenlänge 20 cm aus, aus diesem wiederum eines mit der Kantenlänge 13 cm. Welches der beiden „Passepartouts“ hat den größeren Flächeninhalt? usw.
- Sägt aus dem zuletzt ausgesägten Brett ein quadratisches so heraus, dass etwa die Hälfte des Flächeninhaltes übrigbleibt. Wie groß muss die Kantenlänge des herausgesägten Brettes in etwa sein?

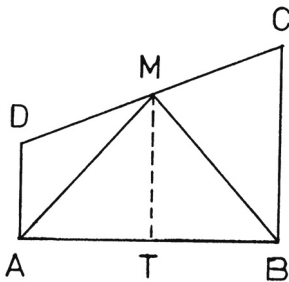
Einige Bemerkungen zum Kopfrechnen:

Leitet diese Phase *inhaltlich* in den Hauptteil über, z. B. so, dass das im Kopfrechnen Getane bestimmte Verallgemeinerungen nahelegt, die dann näher untersucht oder weiter benutzt werden, so darf sie relativ lang sein. Soll das Kopfrechnen hauptsächlich aufwecken und empfänglich machen für das Thema des Hauptteils, so kann es recht kurz sein. In jedem Falle gilt:

- man lasse es zügig ablaufen
- es darf kurzweilig sein
- bei einfachen Rechnungen auf Tempo rechnen, bei schwereren *warten*
- das Vorsagen und Hereinrufen von Ergebnissen ist verboten
- die sehr guten Schüler zum Korrigieren falscher Rechnungen drannehmen, sofern sich kein schwächerer Schüler meldet
- Wer sich nicht meldet, wird gelegentlich mit Fragen angemessenen Schwierigkeitsgrades aufgerufen

- man wähle für den Verlauf jeder Kopfrechenphase ein breites Spektrum bezüglich des Anforderungsniveaus.

All dies ist natürlich auch bei Vorstellungsübungen zu beherzigen. Bei der Kopfrecheneinheit 1 (s.o. S. 34) ist die schnelle, kurzzeitige Merkfähigkeit besonders gefordert, und zwar schrittweise in gesteigertem Maße. Gerade diese ist unter den heutigen jungen Menschen im Durchschnitt schwach ausgebildet und kann auf diese Weise verbessert werden.



M halbiert $\overline{DC}$, also halbiert auch T $\overline{AB}$.

Die Hausaufgaben stehen noch an der Tafel und können nun gut besprochen werden, am besten bei geschlossenen Heften. Hierzu fragt der Lehrer nach Ergebnissen bzw. Lösungswegen für die Aufgaben 1 und 2. Schüler tragen ihre Lösungen hintereinander an der Tafel vor. Zwischenfragen von Schülern und vom Lehrer beseitigen Unklarheiten. Auch andere Lösungswege als der zuerst dargestellte sollen berücksichtigt werden. Allerdings soll das allgemeine Verständnis der Lösungswege hierbei der Schwerpunkt sein, nicht

so sehr eine spätere saubere Fixierung. Letzteres geschieht mit der Aufgabe 3. Nach der Besprechung oder währenddessen wird an der Tafel etwa folgendes notiert:

- Im $\triangle ABM$ sind $g = 8$ und $h = \frac{3+7}{2} = 5$, also ist $A_2 = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.
- Im $\triangle AMD$ sind $g = 3$ und $h = \frac{8}{2} = 4$, also ist $A_1 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.
- Im $\triangle BCM$ sind $g = 7$ und $h = \frac{8}{2} = 4$, also ist $A_3 = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

Daher erhalten wir:

$$\underline{\underline{A_2 = 20 \text{ cm}^2}} \quad \underline{\underline{A_1 = 6 \text{ cm}^2}} \quad \underline{\underline{A_3 = 14 \text{ cm}^2}}$$

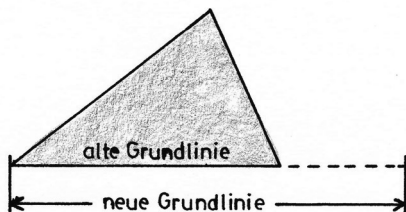
Eine Bemerkung zur Angabe der Einheiten

Man hat als Lehrer natürlich im Bewusstsein, dass die für h und A_2 (bzw. A_1, A_3) errechneten Zahlenwerte eigentlich Größen sind, obendrein verschiedene (Länge und Flächeninhalt). Ich lasse zunächst in reinen Zahlen rechnen, wobei man sich vorher auf die durchgehend gleiche Einheit geeinigt hat, und füge erst im Ergebnis(-satz) die Einheit hinzu. Das macht den Schüler sensibel für die unterschiedlichen Qualitäten und ermöglicht dann auch einen bewussten, nicht nur eintrainierten Umgang mit Zahl, Maßzahl, Einheit, Größe usw. Man schließt jetzt noch die Frage an: Wie könnte man den Flächeninhalt der gesamten Figur, ohne Umwege über

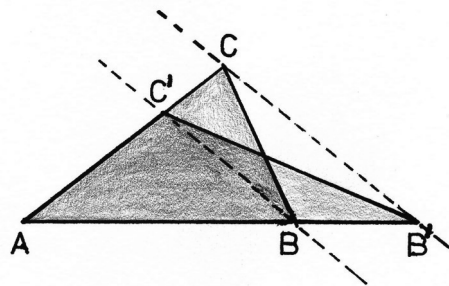
die Dreiecke, ausrechnen? Das führt unter Umständen zur Nennung der Inhaltsformel für das Trapez. Vielleicht wird aber auch ein Vorschlag gemacht, der vom „Abschneiden und wieder Dransetzen“ handelt. Dies lässt man auf sich beruhen und greift die in der letzten Stunde begonnene Flächenverwandlung durch Scherung auf. Man wiederholt kurz die Scherung von Dreiecken und Parallelogrammen und gibt den Schülern genügend interessante Scherungsprobleme sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades. Hierzu vorbereitete Arbeitsbögen haben den Vorteil, dass nicht wertvolle „Denk- und Probier-Zeit“ für das Zeichnen der Grundfiguren verloren geht; Schüler gewisser Temperamentslagen geraten leicht in die Gefahr, sich in dieser reinen Zeichentätigkeit, die an dieser Stelle unbedeutend ist, zu „verkünsteln“. An dieser Stelle seien *einige Beispiele für Scherungsprobleme* angegeben, die in der nun beginnenden Stillarbeitsphase von den Schülern „beackert“ werden.

(1) Verwandlung eines gegebenen Dreiecks in ein Flächeninhaltsgleiches

a) mit veränderter Grundlinie:



(funktioniert auch bei verkleinerter Grundlinie)



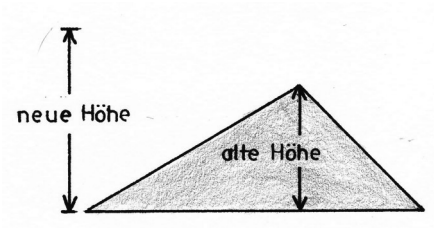
Die Parallele zu $B'C$ ⁵ durch B schneidet AC in C' . $\triangle AB'C'$ ist das gesuchte Dreieck.

*Begründung:*⁶ $\triangle BCC'$ geht durch Scherung in $\triangle BB'C'$ über, beide Dreiecke sind also inhaltsgleich. Außerdem ist $\triangle ABC'$ den Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle AB'C'$ gemeinsam. Daher sind $\triangle ABC$ und $\triangle AB'C'$ inhaltsgleich.

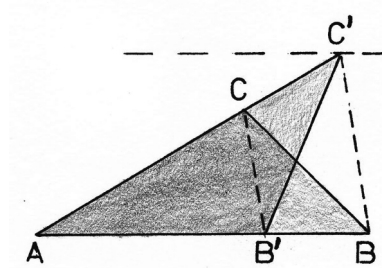
⁵ Ich bezeichne die Gerade durch A und B mit AB, die Strecke von A bis B mit $\overline{AB}$.

⁶ Diese Figur spielt die zentrale Rolle bei *einem* Beweis des ersten Strahlensatzes. Will man diesen im vorliegenden Zusammenhang behandeln, so kann man ihn auf

b) mit veränderter Höhe:



(funktioniert auch bei verkleinerter Höhe)

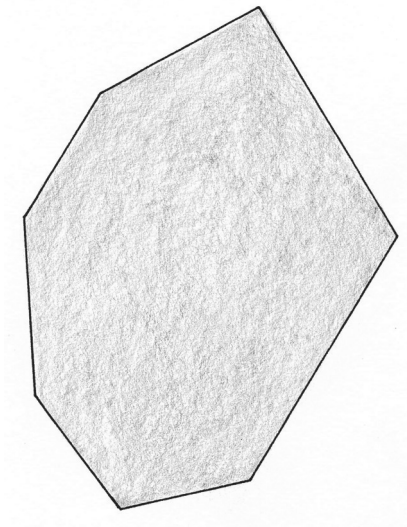


AC schneidet die neue Höhenparallele in C' ; die Parallele zu BC' durch C schneidet AB in B' ; $\triangle AB'C'$ ist das gesuchte Dreieck.

Begründung: analog zu derjenigen in a).

(2) Verwandlung eines gegebenen Vielecks

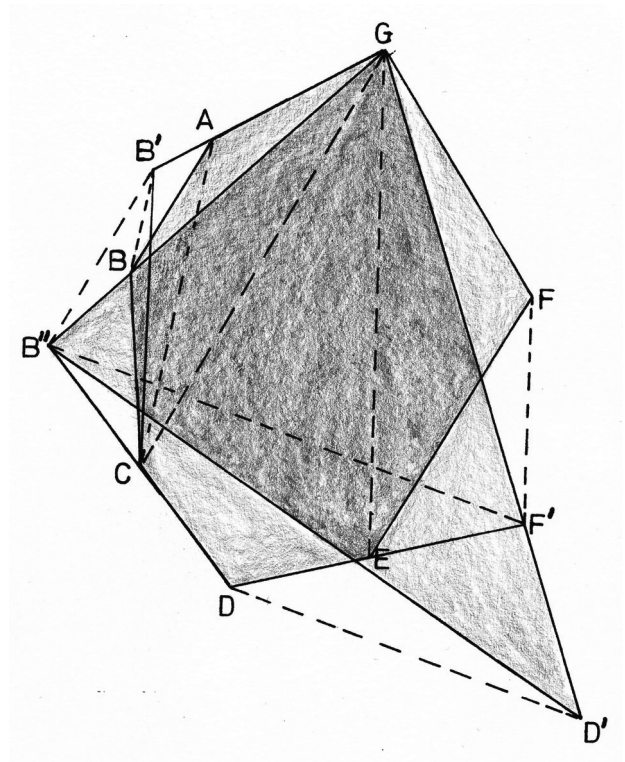
a) in ein flächeninhaltsgleiches Dreieck:



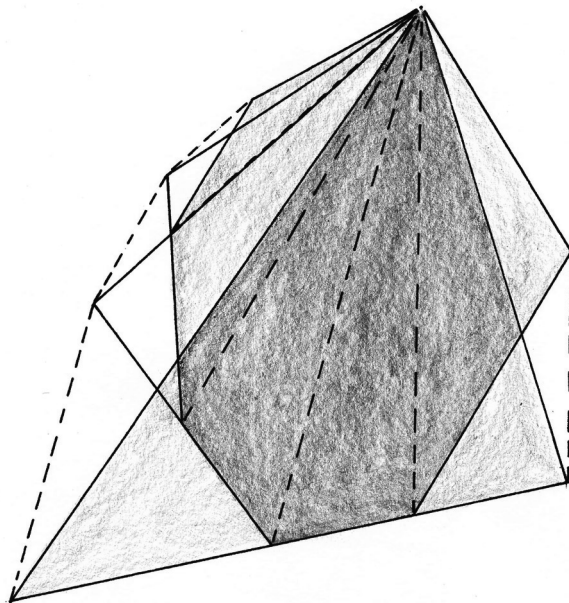
diese Weise den Schülern leicht einsichtig machen.

Lösungsbeispiele

Verwandlung I
(siehe S. 40)



Verwandlung II



Lösungsbeispiel I (siehe S. 39):

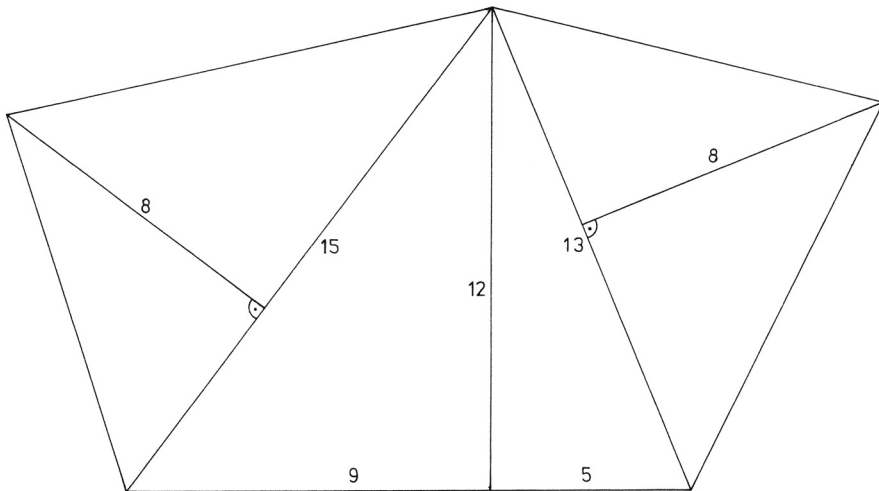
- $\triangle CAB$ wird zu $\triangle CAB'$
- $\triangle GEF$ wird zu $\triangle GEF'$
- $\triangle CGB'$ wird zu $\triangle CGB''$
- $\triangle F'B''D$ wird zu $\triangle F'B''D'$

Also erhalten wir als Lösungsdreieck $\triangle GB''D'$. Entsprechend ergeben sich andere Lösungsmöglichkeiten.

**b) Verwandlung eines gegebenen Vielecks in das flächeninhalts-
gleiche Quadrat *mit dem Ziel der Inhaltsbestimmung*:**

Verwandle das gegebene Fünfeck in das flächeninhaltsgleiche Quadrat und bestimme auf diese Weise den Fünfecksinhalt.

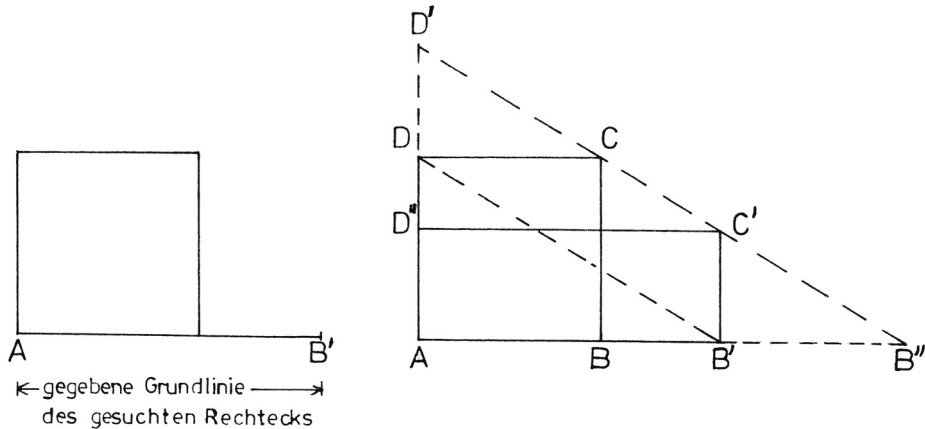
(Ergebnis: $A = 196 \text{ cm}^2$. Diese Aufgabe geht auf eine Anregung von A. Bernhard zurück, die Zahlenangaben sind nur für die Leser gedacht!)



Interessant, aber nicht so einfach zu behandeln sind konkave Vielecke. Eine Erweiterung des Begriffs „Vieleck“ auf konkave Figuren scheint aber wünschenswert. Sie befreit aus zu engen Vorstellungen. Dies wird besonders wichtig im Zusammenhang mit projektiver Geometrie.

(3) Beispiele für Rechtecksverwandlungen:

a) Verwandlung eines gegebenen Quadrates in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck mit gegebener Grundlinie:⁷



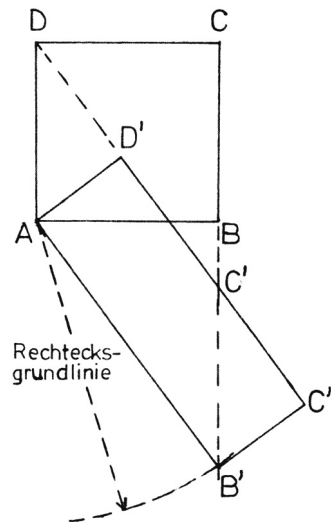
Lösung 1:

- ABCD wird zu $B'B''CD$
- $B'B''CD$ wird zu $B'C'D'D$
- $B'C'D'D$ wird zu $B'C'D''A$

Lösung 2:

- ABCD wird zu $AB'C'D$
- $AB'C'D$ wird zu $AB'C''D'$

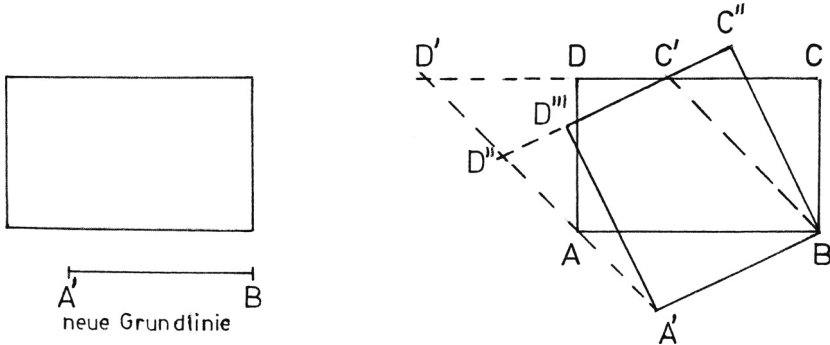
Man beachte aber b)!



⁷Man kann selbstverständlich auch von einem Rechteck ausgehen. Siehe auch unten „Ergänzungsparallelogramme“. Siehe auch das auf Kopfrecheneinheit 4 Folgende; dort werden der Höhen- und der Kathetensatz im Zusammenhang mit dem Scherungsprinzip aufgegriffen; das oben Dargestellte findet dort also eine weitere Anwendung bzw. Lösung.

b) Verwandlung eines gegebenen Rechtecks in ein flächeninhaltsgleiches mit beliebiger gegebener Grundlinie:

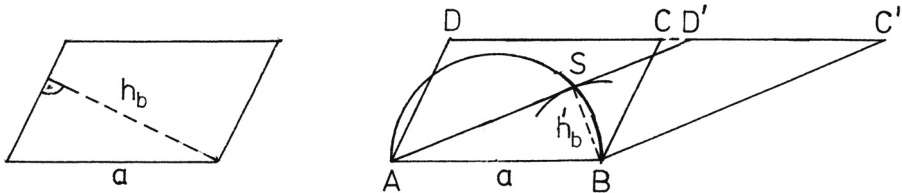
Man beachte, dass Weg 2 aus a) nicht gelingt, wenn $\overline{AB'} < \overline{AB}$ und $\overline{AB'} < \overline{BC}$ ist. Bei dem folgenden Lösungsweg tritt kein Problem auf:



- Lösung:
- lege die neue Grundlinie $\overline{A'B}$ schräg zu $\overline{AB}$
 - $A'A$ schneidet DC in D' , die Parallele zu $A'A$ durch B schneidet DC in C'
 - also wird $ABCD$ zu $ABC'D'$
 - die Parallele zu $A'B$ durch C' schneidet AD' in D''
 - also wird $ABC'D'$ zu $A'BC'D''$
 - $A'BC'D''$ wird nun zu $A'BC''D'''$

(4) Beispiele für nicht-triviale Parallelogrammverwandlungen

a) Verwandlung eines gegebenen Parallelogramms in ein flächeninhaltsgleiches mit gleicher Seite a und neuer Höhe h'_b :



Sei vorläufig: $h'_b < a$!
neue Höhe h'_b

Lösung:

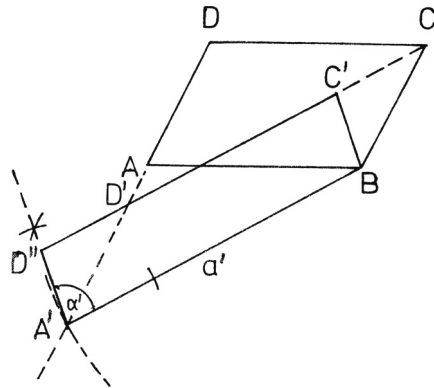
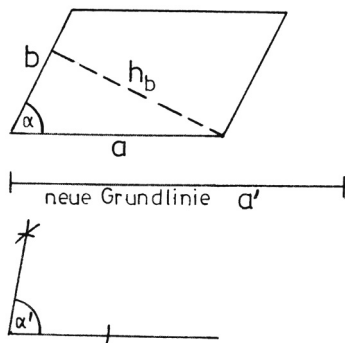
- Kreis um B mit h'_b schneidet Thaleskreis über $\overline{AB}$ in S
- AS schneidet DC in D' , die Parallele zu AS durch B schneidet DC in C'
- also wird $ABCD$ zu $ABC'D'$.

Man beachte: für $h'_b = a$ ergibt sich ein Rechteck als Lösung,
für $h'_b > a$ ergibt sich keine Lösung.

Diese Fragestellung benötigt, wie man sieht, den Thalesatz, und ist insofern geeignet, diesen über eine bloße Mitteilung hinaus zu wiederholen. Solch einen Einschub kann man gut in den Übstunden machen; auch der allgemeinere Peripheriewinkelsatz und der Zentriwinkelsatz lassen sich an solcher Stelle in Erinnerung rufen.

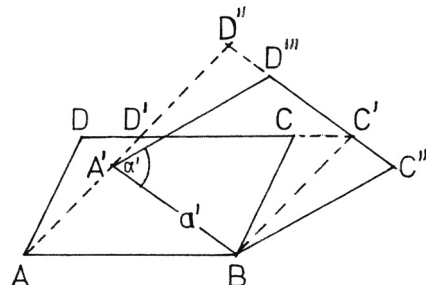
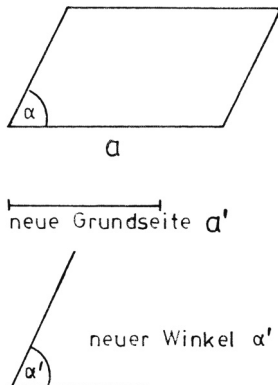
b) Verwandlung eines gegebenen Parallelogramms in ein flächeninhaltsgleiches mit neuer Grundseite a' und neuem Winkel α' :

Fall 1: $a' \geq h_b$



- Lösung:
- Kreis mit a' um B schneidet AD unten in A'
 - Parallele zu $A'B$ durch C schneidet AD in D'
 - also wird $ABCD$ zu $A'BCD'$
 - trage α' in A' an $A'B$ nach oben an; der Schenkel schneidet CD' in D''
 - die Parallele zu $A'D''$ durch B schneidet CD' in C'
 - also wird $A'BCD'$ zu $A'BC'D''$.

Fall 2: $a' < h_b$

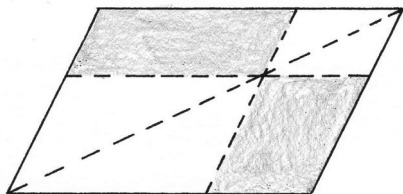


- Lösung:
- lege neue Grundlinie $\overline{A'B}$ schräg zu $\overline{AB}$
 - AA' schneidet DC in D' , die Parallele zu AA' durch B schneidet DC in C'
 - also wird $ABCD$ zu $ABC'D'$
 - die Parallele zu $A'B$ durch C' schneidet AA' in D''
 - also wird $ABC'D'$ zu $A'BC'D''$
 - trage α' in A' an $A'B$ nach oben an; der Schenkel schneidet $C'D''$ in D'''
 - die Parallele zu $A'D'''$ durch B schneidet $C'D''$ in C''
 - also wird $A'BC'D''$ zu $A'BC''D'''$.

Man findet Material hierzu in *H.v. Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen*, *A. Bernhard: Geometrie für 7. und 8. Klasse an Woldorfschulen* und in alten Schulbüchern, insbesondere in *Reidt-Wolff: Elemente der Mathematik, Mittelstufe Bd. 2, Hannover 1954*⁵. In den Bereich der Figurenverwandlungen gehören auch die so genannten

Ergänzungsparallelogramme

Ziehe durch einen beliebigen Punkt der einen Diagonale eines Parallelogramms die Parallelen zu den Seiten. Auf diese Weise entstehen vier Unter-Parallelogramme. Vergleiche den Flächeninhalt derjenigen beiden Unter-Parallelogramme, die von der Diagonale nicht geschnitten werden. Diese „Ergänzungsparallelogramme“ sind inhaltsgleich. (Warum ?)



„Gnomonfigur“

Hiermit lässt sich zum Beispiel die folgende Aufgabe lösen: Verwandle ein gegebenes Parallelogramm (unter Beibehaltung des Winkels) in ein inhaltsgleiches mit veränderter Grundseite.

Die Anwendung auf einen Spezialfall (Höhensatz) findet man auf der nächsten Seite dargestellt. In *A. Bernhard: Geometrie für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen* findet man eine ausführliche Darstellung dieses Themas.

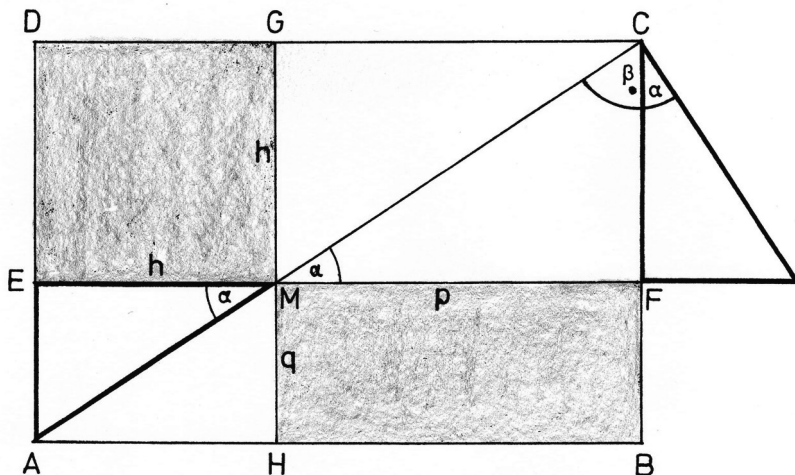
Nun wird man wegen des statischen Flächeninhaltsvergleichs, der hier vorliegt, diese Ergänzungsparallelogramme als zusätzliche Möglichkeit, flächeninhaltsgleiche Figuren zu erkennen oder zu erzeugen, besprechen

oder entwickeln lassen. Natürlich kann man die Gnomonfigur „in Bewegung bringen“, indem man den Punkt auf der Diagonale wandern lässt. Der eigentliche Bewegungsaspekt kommt allerdings durch die Scherung hinein. Hiermit lässt sich nach meiner Auffassung das folgende *Orientierungsmotiv* ausmachen:

Das In-Bewegung-Bringen starrer Figuren durch Scherung scheint ein gutes Gegengewicht zu bilden gegenüber dem mehr technischen Charakter des Berechnens ebener und räumlicher Figuren. Es fordert ein bewegliches Vorstellen und ermöglicht dem Schüler einen leichten Einstieg in die Betrachtungsweisen der projektiven Geometrie, wie sie z. B. in A. Bernhard: *Projektive Geometrie, Stuttgart 1984*, entwickelt werden.

Zu bemerken ist noch, dass bei der späteren Behandlung der Stereometrie die Scherung auf den Raum übertragen wird, um das Prinzip von Cavalieri sinnvoll anwenden zu können. Daher sollte man die Scherung in der Planimetrie nicht zu oberflächlich erarbeiten.

Verwandlung eines Quadrates in ein Rechteck mit vorgegebener Seite



- Zeichne das Quadrat $EMGD$ mit der Seite h
- zeichne die vorgegebene Rechteckseite $\overline{MF} = p$
- ergänze zur „Gnomonfigur“
- $HBFM$ ist das gesuchte Rechteck.

Die beiden Dreiecke AEM und MFC können an der Seite $\overline{EM} = h = \overline{CF}$ zu einem großen *rechtwinkligen* Dreieck zusammengefügt werden. Wir können auch umgekehrt ein rechtwinkliges Dreieck entlang der Höhe durchschneiden und die Teile in eine Gnomonfigur einpassen. So erhalten wir den

Höhensatz des Euklid

$$\underline{\underline{h^2 = p \cdot q}}$$

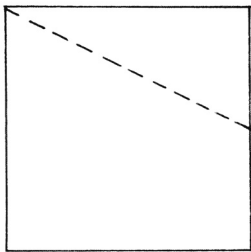
Zurück zur Unterrichtsstunde

Außer der „Beackerung“ der Scherungsprobleme können die Schüler bei Bedarf die noch an der Tafel stehende Lösung der Hausaufgabe 3 notieren. Während dieser Phase fertigt der Lehrer an der Tafel in langsamen Schritten Beispiele aufeinanderfolgender Scherungen einer Figur an, ohne unbedingt Lösungen der gestellten Aufgaben vorwegzunehmen. Die Scherungsprobleme sind zugleich Hausaufgabe.

3. Stunde

Kopfrecheneinheit 2 (mit Vorstellungsübungen)

Quadratzahlen und Quadratwurzeln; nach einigem Rechnen kann man die Merktafel ergänzen (Siehe die 2. Stunde).

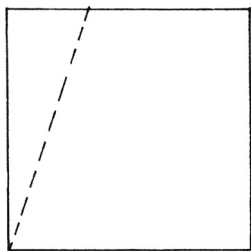


Figur 1

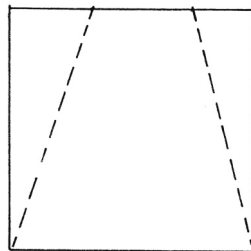
Im-Kopf-Berechnen von Flächeninhalten, die durch Zerschneiden eines Quadrates entstehen:

Wir stellen uns ein Quadrat vor, dessen Grundseite waagerecht liegt. Nun denken wir uns eine gerade Linie von der linken oberen Ecke zur Mitte* der rechten Seite. Was für Figuren entstehen? Wie groß ist der Inhalt der unten übrigbleibenden Fläche, wenn wir die obere abschneiden? Wie groß ist sein Anteil an der Quadratfläche?

Es folgen einige weitere, schließlich auch kompliziertere Fragestellungen, wobei immer das einmal aufgebaute Vorstellungsbild eine Zeitlang benutzt wird, oben* z. B. zum oberen Drittelungs-, Viertelungspunkt usw. Dann gibt man auch für die jeweiligen Grundquadrate die Seitenlängen an und lässt schwierigere Restflächen berechnen. Dazu stellt man Figur 1 „auf die Seite“



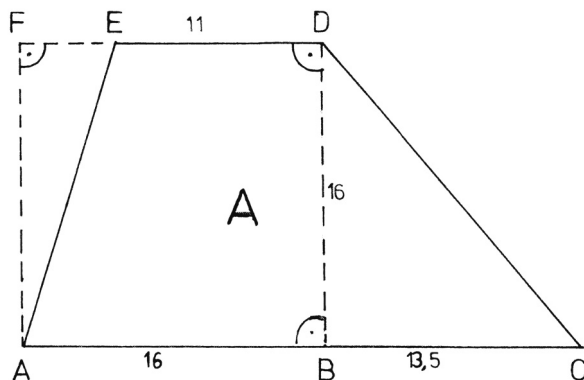
Figur 2



Figur 3

(Figur 2) und schneidet nun auch auf der anderen Seite ein Dreieck ab (Figur 3). Ein weiterer Schritt ist der, statt des Quadrates ein Rechteck zu nehmen, usw.; man muss sehen, wie weit die Zeit fortgeschritten ist.

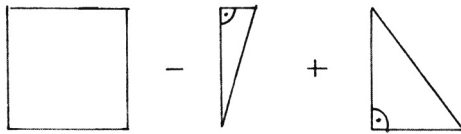
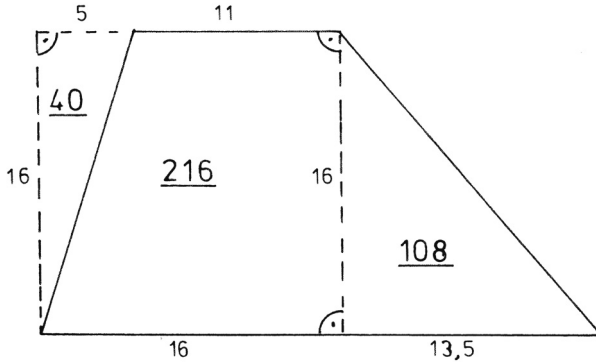
Der Lehrer zeichnet schließlich ein solches Trapez mit linker und rechter Ergänzungsfläche an die Tafel und entwickelt bzw. wiederholt im Gespräch mit den Schülern die Flächeninhaltsformel(n) für das Trapez. Dies könnte etwa wie folgt ablaufen:



Flächeninhalt A ?

Aufgrund der in den beiden vorhergehenden Unterrichtsstunden erarbeiteten Voraussetzungen lässt sich im Klassengespräch sehr schnell ein Lösungsweg entwickeln, meistens auch mehrere, die auch alle wenigstens prinzipiell an der Tafel skizziert werden sollten. Das folgende Tafelbild zeigt einen der Wege und eine Möglichkeit, seine Darstellung für sich sprechen zu lassen, und zwar orientiert am Niveau eines schwachen Schülers.

Lösung



$$A_{\text{a}} = a^2$$

$$A_{\text{h}} = \frac{g \cdot h}{2}$$

$$16^2 - \frac{5 \cdot 16^2}{2} + \frac{13,5 \cdot 16^2}{2}$$

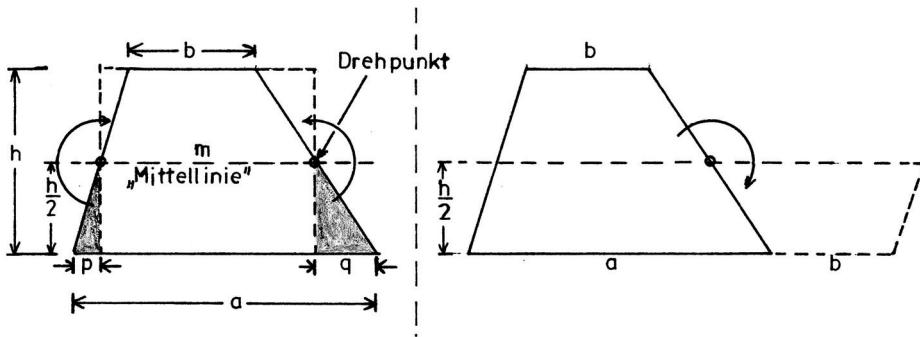
$$A = 256 - 40 + 108$$

$$\underline{\underline{A = 324}}$$

Dieses Tafelbild bleibt bis zur nächsten Stunde stehen.

Was den *Umgang mit den Einheiten* betrifft (siehe auch S. 36), so verabrede ich im vorliegenden Fall mit den Schülern, dass man sich nicht auf eine bestimmte Längeneinheit festlegt, und bemerke, dass die Flächenmaßzahl eine andere Qualität hat als die Längenmaßzahl. Selbstverständlich kann man auch durchgängig die jeweiligen Einheiten dazuschreiben; dies scheint mir allerdings innerhalb von Neben- und Zwischenrechnungen zu aufwendig und unangebracht. Das Vermischen von beidem innerhalb einer Gleichungskette, z. B. „ $\frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$ “ darf aber keinesfalls geschehen; es untergräbt das Verständnis des Gleichheitszeichens.

Auf diese Weise kommt es zur Entwicklung oder Begründung der Flächeninhaltsformel für das Trapez. *Beide* Betrachtungsweisen sollten berücksichtigt werden:



Einerseits ist $m = a - p - q$,
 andererseits $m = b + p + q$.
 Zweimal die Mittellinie ist daher:
 $2m = a - p - q + b + p + q = a + b$,

also $m = \frac{a + b}{2}$.

Damit haben wir

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Da der Flächeninhalt eines
 Parallelogramms Grundlinie
 mal Höhe ist, ergibt sich:

$$A_{\text{Trapez}} = (a + b) \cdot \frac{h}{2}$$

Den Schülern sind nun verschiedene Ansätze geläufig, um Inhalte verschiedener geradlinig begrenzter Flächen mit Hilfe von Zerlegung oder vorheriger Scherung oder Formeln zu berechnen. Nun wird das Aufgabenblatt 1⁸ verteilt, das die Schüler bearbeiten, sobald sie das soeben entwickelte Tafelbild in ihre Hefte übertragen haben. Eine *Mindestzahl* dieser Aufgaben soll zur nächsten Stunde bearbeitet sein. Dies bewirkt eine automatische Binnendifferenzierung, sofern die Schüler diesen Modus gewohnt sind. Die meisten Schüler lernen im Laufe des Umgangs mit solchen Aufgabenblättern, ihre eigenen Fähigkeiten in etwa richtig einzuschätzen, und suchen sich meistens die geeigneten Aufgaben aus. Ansonsten ist etwas Zuspruch nötig, z. B. bei zu geringem Selbstvertrauen oder großer Bequemlichkeit. Günstig ist auch die zusätzliche Empfehlung: „Diese ... sind leicht; diese ... sind etwas schwerer; und diese ... sind zum Knobeln, für Spezialisten.“ Vorher wurde noch gefragt, wer eine Lösung je einer der Scherungsaufgaben an die Tafel zeichnen möchte. (Man wird selten enttäuscht, es ist einfach zu spannend.) Der Lehrer zeichnet vorm Ende der Stunde eine „Pythagoras-Figur“ an die Tafel.

⁸S. 51 und 52. Beide Aufgabenblätter passen gut auf ein DIN-A4-Blatt.

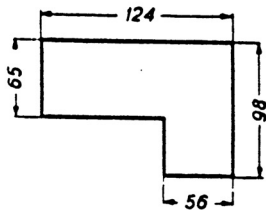
Einige Bemerkungen zum Aufgabenblatt 1 (siehe S. 51 und 52):

- a) Es bietet sich an, schon hier, eventuell als Vorwegnahme der stereometrischen Betrachtungen, die Dichte (oder man identifiziert in einer 9. Klasse noch Dichte mit dem spezifischen Gewicht) ins Spiel zu bringen, siehe etwa die Aufgaben 23 und 24. Oft fehlt die Vorstellung vom Gewicht verschiedener Stoffe: „Wie schwer ist denn dieser Eisenklotz? Oder dieses Holzbrett?“ usw. Solche lebenspraktischen Vorstellungen und Berechnungen, wie auch die anderen auf dem Blatt vorkommenden, sicher zu beherrschen, geben dem jungen Menschen in diesem schwierigen Alter das Gefühl, sich in der „realen Welt“ auszukennen und zurechtzufinden, was ihre Bedürfnislage auch trifft. Siehe auch unten unter Kopfrecheneinheit 6, S. 71.
- b) Selbstentwickelte Aufgaben sind sicherlich wünschenswert. Ansonsten bieten die zahlreichen käuflichen Aufgabensammlungen vielfältige Wahlmöglichkeiten. Die Aufgaben dieses Blattes stammen aus *Kusch: Mathematik Bd. 2, Geometrie, Cornelsen Verlag, Essen 1974, S. 110–111*. Sie stießen bisher bei meinen Schülern auf Interesse und treffen die Bedürfnisse des 8. und 9. Schuljahres.⁹ –

⁹Ich möchte bemerken, dass ich den darlegenden Teilen der Bände 3 und 4 von Kusch sehr reserviert gegenüberstehe, die Bücher aber als Aufgabensammlungen gern nutze.

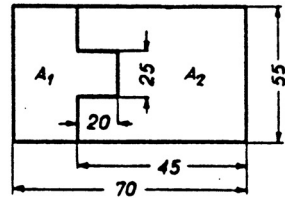
Aufgabenblatt 1a

8.

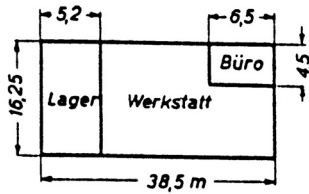


Berechne U in cm
 A in cm^2

9.

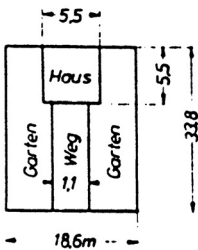


Berechne A_1 in cm^2
 A_2 in cm^2



10. Berechne Werkstatt, Lager, Büro in m^2

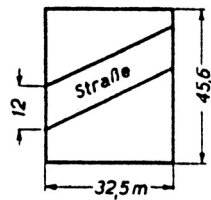
11.



Berechne

1. das ganze Grundstück,
2. das Gartenhaus,
3. den Weg,
4. den Garten,

12.



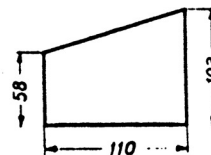
Berechne

1. das ganze Grundstück,
2. den Verlust durch die Straße,
3. den Rest des Grundstückes,

13. Berechne die fehlenden Größen eines rechtwinkligen Dreiecks:

	a	b	A
1.	2 m	1,5 m	
2.	3,6 m	2,75 m	
3.	6,24 m		15,6 m^2
4.		3,97 m	7,98 m^2

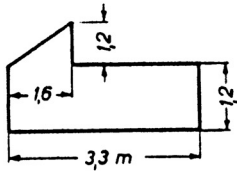
14.



Berechne A in cm^2 .

Aufgabenblatt 1b

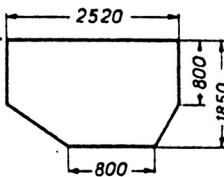
15.

Berechne A in m^2

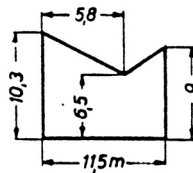
16. Berechne die fehlenden Größen eines Trapezes:

A	a	c	h
	5,25 m	3,6 m	4,6 m
	8,7 m	6,5 m	5,25 m
8,75 cm^2	40 cm	30 cm	
3240 cm^2	75 cm	60 cm	
0,86 m^2		0,95 m	0,8 m
3,815 m^2	2,5 m		1,75 m

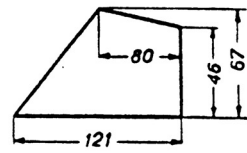
17.

Berechne A in m^2

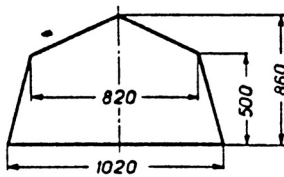
18.

Berechne A in m^2

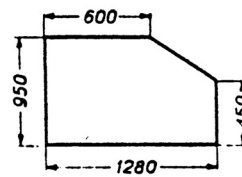
19.

Berechne A in cm^2

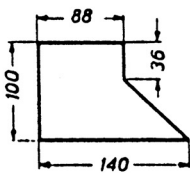
20.

Berechne A in cm^2

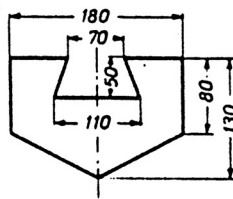
21.

Berechne A in m^2

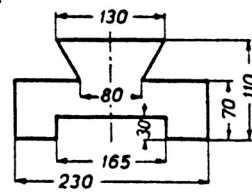
22.

Berechne A in cm^2

23.

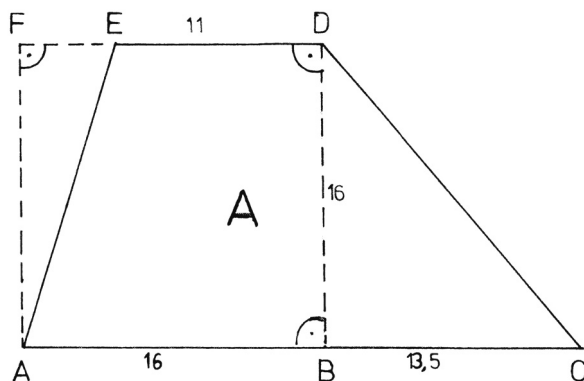
Berechne
 A von 12 Blechen in m^2

24.

Berechne
 A von 25 Blechen in m^2

Der bisherige Unterrichtsgang wird auf S. 57 fortgesetzt. Ich gebe im Folgenden einen anstelle des Bisherigen verwendbaren **alternativen Epochen-Einstieg** mit Hauptunterrichtsstunden in sehr ausführlicher Darstellung.

Er beginnt mit dem Kopfrechen-Teil der 2. Stunde (Kopfrecheneinheit 1) auf S. 34. Dann wird die Tafel umgeschlagen, und es wird die folgende Figur sichtbar:



Flächeninhalt A ?

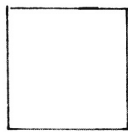
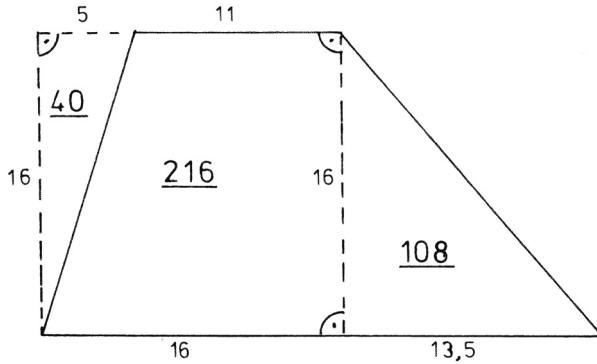
Je nach Stimmung oder Bedürfnis wird man eine kurze Erläuterung geben (Gartenstück hinterm Haus) oder die Fragestellung für sich sprechen lassen. Ich neige in der gegebenen Situation zu letzterem. An den Antworten lassen sich nun Vorkenntnisse der Klasse erkennen, denn zumindest einzelne Schüler werden sich erinnern. Es kommen natürlich auch Gegenfragen, z. B. wie lang denn FE sei oder wie lang FA, oder wozu $\triangle EFA$ gut sei, wo es doch gar nichts mit der fraglichen Fläche zu tun habe. Man wird diese Fragen an die Klasse weitergeben und beantworten lassen. Die Antworten auf die Fragestellung schreibt der Lehrer an die Tafel, evtl. ist die richtige (324) gleich dabei. Die Antwort auf die Frage „wie kommst Du darauf?“ wäre nun sehr aufschlussreich. Oder es kommt keine Antwort. Dann kann man nach Lösungsideen fragen. Egal, welche kommen, sie werden im Klassengespräch aufgegriffen und mit (wenig) Einhilfe des Lehrers (sokratische Methode!) zur Lösung geführt, wie im Folgenden gezeigt wird.

- (1) Kommen keine Vorschläge, so kann man fragen, ob man nicht wenigstens einen Teil des Flächeninhalts angeben könne.

Hier ergibt sich schnell der Sinn des Quadrats $ABDF$, von dem man leicht das Dreieck AEF abtrennen kann. Auch das Dreieck BCD wird

schnell bewältigt, so dass sich der gesuchte Flächeninhalt synthetisch ergibt. Hierfür wird man, spätestens im Stillarbeitsteil, eine geeignete Lösungsfigur an die Tafel zeichnen, was für die schwachen Schüler eine Hilfe darstellt. (Abzeichnen nur, wer möchte.) Ein mögliches Tafelbild hierzu ist auf der folgenden Seite angegeben.

Lösung: (Tafel)



-



+



$$A_{\text{a} \square} = a^2$$

$$A_{\text{h} \triangle} = \frac{g \cdot h}{2}$$

$$16^2 - \frac{5 \cdot 16^8}{2_1} + \frac{13,5 \cdot 16^8}{2_1}$$

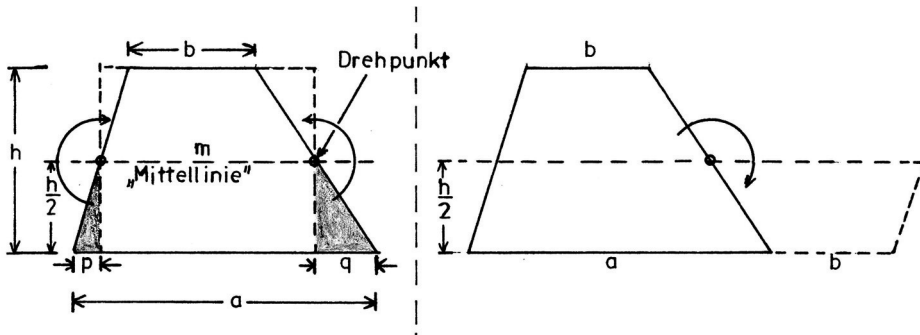
$$A = 256 - 40 + 108$$

$$\underline{\underline{A = 324}}$$

(Dieses Tafelbild bleibt bis zur nächsten Stunde stehen.) Zur Angabe der Einheiten siehe die Seiten 36 und 48.

- (2) Oft kommen Vorschläge, die in die Richtung des in (1) Dargestellten gehen.
- (3) Vielleicht nennt jemand sogar die Flächeninhaltsformel für ein Trapez. Diese lässt man sich an der Tafel erläutern, und dann fragt man nach der Begründung. Weiter s.u.
- (4) Und selbst wenn nicht, so kann man, auch hinter dem laut (1) oder (2) Getanen, die Frage nach dem Namen für die in Rede stehende Figur stellen und die Schüler weiter nach Einfällen suchen lassen.

Letztendlich kommen immer Ideen, die mit „Abschneiden und wieder Dransetzen“ zu tun haben. Man sollte zunächst immer viele Vorschläge sammeln, sie kladdenartig an der Tafel notieren oder notieren lassen. Auf diese Weise kommt es zur Entwicklung oder, wenn bereits genannt, siehe (3), zur Begründung der Flächeninhaltsformel. *Beide* Entwicklungen sollten berücksichtigt werden:



Einerseits ist $m = a - p - q$,

andererseits $m = b + p + q$.

Zweimal die Mittellinie ist daher:

$$2m = a - p - q + b + p + q = a + b,$$

also $m = \frac{a+b}{2}$. Damit haben wir

Da der Flächeninhalt eines Parallelogramms Grundlinie mal Höhe ist, ergibt sich:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$A_{\text{Trapez}} = (a + b) \cdot \frac{h}{2}$$

Sollte jedoch die Scherung von Dreiecken als Lösungshinweis fallen, so kann man sehr zufrieden sein, diese sofort aufgreifen und an schwierigen Scherungsproblemen vertiefend behandeln (siehe unten). Oft ist aber nicht mehr allgemein gegenwärtig, weshalb der Parallelogramm-Flächeninhalt sich wie oben ergibt; in diesem Falle muss man das Parallelogramm a) durch Scherung, b) durch „Abschneiden und Dranflicken“ in ein Rechteck verwandeln. Dies lässt sich sehr kurz bewältigen. Mögliche Übungsaufgaben, die Sicherheit in der Berechnung von Inhalten geradlinig begrenzter Flächen geben, zeigt Aufgabenblatt 1 (S. 50 bis 52). Es fallen weitere Besprechungsthemen an:

- 1) Die Klärung der Frage, was man eigentlich unter dem Inhalt einer vorliegenden Fläche versteht, wohl unterschieden von der Fläche selbst mit ihrer Form-Qualität, auch mit ihrer physischen Qualität wie Rauigkeit usw.
- 2) Die Umrechnung von Längen- und Flächenmaßen.

Hierauf komme ich weiter unten zurück. **In der nächsten Stunde** kann

man die Kopfrechenübungen mit der Vorstellung von Flächeninhalten verbinden:

Ein Quadrat hat die Seite $a = 14$. Wie groß ist sein Flächeninhalt A ? Verschiedene andere Quadrate folgen. Man wiederholt so also die Quadratzahlen. Dann fährt man fort mit Rechtecken. Ein Rechteck hat die Grundseite $g = 14$ und die Höhe $h = 15$. Wie groß ist A ? Weitere Rechtecke folgen, danach Parallelogramme. Hier sollte man kopfrechend verweilen und die Möglichkeit nutzen, zu besprechen, wie aus einem Parallelogramm zunächst ein flächengleiches Rechteck gemacht werden kann: Die Schüler äußern sich und tun damit kund, ob „Dranflicken“ oder Scheren geläufig ist, und man greift beides sofort auf, indem man an der Tafel klare Skizzen anfertigt. Man bespricht, warum Scherung *beim Parallelogramm* den Flächeninhalt nicht verändern kann („ich könnte ja bei jedem Parallelogramm abschneiden und dranflicken“), skizziert dies kurz (evtl. vorbereitete Tafelzeichnungen) und geht zu Dreiecken über, an denen durch Ergänzbarkeit zum Parallelogramm sofort das Entsprechende offenbar wird. Auf diese Weise werden die Flächeninhaltsformeln, die oft nur noch mechanisch hergebetet werden können, wieder verständlich.

Jetzt bietet sich das Bearbeiten von Scherungsproblemen an. Hierzu hat der Lehrer ein Tafelbild vorgefertigt. An der Tafel befindet sich ein Quadrat, das in ein *beliebiges* Rechteck mit gleichem Flächeninhalt verwandelt werden soll. Im nächsten Schritt kann man fordern: Verwandle das Quadrat in ein Rechteck mit vorgegebener Grundlinie, s.S. 41 f.

Hier soll man die Schüler veranlassen, Einfälle, auch erste Überlegungen, an der Tafel vorführend auszuprobieren. Im Gespräch wird nach und nach eine Lösung offenbar. Es passiert auch durchaus, dass mehrere Schüler unterschiedliche Lösungen sofort präsentieren können.

Jedenfalls werden alle verschiedenen Schülerlösungen an der Tafel dokumentiert und vom Lehrer, falls notwendig, durch die geeigneten Ergänzungen transparent gemacht, z. B. durch eine Folge von Situationszeichnungen. Der Lehrer kann auch eine weitere Lösungsvariante ergänzen, aber unspektakulär und nur gleichwertig mit den Schülerlösungen. Außerdem stellt er später weitere freiwillig zu bearbeitende Scherungsaufgaben.

Dann kann eine Phase der Fixierung des Erarbeiteten folgen. Sofern diese Stunde allerdings an die vorher beschriebene anknüpft, kann man die bereits gerechneten, evtl. als Hausarbeit gegebenen Aufgaben von Aufgabenblatt 1 herausholen lassen, Ergebnisse der ersten Aufgaben vergleichen und Fragen und Probleme klären, dann aber, herumgehend und

helfend, das Blatt weiter still bearbeiten lassen.¹⁰ Das Tafelbild mit den Scherungen bleibt bis zur nächsten Stunde stehen.

In der nächsten Stunde greift man das Kopfrechnen mit Flächeninhalten wieder auf und erweitert die Fragestellungen auf Trapeze: Ein Trapez ist entstanden aus einem Quadrat, an das ein rechtwinkliges Dreieck angefügt wurde. Es hat nun die Unterkante 16, die Oberkante 12 (die parallel sind). Wie groß ist sein Flächeninhalt? Es folgen weitere Problemstellungen dieser Art. Im Hauptteil wird man Aufgaben des Aufgabenblattes 1 besprechen und danach weiter still bearbeiten lassen, evtl. greift man schon die Scherungsprobleme auf. Der Lehrer zeichnet vorm Ende der Stunde eine „Pythagoras-Figur“ an die Tafel.

Diesen alternativen Unterrichtsgang setzt man nun mit den im Folgenden auch für den anderen Einstieg beschriebenen Stunden fort.

4. Stunde

Kopfrecheneinheit 3

Die Quadratzahlen werden wiederholend geübt. Dabei ist die Merktafel (siehe S. 34) verdeckt. Auch Quadratwurzeln werden bestimmt, diese auch „ungefähr“: Zwischen welchen Zahlen liegt $\sqrt{185}$? Zwischen 13 und 14. Rechne vor! $13^2 = 169$ und $14^2 = 196$. usw. Schließlich folgt die Addition von Quadratzahlen. In der letzten Stunde hat der Lehrer eine „Pythagoras-Figur“ an die Tafel gezeichnet und kann nun hierzu eine Verbindung herstellen mit der Frage: Was hat das (Addieren von Quadratzahlen) mit dem Bild an der Tafel zu tun? Die Klärung dieser Frage leitet über zu Kopfrechen-Aufgaben der folgenden Art, wozu die Merktafel wieder zur Ablesung freigegeben wird: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete 12 cm lang, die andere 5 cm lang. Wie lang ist die Hypotenuse? usw.

Man lässt nach jeder Antwort ausführlich mündlich vorrechnen, damit auch die Schüler, die Schwierigkeiten mit dem Vorstellen haben, den Rechenweg nachvollziehen können.

Zunächst wird man dabei die pythagoreischen Zahlentripel bemühen, auch nach solchen suchen lassen, was die Merktafel ermöglicht. Danach kann man auch eine Kathete und die Hypotenuse geben und die zweite Kathete suchen lassen, aber dann ausgedehnt auf beliebig vorgegebene Zahlen und damit im Ergebnis auf „ungefähre“ Quadratwurzeln. Auf

¹⁰Siehe S. 31, Bemerkung zum „Stillarbeitsteil“; ebenso S. 58

diese Weise hat man, über die Wiederholung des Satzes von Pythagoras hinaus, bereits die Berechnung der Umfänge von Figuren, in denen auch „schräg“ verlaufende Seiten vorkommen, vorbereitet. Diese Möglichkeit wird mit den Schülern an dieser Stelle schon ausblickartig besprochen.

Man kann die Inhalte des eben beschriebenen Kopfrechen-Teils auch auf mehrere Tage verteilen; eine Vertiefung des Erübten muss ja ohnehin geschehen.

Nun können die in der vorigen Stunde (im alternativen Unterrichtsgang: in der vorletzten Stunde) angezeichneten Lösungen einiger Scherungsaufgaben durchgesprochen werden. Der Lehrer zieht sich in eine der hinteren Reihen zurück und überlässt es den Schülern, ihre Lösungen zu begründen. Die Mitschüler fragen bei Bedarf.

Hier muss erst eine Hemmschwelle überwunden werden, die durch die „Pflege“ solcher Situationen mit der Zeit niedriger wird. Eventuell stellt der Lehrer hier und da, wenn der Schüler-Vortrag zu zäh wird, eine „dumme“ Zwischenfrage, auch damit schwächere Schüler die Lösung wirklich verstehen. Diese Phase wird nach zwei bis drei Aufgabenlösungen beendet.

Man geht nun über zur Besprechung einiger Hausaufgaben von Aufgabenblatt 1. Z. B. vergleicht man kurz die Ergebnisse von 8. bis 12. und spricht 17. detailliert durch; von letzterer kann dann eine „Musterlösung“ an der Tafel angefertigt werden.¹¹ Dann arbeiten die Schüler still an den Problemstellungen des Aufgabenblattes 1 und an den eventuell verbliebenen Scherungsproblemen weiter und übertragen die Tafelanschriften *nach eigener Wahl* ins Heft. Auf diese Weise kommt man einerseits von der Stereotypie des kollektiven Abschreibens ab, andererseits kommt kein Schüler in die Verlegenheit, etwas für ihn Selbstverständliches überflüssigerweise abschreiben zu müssen. Wer es braucht, wird es abschreiben! Während dieser *Stillarbeit* geht der Lehrer herum, lässt sich das zu heute Getane zeigen, gibt Hilfen und Tips und beseitigt auf diesem Wege einzelne Unklarheiten. (Auch manch persönliches Wort ist im Einzelfall nötig.) Die Hausaufgabe besteht darin, an den Fragestellungen des Aufgabenblattes 1 und an den Scherungsproblemen weiterzuarbeiten. Mit dem Berechnen der Umfänge darf auch begonnen werden. Der Lehrer kann während des Herumgehens die Aufgaben individuell für einzelne

¹¹ Günstig ist es auch, im Stillarbeitsteil Lösungen der Aufgaben ausliegen zu haben, so dass jeder Schüler sich vergewissern kann. Dadurch erübrigt sich meistens ein zeitraubender Ergebnisvergleich.

Schüler ausdehnen oder einschränken:

- „Bearbeite diese ... Aufgaben; und wenn Du bei diesen ... Aufgaben nicht klarkommst, nimm diese ...!“
- „Wenn Du willst, beschränke Dich auf die Umfangsberechnungen aber dann all diese ... Aufgaben.“
- „Wenn Du diese ... schwereren Aufgaben löst, lasse ruhig diese ... leichteren weg.“

Eine solche Binnendifferenzierung kann sich äußerst günstig auf die Lernmotivation auswirken:

- Der junge Mensch fühlt sich seinem Vermögen gemäß eingeschätzt, das seiner Möglichkeiten mindestens Angemessene (und mehr) zu leisten.¹²
- Er fühlt sich als Individuum wahrgenommen und spürt: Dieser Erwachsene hat Interesse an mir, ihm geht es um *mich*.

Nicht zuletzt darin liegt die große Bedeutung und Chance des Stillarbeitsteils, der deshalb auch nicht zu kurz geraten darf. Die bis hierhin recht ausführlich beschriebene Unterrichtsfolge mag meine Vorgehensweise verdeutlicht haben, zumindest für den Fall, dass man das Kopfrechnen als Einstieg in den Hauptteil nimmt.

Übrigens halte ich es für durchaus angebracht, dass der Schüler bei gutem Arbeitstempo mindestens den allergrößten Teil der anfallenden Arbeiten im Stillarbeitsteil fertigstellt und auch fertigstellen kann. Er soll einerseits keinen Leerlauf haben, und andererseits interessante weiterführende Problemstellungen zur Verfügung gestellt bekommen.

Sucht man einen den beschriebenen Stunden gemeinsamen Aufbau, so kann man diesen angenähert wie folgt schematisieren:

¹²In *diesem* Sinne kann die Waldorfschule eine „Leistungsschule“ sein.

Schema des hier verwendeten Stundenaufbaus

1. Teil: 10–20 Minuten	(Sprachübungen, Rezitation) Kopfrechnen Vorstellungübungen Anknüpfung an Gestriges	„Rhythmi- scher Teil“	starke Führung des Lehrers
..... <i>evt. nahtloser Übergang</i>			
2. Teil:	Weiterführung und Vertiefung der gestrigen Inhalte Entwicklung von Neuem	„Haupt- teil“	Fragendes Entwickeln („sokratische Methode“), Klassengespräch mit Schülerdarstellung
<i>deutlicher Einschnitt</i>			
3. Teil: mindestens 30 Min	ggf. Hefteintrag Selbständiges Bearbeiten von Problemstellungen, auch von Neuem, das am nächsten Tag aufgegriffen und ggf. verallgemeinert wird.	„Stillar- beitsteil“	Eigentätigkeit des Schülers, evtl. von Schülergruppen, Gegenseitige Hilfe <i>Ein unerläßlicher Teil der Stunde!</i>

Ein grundsätzliches Festhalten an diesem Stundenaufbau wirkt erfahrungsgemäß harmonisierend auf den Schüler einer 9. Klasse. Dies gilt auch noch für das 10. Schuljahr. In höheren Klassen kann es sich aufgrund der jeweiligen Unterrichtsinhalte und -methoden als zweckmäßig erweisen, hiervon stark abzuweichen. Man merkt bei genauem Wahrnehmen der Befindlichkeit der Klasse nach kurzer Zeit, ob der praktizierte Stundenaufbau angemessen ist. An dieser Stelle sei hingewiesen auf die *methodischen Angaben zur Stundeneinteilung*, wie sie *Rudolf Steiner* im 3. Vortrag des Zyklus des sog. „Ergänzungskurses“ macht.¹³ Der dort angeregte und menschenkundlich begründete Aufbau gilt im Kern für alle Hauptunterrichtsfächer. Hinweise zur *Funktion des „rhythmischen Teils“* und des sog. „*Methodenwechsels*“ innerhalb der Unterrichtsstunde finden sich indirekt, aber sehr aufschlußreich in R. Steiner, *Meditativ*

¹³R. Steiner: *Menschenkenntnis und Unterrichtsgestaltung*, GA 302, Dornach 1978⁴, S. 46 unten - S. 49 oben

erarbeitete Menschenkunde, 4. Vortrag, S. 58 ff (in: „Erziehung und Unterricht aus Menschenerkenntnis“, GA 302a, Dornach 1977). Dort spricht Steiner unter anderem über die therapeutische Wirkung der einzelnen Unterrichtsfächer und Maßnahmen, z. B. das „Erreichen des sich Hineinsetzens des Ich in die menschliche Organisation“ und die „Vermeidung zu starken Aufgesogenwerdens des Ich von der übrigen Organisation“. Ebenfalls in GA 302a befindet sich u.a. der für die Oberstufenarbeit, insbesondere für den Umschwung von der Mittel- in die Oberstufe, wichtige Vortrag „Erziehungsfragen im Reifealter“. Im Folgenden will ich den weiteren Unterrichtsgang mehr summarisch beschreiben und nicht jede Abfolge detailliert angeben.

Kopfrecheneinheiten, in die Hauptteile des Unterrichts überleitend – zugleich eine Angabe weiterer Unterrichtsinhalte

Kopfrecheneinheit 4: *Rechtwinklige Dreiecke*

Das Aufgreifen des Berechnens der dritten Seite eines rechtwinkligen Dreiecks aus zwei bekannten Seiten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras (siehe Kopfrecheneinheit 3). Dies kann einmünden in einige der folgenden fünf Themen:

(1) Das Wiederholen des schriftlichen Wurzelziehens¹⁴

a) Zur Technik des schriftlichen Wurzelziehens

Man darf eigentlich erwarten, dass es im 8. Schuljahr gründlich behandelt wurde. Es ist allerdings den meisten Schülern im 9. Schuljahr nicht mehr gegenwärtig und muss wieder wachgerufen werden. Das hier gemeinte Verfahren und seine Begründung ist, didaktisch aufbereitet, dargestellt in *A. Bernhard: Geometrie für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen* und *E. Bindel: Die Arithmetik*. Wurde dieses bereits in der Mittelstufe behandelt, so führt der Lehrer eine Radizierung vor, wobei er die Schüler fragend einbezieht. Er lässt diese dann von den Schülern wiederholen und notiert das Rechenschema als Rezept an der Tafel. Dies wird von den schwächeren Schülern nicht nur dankbar aufgenommen, sondern ist für sie auch meistens wichtig für die erfolgreiche Anwendung des Verfahrens ohne Hilfestellung.

Die Begründung des Verfahrens kann zu einem späteren Zeitpunkt gegeben werden. Sie ist auch notwendig, denn der Oberstufenschüler

¹⁴siehe auch die in der Ausarbeitung von Fr. Hartmann auf der S. 148 und ab S. 155 angegebenen Verfahren

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{\square\square|\square\square|\square\square|\square 1} = \square\square 09 \\
 \square\square \\
 \hline
 \square\square \\
 \square\square \\
 \hline
 \square\square\square 1 : \square\square 09 \\
 \square\square\square 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

- Weiter ist dann die Zehnerziffer der letzten Restzahl eine 8 (weil $9 \cdot 9 = 81$ ist):

$$\begin{array}{r}
 \square\square\square 81 \\
 \square\square\square 81 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

- die Tausenderziffer der Ergebniszahl muss mindestens 4 betragen, da sonst das Quadrat nicht zweistellig wäre; da der erste Divisor zweistellig sein muss, kann jene nicht größer als 4 sein; dann ist die Zehnerziffer des Divisors 8.
- Da die erste Restzahl einschließlich Übertrag 2-stellig ist, muss die Hunderterziffer der Ergebniszahl 1 sein; daher ergibt sich bisher:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{16|\square\square|\square\square|81} = 4109 \\
 16 \\
 \hline
 \square\square : 81 \\
 \square\square \\
 \hline
 \square\square\square 81 : \square\square 09 \\
 \square\square\square 81 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

- Also ergibt sich für den zweiten Divisor: 8209, woraus sich der letzte Subtrahend zu 73881 ergibt.
- Zurückrechnend erhalten wir daher:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{16|88|38|81} = 4109 \\
 16 \\
 \hline
 88 : 81 \\
 81 \\
 \hline
 7\ 38\ 81 : 8209 \\
 7\ 38\ 81 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

(2) Das Beweisen der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe des Scherungsprinzips

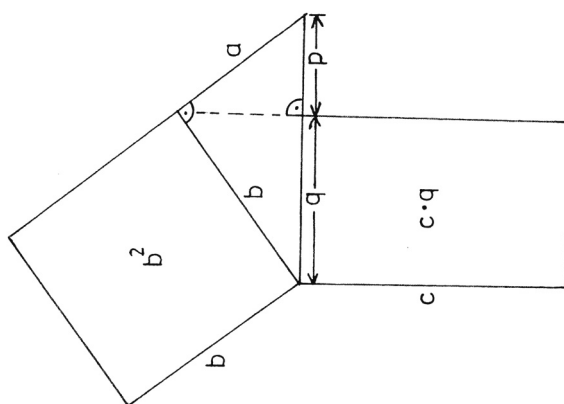
Diese Beweise sollte man von den Schülern im Klassengespräch entwickeln lassen. An dieser Stelle wird sichtbar, ob der Umgang mit Scherungen als sichere Fähigkeit zur Verfügung steht.

Das Erlebnis, hiermit solche inhaltsreichen und wirklich nutzbringenden mathematischen Sätze beweisen zu können und das obendrein aus eigener Kraft, kann das Vertrauen in das eigene Denken fördern und damit zur Selbst-Sicherheit in diesem diesbezüglich schwierigen Alter beitragen.

Zur Zeitersparnis oder für den häuslichen Nachvollzug sind Arbeitsbögen nach Art der beiden folgenden Blätter 65 und 66 zweckmäßig, siehe auch S. 45. Vergleiche das am Ende der Einleitung Gesagte, S. 28. Eventuell werden die sonstigen historischen Beweise ergänzt; häufig sprechen ja die zugehörigen Beweisfiguren für sich. Es bietet sich auch an, geeignete Erzählungen einzufügen. Viel Material findet man in *H.v. Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen*, *A. Bernhard: Geometrie für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen* und *G. Ott: Geometrie für Klassenlehrer der 6., 7. und 8. Klassen* und in Büchern zur Entwicklungsgeschichte der Mathematik.

Der Kathetensatz (Arbeitsbogen 1)

Beweis: durch aufeinanderfolgende Scherungen 1) und 2):



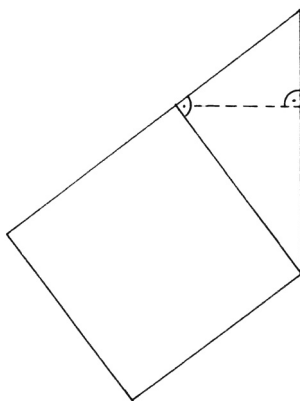
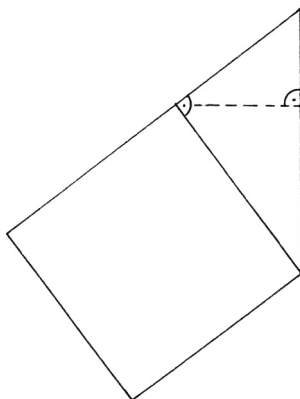
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck, das aus der Hypotenuse und dem an der Kathete liegenden Hypotenusenabschnitt gebildet wird:

$$b^2 = c \cdot q$$

$$\text{bzw. } a^2 = c \cdot p$$

1)

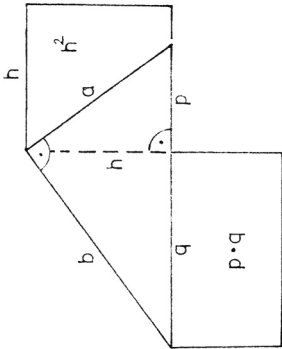
2)



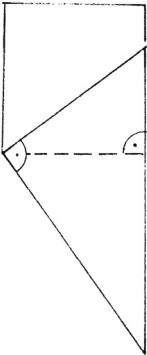
Der Höhensatz des Euklid (Arbeitsbogen 2)

Beweis: durch aufeinanderfolgende Scherungen 1) bis 3):

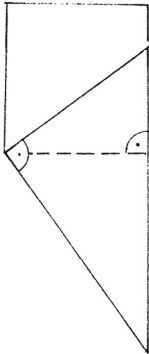
1)



2)



3)



Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächeneinhaltsgleich dem Rechteck, das aus den beiden Hypotenusenabschnitten gebildet wird:

$$h^2 = p \cdot q$$

(3) Die Besprechung des Zusammenhangs aufeinanderfolgender Quadratzahlen¹⁵

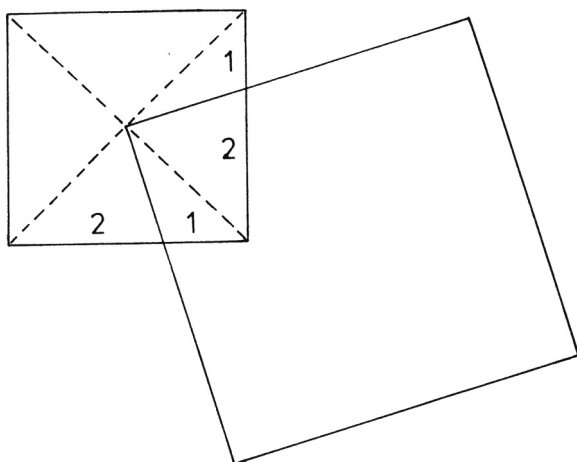
Gemeint ist: Die Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen ist eine ungerade Zahl. Mehr noch: Die Folge der Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen ist die Folge der ungeraden Zahlen.

Das Nachrechnen ermöglicht das Wiederholen der binomischen Formeln *aus der Sache heraus*:

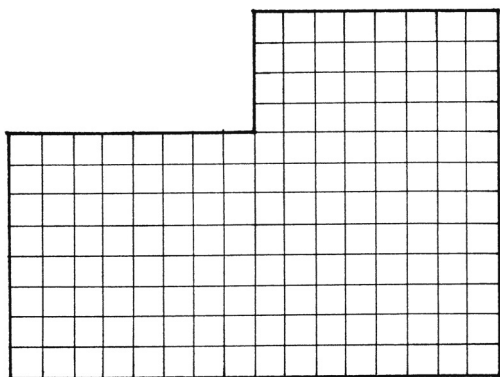
$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1.\end{aligned}$$

Ich halte solche Einschübe nicht nur für interessant im Sinne einer Auflockerung, sondern für zweckmäßig zum Erzeugen von Fülle und um Wichtiges „so ganz nebenbei“ einfließen zu lassen. Aber auch Harmloseres, wie auf der folgenden Seite 68, macht Freude und übt das „Sehen“.

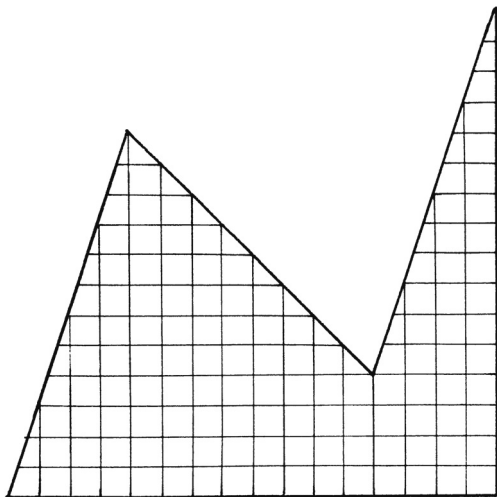
¹⁵ siehe auch den Beitrag von Fr. Hartmann in diesem Buch, dort S. 145.



Wie groß ist die den beiden Quadraten gemeinsame Fläche?



Man teile die Fläche in zwei spiegelbildlich gleiche mit Hilfe dreier gerader Linien.

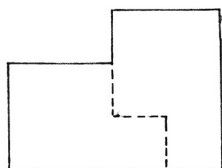


Man teile die Fläche in zwei deckungsgleiche Teilflächen ein.

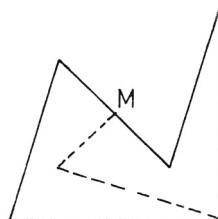
Lösungen

1) Solange sich der Eckpunkt des großen Quadrates im Mittelpunkt des kleinen befindet, beträgt der gemeinsame Teil immer $\frac{1}{4}$ der Fläche des kleinen Quadrates.

2)



3)



Aus: *Pierre Berloquin: Mathematische Kopfspiele, München 1983*

(4) Die Untersuchung des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks

Einzelne Schritte:

- Berechne seine Hypotenuse
- Fasse sie als Seite eines Quadrates auf.
- Dieses ist „doppelt so groß wie“ das aus den gleichen Schenkeln des rechtwinkligen Dreiecks gebildete Quadrat.

Hierzu führt die Fragestellung Platons an Menon (im „Menon“) in einer tendenziell auch im Unterricht zu behandelnden Weise (Daher die Bezeichnung: „Sokratische Methode“). Ja, man kann sogar diesen Dialog Platon-Menon gemeinsam lesen. Die Schüler haben durchaus Freude daran. Auch hier empfiehlt es sich, historischen Erzählstoff bereitzuhalten.

(5) Die Untersuchung des gleichseitigen Dreiecks

Einzelne Schritte:

- Zerlege es in zwei rechtwinklige Dreiecke.
- Die unbekannte Kathete lässt sich berechnen; sie ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks.
- Berechne hiermit seinen Flächeninhalt.

Das hier und im vorangehenden Abschnitt Angedeutete wird später bei der Kreisberechnung verwendet, taucht aber auch in vielen anderen Zusammenhängen wieder auf. Wenn man es für günstig hält, kann man die Kreisberechnung sogar an dieser Stelle beginnen.

Kopfrecheneinheit 5

Die Berechnung größerer Quadratzahlen im Kopf mit Hilfe der binomischen Formeln, je eine Formel pro Tag; dazu währenddessen Tafelanschrieb eines Beispiels; vielfältiges Üben dessen im Kopf. Z. B.:

$$63^2 = (60 + 3)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 3 + 3^2 = 3969$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Am anderen Tag:

$$58^2 = (60 - 2)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 2 + 2^2 = 3364$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

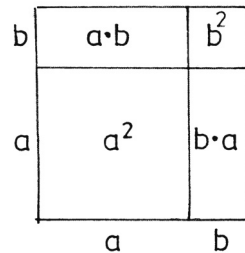
Nebenbei wird hiermit die Quadratzahlentabelle auf der Merktafel ergänzt. Und schließlich kann man als Ergänzung folgende Rechnungen üben:

$$43 \cdot 37 = (40 + 3) \cdot (40 - 3) = 40^2 - 3^2 = 1591$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Auf diese Weise bleiben den Schülern die binomischen Formeln und ihre Anwendung nach einiger Zeit dauerhaft im Gedächtnis.

Alle drei binomischen Formeln können nach einigen Tagen noch zusätzlich bildlich so dargestellt werden, dass die Summanden die Bedeutung von Flächeninhalten bekommen. Als Beispiel der bildlichen Darstellung sei hier die erste binomische Formel genommen.



Hierbei ist zu berücksichtigen, dass Zweier-Produkte von Zahlen und Flächeninhalte von unterschiedlicher Qualität sind. Man wird das im Unterricht ansprechen müssen oder hat es schon getan. Allerdings verhelfen diese als Veranschaulichung der binomischen Formeln gemeinten Figuren manchen schwächeren Schüler zu einem besseren Verständnis. – Man denke auch an das Problem „ $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ “, das sogar in höheren Klassen des öfteren auftaucht und durch die Figur offensichtlicher, eindringlicher widerlegt wird als durch das Ausmultiplizieren von $(a + b) \cdot (a + b)$.

Kopfrecheneinheit 6

Das Berechnen von Flächeninhalten, auch von Restflächen.

Dabei kann man gut an Vorstellungsübungen anknüpfen. (Siehe etwa die 3. Stunde.) Man kann dann übergehen zu wechselnden Längen- und Flächeneinheiten. Dies kann einmünden in:

(1) Das Umrechnen von Längen- und Flächeneinheiten

Hierzu fertigt man eine Umrechnungstabelle an. Auch die Einheiten „Ar“ und „Hektar“ sollen verwendet werden. Inhalte von landwirtschaftlichen und sonstigen Grundstücksflächen werden berechnet. Auch wird von Flächeninhalt und Form des Grundstücks ausgegangen, um die möglichen Seitenlängen auszurechnen.

Viele Schüler können sich die Ausmaße von realen Flächenstücken mit gegebener Quadratmeterzahl/Hektarzahl nur schwer vorstellen; hier ergibt sich ein weiteres, notwendiges Übungsfeld auch für weitere Kopfrechen-Teile.

Der folgende Arbeitsbogen 3, der für die ganze Klasse gedacht ist, und der Arbeitsbogen 4, der 12 verschiedene Aufgabensätze umfasst, die jeweils in geeigneter Weise im Sinne einer „Binnendifferenzierung“ (siehe auch S. 62) an die einzelnen Schüler verteilt werden, „trainieren“ geradezu das Umrechnen von Flächeneinheiten und erzeugen die erwünschte Sicherheit.

(2) Die Besprechung/Wiederholung von Masse, Gewicht, Dichte usw.

Sie steht im Zusammenhang mit Aufgaben wie 23. und 24. von Aufgabenblatt 1 (S. 52). Es gehen hier also Volumina von Quadern in die Betrachtung ein. Wer kann, mag anhand unregelmäßiger Körper (Steine, Eisengewicht usw.) mit Hilfe von Überlaufgefäß und Tafelwaage die oben genannten Begriffe verdeutlichen; die Wirkung ist sehr erfreulich!

Umrechnung von Flächeneinheiten (Arbeitsbogen 3)

→ Siehe unsere Tabelle!

1.	350 mm ² =	cm ²	36.	346,5 a =	dm ²
2.	150 mm ² =	cm ²	37.	1,095 a =	dm ²
3.	1537 mm ² =	cm ²	38.	0,156 ha =	dm ²
4.	3,56 dm ² =	cm ²	39.	13,674 ha =	dm ²
5.	153 dm ² =	cm ²	40.	0,05 km ² =	dm ²
6.	0,56 dm ² =	cm ²	41.	1,009 km ² =	dm ²
7.	3,526 m ² =	cm ²			
8.	0,0291 m ² =	cm ²			
9.	3,00 m ² =	cm ²			
10.	0,001 25 a =	cm ²			
11.	1,562 m ² =	cm ²			
12.	17,25 dm ² =	cm ²		<u>noch</u> ein Beispiel	
13.	1567,8 mm ² =	m ²		21700000000	mm ²
14.	36 700 mm ² =	m ²		= 217000000,00	cm ²
15.	1765 mm ² =	m ²		= 2170000,0000	dm ²
16.	1567,6 cm ² =	m ²		= 21700,000000	m ²
17.	98 765 cm ² =	m ²		= 217,00000000	a
18.	1565 cm ² =	m ²		= 2,17	ha
19.	354,3 dm ² =	m ²		= 0,0217	km ²
20.	3670 dm ² =	m ²			
21.	136 dm ² =	m ²			
22.	15,67 a =	m ²			
23.	3,68 ha =	m ²			
24.	0,027 km ² =	m ²			
25.	3987,4 m ² =	ha			
26.	3650 m ² =	ha			
27.	1675,62 m ² =	ha			
28.	0,789 km ² =	ha			
29.	1,764 km ² =	ha			
30.	15,684 km ² =	ha			
31.	10,374 a =	ha			
32.	1376 a =	ha			
33.	9,806 a =	ha			
34.	3156,4 m ² =	dm ²			
35.	15 000 m ² =	dm ²			

Arbeitsbogen 4a

315 mm ² =	cm ²	88 700 mm ² =	m ²
2508 mm ² =	cm ²	1425 mm ² =	m ²
44,7 dm ² =	cm ²	147,5 cm ² =	m ²
0,774 dm ² =	cm ²	60 560 cm ² =	m ²
2,721 m ² =	cm ²	4560 dm ² =	m ²
0,086 m ² =	cm ²	0,85 dm ² =	m ²
1,34 a =	cm ²	14,7 a =	m ²
0,045 a =	cm ²	22 700 a =	m ²
15,6 m ² =	cm ²	0,135 ha =	m ²
4,5 cm ² =	cm ²	2,76 ha =	m ²
0,56 ha =	cm ²	0,076 km ² =	m ²
0,027 km ² =	cm ²	14 km ² =	m ²
0,58 km ² =	cm ²	8,75 km ² =	ha
1,76 km ² =	ha	156 m ² =	cm ²
8,875 km ² =	a	8,7 a =	cm ²
0,15 ha =	a	66,56 m ² =	cm ²
270,8 ha =	a	0,05 a =	cm ²
0,0076 ha =	dm ²	7,93 dm ² =	cm ²
7,786 a =	m ²	1,7 dm ² =	cm ²
0,658 m ² =	dm ²	88,9 ha =	m ²
0,0001 km ² =	dm ²	0,75 ha =	m ²
13,507 m ² =	mm ²	6,58 a =	m ²
145 dm ² =	mm ²	13 a =	m ²
13,8 cm ² =	mm ²	150,7 a =	ha
0,756 dm ² =	cm ²	3337 ha =	a
3,85 m ² =	dm ²	27,5 ha =	a
7,6 ha =	m ²	127 653 dm ² =	a
22,85 ha =	m ²	276,5 ha =	dm ²
9800 ha =	km ²	0,65 a =	dm ²
14 760 ha =	km ²	2257,6 m ² =	km ²
44 760 mm ² =	cm ²	1 476 561 m ² =	km ²
1 776 544 mm ² =	cm ²	16,7 cm ² =	mm ²
8795,8 mm ² =	dm ²	2,654 cm ² =	mm ²
13,75 km ² =	ha	0,07 cm ² =	dm ²
4,767 km ² =	ha	38 517 cm ² =	dm ²
127 km ² =	a	217 653 cm ² =	m ²
2766 m ² =	a	3929 cm ² =	m ²
2766 m ² =	ha	2,701 km ² =	m ²
13 776 dm ² =	m ²	0,0567 km ² =	mm ²

Arbeitsblatt 4b

732 km ² =	ha	142,61 mm ² =	cm ²
5,13 km ² =	ha	4478 mm ² =	m ²
33,76 a =	ha	227 228 mm ² =	m ²
2,58 a =	ha	14,7 a =	m ²
0,0036 a =	km ²	3,9 a =	m ²
37 500 a =	km ²	19 ha =	m ²
22 777 000 m ² =	km ²	8,6 ha =	m ²
1043 m ² =	km ²	125 ha =	a
980 ha =	km ²	25,6 ha =	a
4,78 ha =	km ²	21,5 m ² =	dm ²
9999 mm ² =	dm ²	0,76 m ² =	dm ²
14 786 mm ² =	dm ²	225,6 cm ² =	dm ²
223,4 mm ² =	cm ²	33,75 cm ² =	dm ²
7785 cm ² =	mm ²	4444 mm ² =	cm ²
864,45 cm ² =	mm ²	273 896 mm ² =	m ²
2763 cm ² =	m ²	14 005 mm ² =	m ²
1 273 456 cm ² =	m ²	15,6 a =	m ²
237 dm ² =	m ²	3,45 a =	m ²
21,7 dm ² =	m ²	2,7 ha =	m ²
49,86 dm ² =	cm ²	14,8 ha =	m ²
0,0513 dm ² =	cm ²	33 ha =	a
0,000 51 dm ² =	mm ²	2170 ha =	a
6,82 dm ² =	mm ²	16 m ² =	dm ²
0,0071 km ² =	m ²	1,76 m ² =	dm ²
2,56 km ² =	m ²	2276 cm ² =	dm ²
0,000 256 km ² =	mm ²	43,567 cm ² =	dm ²
8875 cm ² =	mm ²	237 km ² =	ha
445,86 cm ² =	mm ²	6,14 km ² =	ha
33 950 cm ² =	m ²	44,15 a =	ha
200 240 cm ² =	m ²	6,67 a =	ha
21,7 dm ² =	m ²	0,0048 a =	km ²
417 dm ² =	m ²	477 469 a =	km ²
0,056 dm ² =	cm ²	22 528 715 m ² =	km ²
95,8 dm ² =	cm ²	16 217 m ² =	km ²
0,0059 dm ² =	mm ²	891 ha =	km ²
20,681 dm ² =	mm ²	7,42 ha =	km ²
700,276 51 km ² =	m ²	8848 mm ² =	dm ²
14,7 km ² =	m ²	13 270 mm ² =	dm ²
0,000 76 km ² =	mm ²	432,5 mm ² =	cm ²

Kopfrecheneinheit 7

Umfänge von Figuren. Nach und nach kann man zu schwierigeren Figuren (mit einer „Schrägen“) übergehen. Die Quadratzahltablelle auf der Merktafel darf benutzt werden. Es folgen: Zaunlängen von Grundstücken, Längen von Fußleisten in Wohnräumen. Dies kann einmünden in:

(1) Umfangsberechnungen unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras

Hierfür gut geeignet sind Figuren wie die auf Aufgabenblatt 1 vorkommenden. Man kann nach Vorschlägen der Schüler die Lösungen erarbeiten und musterhaft an der Tafel darstellen. Entsprechende Textaufgaben sind ebenfalls empfehlenswert und in den üblichen Aufgabensammlungen und Schulbüchern reichlich vorhanden. Einige solche befinden sich auf den folgenden Seiten. Hier fließt notwendigerweise, besonders in Aufgabe 3), S. 77, das in Kopfrecheneinheit 4, (4) und (5) auf S. 69, Erarbeitete in die Lösung ein.

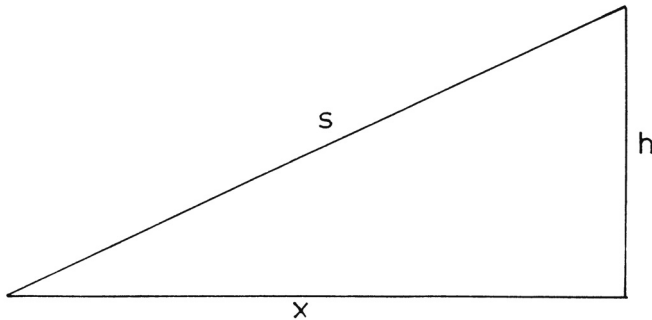
In diesen Zusammenhängen stellt sich die Frage:

Auf wie viele Stellen genau muss man rechnen, wenn man sich an der *Sachlage* orientiert (gemessene Größen, Messungenauigkeit usw.)? In der 9. Klasse verabrede ich: Es ist sinnlos, in einem Ergebnis mehr Ziffern zu haben, als diejenigen Zahlen an (sicheren) Ziffern besitzen, die in die Rechnung eingehen. (Höchstens 1 Ziffer mehr berechnen wegen des Rundens.) Im 10. Schuljahr stelle ich im Zusammenhang mit Feldmessen/Trigonometrie/logarithmischen Berechnungen genauere Betrachtungen an. Sehr anregend ist in diesem Zusammenhang im Kapitel 30 die Seiten 224–232 des Buches „Arithmetik und Algebra“ von Louis Locher-Ernst, Dornach 1984, das unter anderem wegen seiner fachlich und didaktisch vertiefenden Begriffsbildung als Fundgrube und Nachschlagewerk zu betrachten ist.

Vorbemerkung: Die folgenden Aufgaben haben noch nicht die Form von Arbeitsblättern.

1. Die steilste Zahnradbahn der Welt fährt auf dem Pilatus (Schweiz). Auf einem Streckenabschnitt von s überwindet sie gleichmäßig einen Höhenunterschied von h . Wie lang erscheint dieser Streckenabschnitt auf einer Karte im Maßstab 1:25000?

a) $s = 1130 \text{ m}$ b) 2150 m c) $10\,232 \text{ m}$
 $h = 489 \text{ m}$ 650 m 123 m



a) Es ist

$$\begin{aligned} x^2 &= 1130^2 - 489^2 \\ &= 1276900 - 239121 \\ &= 1037779 \end{aligned}$$

also

$$x \approx 1018,71 \text{ m}$$

Auf der Karte:

$$\begin{aligned} &1018,71 \text{ m} \cdot \frac{4}{100.000} \\ &= 0,010\,187\,1 \text{ m} \cdot 4 \\ &= 0,040\,748\,4 \text{ m} \\ &\approx \underline{4,07 \text{ cm}} \end{aligned}$$

b) Sei $s = 2150 \text{ m}$, $h = 650 \text{ m}$

$$\begin{aligned} x^2 &= 4622500 - 422500 \\ x^2 &= 4200000 \\ x &= 2049,39 \end{aligned}$$

Auf der Karte:

$$\underline{8,2 \text{ cm}} \quad (8,197)$$

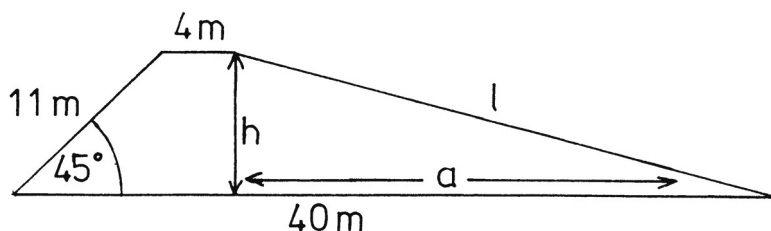
c) Sei $s = 10\,232 \text{ m}$, $h = 123 \text{ m}$

$$\begin{aligned} x^2 &\approx 104690000 - 15129 \\ x^2 &\approx 104670000 \\ x &\approx 10231,26 \end{aligned}$$

Auf der Karte:

$$\underline{40,93 \text{ cm}} \quad (40,925)$$

2. Der Querschnitt eines Küstendeiches sieht aus wie in der Zeichnung dargestellt. Berechne die Höhe h und die Länge l der dem Meer zugekehrten Böschung.



$$\text{Es ist } 11^2 = 2h^2$$

$$60,5 = h^2$$

$$h \approx 7,78$$

$$\text{mit } a = 40 - 7,78 - 4$$

$$= 28,22$$

$$\text{folgt: } l^2 = h^2 + a^2$$

$$= 7,78^2 + 28,22^2$$

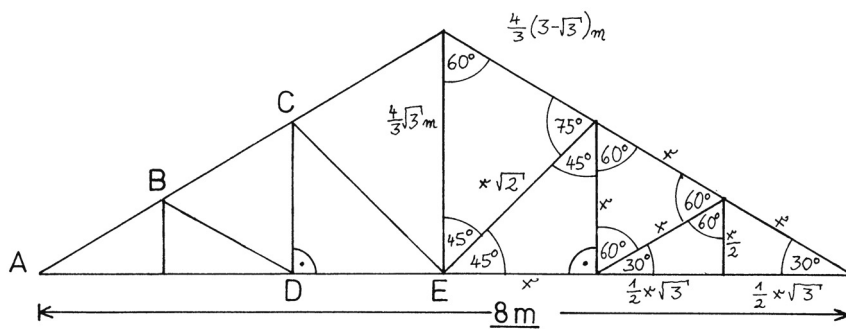
$$= 60,5 + 796,37$$

$$= 856,87$$

$$\text{und damit } l \approx 29,27 \text{ m}$$

Antworttext!

3. In dem in der Zeichnung dargestellten symmetrischen Fachwerkträger ist das Dreieck BCD gleichseitig und die Dreiecke ABD und CDE gleichschenkelig. Berechne alle Winkel und Stäbe, wenn die Gesamtbreite 8 m beträgt. (Anleitung: Drücke die Breite durch die beiden symmetrischen senkrechten Stützen aus)



Lösung:

$$8 = 2x\sqrt{3} + 2x$$

$$4 = x\sqrt{3} + x$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3} + 1} \approx 1,464$$

$$x\sqrt{2} \approx 2,07$$

$$(x\sqrt{3} \approx 2,54)$$

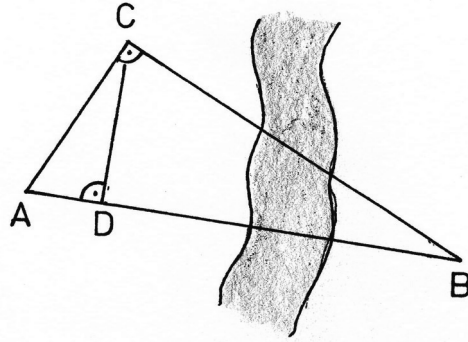
Antwortsatz!

4. Bestimme nach nebenstehender Figur die Entfernung eines unzugänglichen Punktes B von A durch Messung der Strecken AC und AD. Erläutere das Verfahren.

$$\overline{AC} = 64 \text{ m (36 m)}$$

$$\overline{AD} = 28,8 \text{ m (18 m)}$$

$$\begin{aligned} \text{Es muss } \frac{AC}{AD} &= \frac{AB}{AC} \text{ sein :} \\ \frac{64}{28,8} &= \frac{AB}{64} \\ \overline{AB} &= \frac{64^2}{28,8} \\ &\approx 142,22 \\ &\quad (72 \text{ m}) \end{aligned}$$



(2) Die Kreisausmessung

Auf die ausführliche Darstellung möglicher Vorgehensweisen soll hier wegen der bereits vorliegenden Arbeiten zu diesem Thema verzichtet werden. In *E. Bindel: Die Arithmetik* findet sich, ansatzweise didaktisch aufbereitet und um historisches Material ergänzt, ein empfehlenswerter Weg. Auch in *H.v. Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen* steht reichhaltiges Material zur Verfügung. Beide Autoren beziehen sich im Kern auf Archimedes' Methode.¹⁶ Ausgehend vom gleichseitigen Dreieck, das dem Kreis einbeschrieben ist, wird durch schrittweise Verdoppelung der Eckenzahl bis etwa 96 der Kreis nach und nach immer besser ausgeschöpft. Jeder Schritt wird zeichnerisch und rechnerisch genau behandelt; dabei ergeben sich gleichzeitig Näherungen für den Umfang und für den Flächeninhalt. Man kann eine Zeitlang auf der Zahl π verweilen, die genaue Berechnung sollte wohl auf die 10. Klasse verschoben werden.

Das „Irrationale“ als ein sich neu stellendes Problem der pubertären-nachpubertären Zeit wird ohnehin in dieser Klassenstufe thematisiert, so auch im Mathematikunterricht (π , „nicht-aufgehende“ Wurzeln).

Hierzu bieten sich folgende Möglichkeiten an:

¹⁶ Archimedes Werke, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1972

- a) Das „Buffon'sche Nadelproblem“ führt „experimentell“ zur Zahl π und lässt sich außerdem als Anknüpfungspunkt für den Entstehungsmoment der Wahrscheinlichkeitsrechnung¹⁷ verwenden. Ich habe die Schüler als Hausaufgabe das Problem „auswerten“ und eine Tabelle hierzu aufstellen lassen;¹⁸ einige haben sich sogar stundenlang, begeistert und gespannt auf das Ergebnis, dem Ziel gewidmet, es auf hohe Wurfzahlen zu bringen und so den Sachverhalt möglichst genau zu prüfen. Die im Folgenden eingefügten Buchausschnitte^{17,18} können das Buffon-Problem verdeutlichen; der völkisch-nationalistische Grundton ist uns heute natürlich zuwider.

Ein berühmtes Beispiel ist die große Regelmäßigkeit eines gewissen kleinen Knabenüberschusses bei den Geborenen, die in den Beobachtungsergebnissen für ganze Länder selbst bei nur einjähriger Beobachtung hervortritt, während die Geschlechtszugehörigkeit der Kinder bei den einzelnen Familien durchaus keine Regelmäßigkeit in dieser Hinsicht ahnen läßt. Erst wenn Massenerscheinungen vorliegen und dadurch die Zusammenfassung großer Mengen von gleichartigen Einzelfällen zu Gruppen ermöglicht wird, ist zu erwarten, daß sich von den Besonderheiten der Einzelfälle unabhängige Ergebnisse herausstellen.

Wenden wir die statistische Massenbeobachtung auf ein mathematisches Problem, das sogenannte Buffonsche Nadelproblem, an, so stoßen wir auf eine wunderbare Gesetzmäßigkeit.

Notwendig sind eine Stecknadel und ein Zeichenbogen. Auf diesen zeichnet man mehrere Parallele. Ihr Abstand soll doppelt so groß sein, wie die Nadel lang ist.

Dann wirft man die Nadel auf das Papier, hundertmal, tausendmal, je öfter, desto besser. Außer der Gesamtzahl der Würfe (m) werden auch die Würfe beobachtet, wo die Nadel eine der Parallellinien schneidet oder berührt (n). Hierauf dividiert man die Gesamtzahl der Würfe durch die Zahl der Ueberkreuzungsfälle ($m:n$).

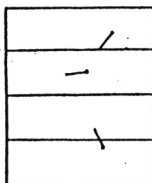
Führen Sie den Versuch durch! Teilen Sie mir dann das erhaltene Ergebnis mit!

Hier ein paar Beispiele:

Gesamtzahl der Würfe m :	Zahl der Ueberkreuzungsfälle n :	Quotient $m:n$
1 000	334	2,99
3 000	967	3,10
5 000	1 593	3,139
10 000	3 183	3,141

Der Quotient beträgt also bei 1 000 Würfen 3, bei 3 000 Würfen 3,1, bei 5 000 Würfen 3,14, bei 10 000 Würfen 3,141, d. i. die Zahl π auf drei Dezimalstellen genau.

Je öfter man wirft, desto genauer erhält man π .



¹⁷ Ivo Schneider (Hrsg.): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933, Einführungen und Texte, Darmstadt 1988, insbesondere S. 494f

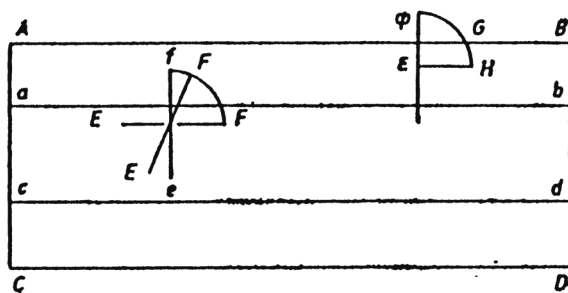
¹⁸ Simon Strehl: Fröhliche Wissenschaft, Nürnberg 1941, S. 55 f

George-Louis Leclerc Buffon: Essai d'arithmétique morale*)

Angenommen, man wirft in einem Zimmer, dessen Fußboden schlicht aus parallelen Brettern besteht, einen Stab in die Luft und einer der Spieler wettet, daß der Stab keine der Parallelen des Fußbodens kreuzt, während der andere darauf setzt, daß der Stab irgendwelche dieser Parallelen kreuzt. Man fragt nach der Gewinnaussicht dieser beiden Spieler³⁵³) (man kann dieses Spiel auf

einem Schachbrett mit einer Nähnadel oder einer Stecknadel ohne Kopf spielen).

Um sie zu finden, ziehe man zuerst zwischen zwei parallelen Fugen AB und CD des Fußbodens zwei andere Parallelen, die von den $\langle$ beiden $\rangle$ ersten um die Hälfte der Stablänge EF entfernt sind; man sieht unmittelbar, daß der Stab, ^{Wenn} sowie sein Mittelpunkt zwischen die beiden nachträglich gezogenen Parallelen zu liegen kommt, niemals, in welcher Lage EF , ef er sich auch befinden mag, die ersten $\langle$ Parallelen $\rangle$ kreuzen können wird. Da nun alles, was oberhalb von ab eintreten kann, ebenso unterhalb von cd eintritt, muß man nur das eine oder das andere bestimmen. Dazu bemerke ich, daß alle Lagen des Stabes durch einen Viertelkreis, dessen Durchmesser gleich der Länge des Stabes ist, dargestellt werden können. Bezeichnet man also den Abstand CA der Fugen des Parketts



mit $2a$, den Umfang des Viertelkreises, dessen Durchmesser der Länge des Stabes gleich ist, mit c , die Länge des Stabes mit $2b$ und die Länge AB der Fugen mit f , so erhält man $f \cdot (a - b) \cdot c$ als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, keine Fuge des Parketts zu kreuzen oder, was dasselbe ist, als Ausdruck für alle Fälle, bei denen der Mittelpunkt des Stabes unterhalb der Linie ab und oberhalb der Linie cd zu liegen kommt³⁵⁴).

Wenn aber der Mittelpunkt des Stabes außerhalb des Bereichs $abcd$, der zwischen den beiden nachträglich gezogenen Parallelen enthalten ist, zu liegen kommt, kann $\langle$ der Stab $\rangle$ seiner Lage entsprechend die Fuge kreuzen oder nicht, so daß, wenn die Mitte des Stabes etwa in e liegt, der Bogen ϕG alle Lagen, in denen er die Fuge kreuzt, und der Bogen GH alle die, in denen er sie nicht kreuzt, kennzeichnet. Da dasselbe für alle Punkte der Geraden ep gilt, bezeichne ich die kleinen Abschnitte dieser Geraden mit dx und die Kreisbögen ϕG mit y ; man erhält $f(\int y dx)$ als Ausdruck aller Fälle³⁵⁵), in denen der Stab

kreuzt, und $f(bc - \int y dx)$ für denjenigen der Fälle, in denen er nicht kreuzt. Ich addiere diesen letzten Ausdruck zu dem oben gefundenen $f \cdot (a - b) \cdot c$, um die Gesamtheit der Fälle, in denen der Stab nicht kreuzt, zu erhalten; daraus ersieht man, daß sich die Gewinnaussicht des ersten Spielers zu der des zweiten verhält wie³⁵⁶⁾

$$(ac - \int y dx) : \int y dx.$$

Wenn das Spiel nun gleiche Gewinnaussichten bieten soll, wird man

$$ac = 2 \int y dx \text{ oder } a = \frac{\int y dx}{\frac{c}{2}}$$

erhalten, d.h. die Fläche eines Teils der Zykloide, deren Erzeugerkreis den Durchmesser $2b$, also die Stablänge, hat. Nun weiß man, daß diese Zykloidenfläche dem Quadrat des Radius gleich ist, also

$$a = \frac{b^2}{\frac{1}{2}c};$$

d.h., daß die Stablänge etwa $\frac{3}{4}$ des Abstands zwischen den Fugen des Parketts ausmachen muß.

*) GEORGE-LOUIS LECLERC BUFFON, Essai d'arithmétique morale, in: Supplément à l'Histoire naturelle, Bd. IV, Paris 1777, und in: Oeuvres complètes de BUFFON, Bd. XIII, Paris 1827, S. 60–62.

(S)

³⁵³⁾ (S): Dies ist das sogenannte Nadelproblem, über das BUFFON schon 1733 vor der Pariser Académie des sciences vorgetragen hatte. Siehe dazu den (nicht von BUFFON stammenden) Bericht in der Histoire de l'Académie Royale des sciences für 1733, Pariser Ausgabe S. 43–45, Amsterdamer Ausgabe S. 59–62, der die von BUFFON vorgetragenen Lösungen des *jeu du franc carreau* und des Nadelproblems enthält, wobei die Lösung des Nadelproblems nur angedeutet ist.

³⁵⁴) (S): BUFFON hat sich offenbar das schon von JAKOB BERNOULLI benutzte und von DE MOIVRE verbindlich eingeführte klassische Wahrscheinlichkeitsmaß nicht zu eigen gemacht, sondern bedient sich noch nicht normierter Wahrscheinlichkeiten; denn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Stabmitte in den Teil $abcd$ der Gesamtfläche $ABCD$ fällt, ist $\frac{a-b}{a}$. Der Ausdruck $f \cdot (a-b) \cdot c$, wobei $c = \frac{1}{2} b\pi$ ist, ist keine normierte Wahrscheinlichkeit und wurde von BUFFON in Hinblick auf den noch zu berechnenden Anteil der Fälle gebildet, in denen der Abstand der Stabmitte von den Fugen kleiner als b ist und diese dennoch nicht gekreuzt werden.

³⁵⁵) (S): Bezeichnet man den Abstand des Punktes e von der Fuge AB mit x und den Bogen φG bzw. y mit $b\alpha$, so gilt $\cos \alpha = \cos \frac{y}{b} = \frac{x}{b}$ und $\int y dx = b \int \arccos \frac{x}{b} dx$, wobei zwischen 0 und b integriert werden muß. $\int_0^b y dx$ ergibt dann tatsächlich, wie von BUFFON einige Zeilen weiter festgestellt, b^2 . Das Integral symbolisiert BUFFON, vielleicht als Abkürzung für *somme*, mit s .

³⁵⁶) (S): Dieses Ergebnis bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn des zweiten Spielers bzw. dafür, daß der Stab eine Fuge kreuzt, gerade

$$\frac{\int_0^b y dx}{ac} = \frac{b^2}{ac} = \frac{2b}{a\pi}$$

ist.

- b) Verschiedene Näherungskonstruktionen der Zahl π .

Besonders zu erwähnen ist die schöne Konstruktion von Kochanski (Siehe z. B. *H.v. Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen*; *E. Bindel: Die Arithmetik*). Sie ermöglicht es außerdem, die Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks und den Satz von Pythagoras aufzugreifen; mit ihnen kann dann die $\frac{22}{7} \approx \pi$ entsprechende Strecke berechnet werden.

- c) Verschiedene Rechenausdrücke, die zu Näherungswerten von π führen. (Siehe wie in b) *H.v. Baravalle* und *E. Bindel*.) Hierbei lassen sich auch anfängliche Betrachtungen zu verschiedenen Zahlenbereichen und zum Irrationalen anstellen.

Kopfrecheneinheit 8: Kreisberechnungen (mehrmals!)

Verschiedenste Inhalts- und Umfangsberechnungen im Zusammenhang mit dem Kreis; Restflächen, Restumfänge, zusammengesetzte Figuren. Hierbei π als „ein bisschen größer als 3“ handhaben:

- „Der Inhalt eines Kreises ist etwas größer als 75 cm^2 . Wie groß ist sein Radius?“,
- „Man legt aus einem dicken Tau der Länge 20 m einen Kreis. Wie groß ist sein Durchmesser?“

- „Aus einem Kreis ist ein Quadrat mit dem Inhalt 16 cm^2 ausgestanzt. Es bleiben etwas mehr als 60 cm^2 übrig. Welchen Durchmesser hat der Kreis?“ usw.

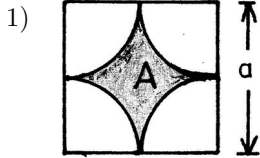
Wieder darf die Merktafel mitbenutzt werden. Dies kann einmünden in:

Die Berechnung verschiedenster Figuren

Aus den beiliegenden Aufgabenblättern S. 84–86 wählt man einige repräsentative Problemstellungen aus. Die Aufgaben sind überwiegend den bereits genannten Schulbüchern entnommen. Die Lösungen sind mit $\pi \approx 3,14$ berechnet.

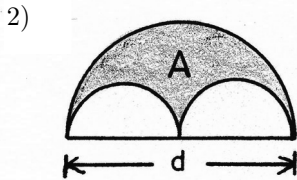
Zu beachten ist, dass man *grundsätzlich* zuerst Berechnungen mit gegebenen Zahlen anstellt und erst *dann* zur allgemeinen Lösung übergeht. Ob letzteres überhaupt sinnvoll ist, muss man abspüren. Zumindest die begabten Schüler könnten veranlasst werden, die allgemeine Lösung zu entwickeln und gegebenenfalls an der Tafel darzustellen.

Auch die Behandlung der „Möndchen des Hippokrates“ und ähnlicher Probleme ist an dieser Stelle geeignet.



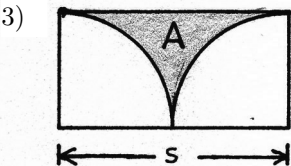
Berechne A

- a) für $a = 70 \text{ cm}$
b) allgemein



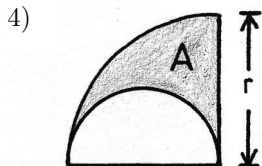
Berechne A

- a) für $d = 50 \text{ cm}$
b) allgemein



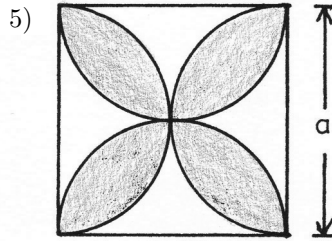
Berechne A

- a) für $s = 16 \text{ cm}$
b) allgemein



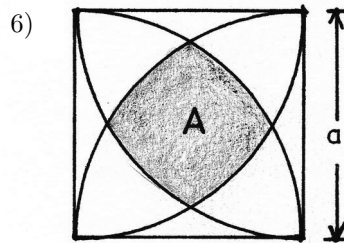
Berechne A

- a) für $r = 32 \text{ cm}$
b) allgemein



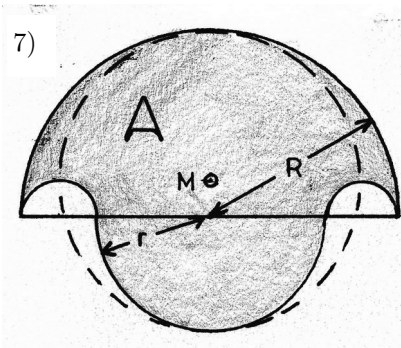
Berechne A

- a) für $a = 40 \text{ cm}$
b) allgemein



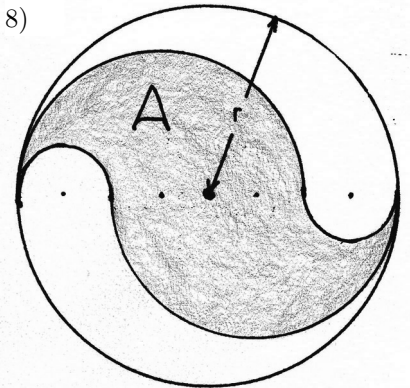
Berechne A

- a) für $a = 20 \text{ cm}$
b) allgemein

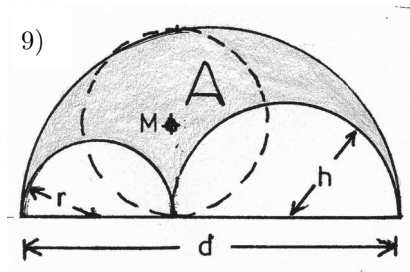


Berechne A

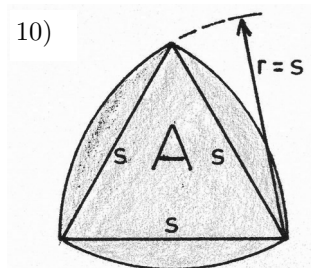
- a) für $R = 20 \text{ cm}, r = 8 \text{ cm}$
b) allgemein
c) Vergleiche A mit dem Flächeninhalt des Kreises um M



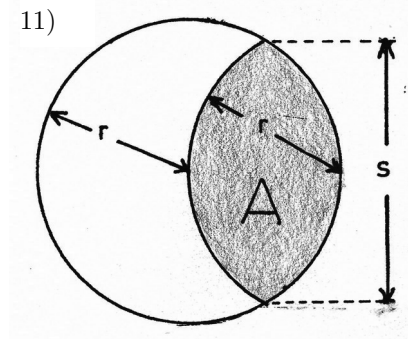
Berechne A
a) für $r = 28 \text{ cm}$
b) allgemein



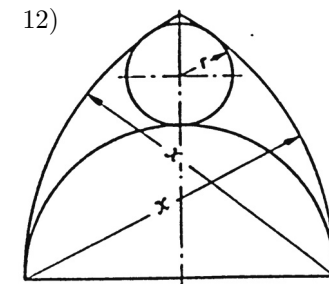
Berechne A
a) für $d = 10 \text{ cm}$, $r = 2 \text{ cm}$
b) allgemein
c) Vergleiche A mit dem Flächeninhalt des Kreises um M



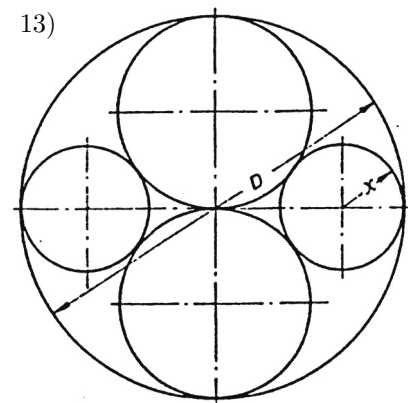
Berechne A
a) für $s = 5 \text{ cm}$
b) allgemein



Berechne A und s
a) für $r = 35 \text{ mm}$
b) allgemein

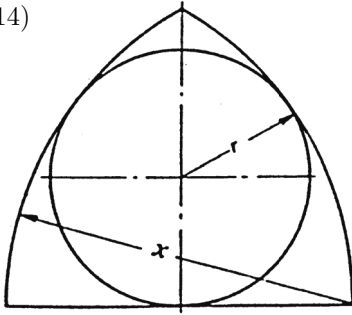


Berechne x zunächst für $r = 3,2 \text{ cm}$ und danach allgemein.



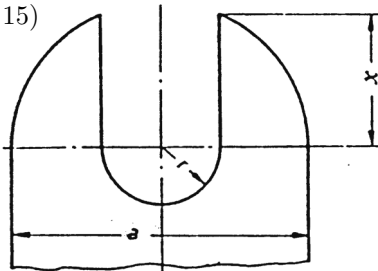
Berechne x zunächst für $D = 12 \text{ cm}$ und danach allgemein.

14)



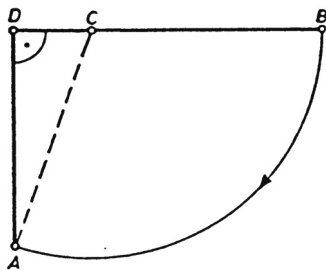
Berechne x zunächst für $r = 1,9 \text{ cm}$ und danach allgemein.

15)



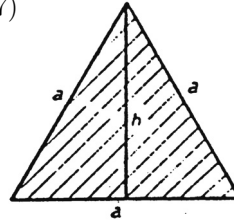
Berechne das Maß x der Ausfräsung zunächst für $a = 46 \text{ mm}$ und $r = 15 \text{ mm}$ und danach allgemein.

16)



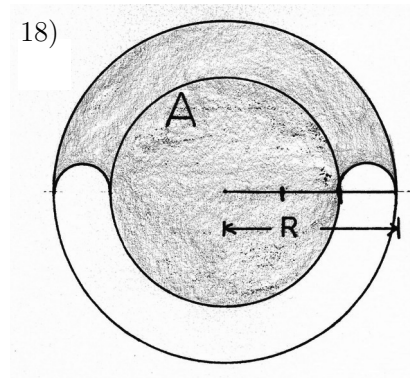
Ein rechtwinkliges Gestänge besteht aus den Stäben $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$. Es soll in Punkt C ein Gelenk erhalten, damit nach dem Zusammenklappen Punkt B mit A zusammenfällt. Berechne $\overline{DC}$ zunächst für $\overline{AD} = 52 \text{ cm}$ und $\overline{DB} = 80 \text{ cm}$ und danach allgemein.

17)



Ein Dreikantstahl hat die Höhe h . Berechne den Querschnitt A aus der Höhe.

18)



Berechne A

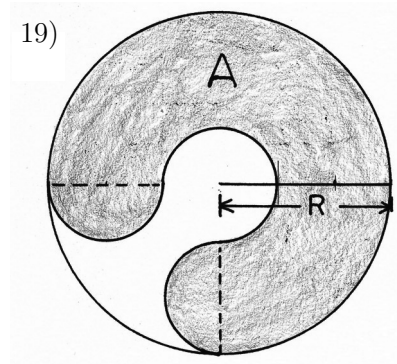
a) für $R = 3 \text{ cm}$

6 cm

12 cm

b) allgemein

19)



Berechne A

a) für $R = 3 \text{ cm}$

b) allgemein

Lösungen zu den Aufgabeböckern Seite 84–86

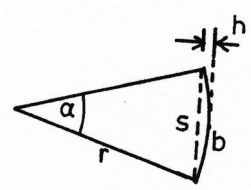
Formeln:

Kreis $A_{\bigcirc} = \pi r^2 \quad U = 2\pi r$

Kreisausschnitt $A_{\triangle} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r \cdot b}{2}$

Kreisabschnitt $A_{\cap} = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2} \approx \frac{2}{3} s \cdot h$

wegen $\frac{A_{\triangle}}{A_{\bigcirc}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$
 und $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b}{2\pi r}$



1) $A = a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0,2145 a^2$
 $A = 1051,05 \text{ cm}^2$

2) $A = \frac{d^2 \pi}{16} = 0,19625 d^2$
 $A = 490,625 \text{ cm}^2$

3) $A = \frac{s^2}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0,1075 s^2$
 $A = 27,52 \text{ cm}^2$

4) $A = \frac{\pi r^2}{8} = 0,3925 r^2$
 $A = 401,92 \text{ cm}^2$

5) $A = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0,57 a^2$
 $A = 912 \text{ cm}^2$

6) $A = a^2 \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$
 $= 0,315 a^2$
 $A = 126 \text{ cm}^2$

7) $A = \pi \left(\frac{R+r}{2}\right)^2$
 $= 0,785(R+r)^2$
 $A = 615,44 \text{ cm}^2$

 Beide Flächeninhalte sind gleich
 groß

8) $A = \frac{\pi r^2}{2}$

$A = 1231,5 \text{ cm}^2$

 bei $\pi = 3,14$:

$A = 1230,88 \text{ cm}^2$

9) $A = \frac{\pi}{2} r(d - 2r)$
 $= 1,57 r(d - 2r)$
 $A = 18,84 \text{ cm}^2$

 Beide Flächeninhalte sind gleich
 groß

10) $A = \frac{s^2}{2} (\pi - \sqrt{3}) = 0,704 s^2$
 $A = 17,6 \text{ cm}^2$

11) $A = \frac{r^2}{6} (4\pi - 3\sqrt{3})$
 $= 1,227 r^2$
 $s = r\sqrt{3}$

$A = 1503 \text{ mm}^2$

$s = 60,62 \text{ mm}$

- 12) „Geht der Radius x durch den Mittelpunkt des kleinen Kreises, so geht er auch durch den Berührungspunkt des kleinen Kreises.“

$$x = 6r$$

$$x = 19,2 \text{ cm}$$

$$13) \quad x = \frac{D}{6}$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

$$14) \quad x = \frac{8}{3}r$$

$$x = 5,07 \text{ cm}$$

$$15) \quad x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2}$$

$$x = 17,4 \text{ mm}$$

$$16) \quad \overline{DC} = \frac{\overline{DB}^2 - \overline{AD}^2}{2\overline{DB}}$$

$$\overline{DC} = 23,1 \text{ cm}$$

$$17) \quad A = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{h^2}{3} \sqrt{3}$$

$$18) \quad A = \frac{25}{36} R^2 \pi$$

$$R = 3 : \quad A = \frac{25}{36} \cdot 9 \cdot 3,14$$

$$= 78,5 : 4$$

$$A = 19,63 \text{ cm}^2$$

$$R = 6 : \quad A = \frac{25}{36} \cdot 36 \cdot 3,14$$

$$= 25 \cdot 3,14$$

$$A = 78,5 \text{ cm}^2$$

$$R = 12 : \quad A = \frac{25}{36} \cdot 144 \cdot 3,14$$

$$= 100 \cdot 3,14$$

$$A = 314 \text{ cm}^2$$

$$19) \quad A_{\frown} = \frac{3}{4} \cdot R^2 \cdot \pi$$

$$A_{\circlearrowleft} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot R^2 \cdot \pi$$

$$A_{\circlearrowright} = \frac{1}{9} \cdot R^2 \cdot \pi$$

$$A = A_{\frown} - A_{\circlearrowleft} + A_{\circlearrowright}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{9} \right) R^2 \pi$$

$$= \frac{27 - 3 + 4}{36} R^2 \pi$$

$$= \frac{28}{36} R^2 \pi$$

$$A = \frac{7}{9} R^2 \pi$$

$$R = 3 :$$

$$A = \frac{7}{9} \cdot 9 \cdot \pi$$

$$= 7 \cdot \pi$$

$$\approx 7 \cdot 3,14$$

$$A \approx 21,98 \text{ cm}^2$$

Die folgende Scherzaufgabe¹⁹ eignet sich als Übergang in den Hauptteil. Ihre Lösung wird von vielen Schülern als paradox empfunden, vertieft aber das Verständnis des Zusammenhangs zwischen Umfang und Durchmesser: „Wie wächst der Durchmesser, wenn der Umfang des Kreises wächst?“, bzw. die umgekehrte Fragestellung.

In einem nächsten Schritt kann man, mit ebensolchem Ziel, den Zusammenhang zwischen dem Wachsen des Durchmessers oder Radius und dem des Flächeninhalts besprechen und damit den grundlegenden Unterschied zwischen Längen- und Flächenwachstum herausarbeiten.

Um den Äquator

Man denke sich um den Erdäquator, der eine Länge von 40 070 km hat, einen Strick gelegt. Es stellt sich heraus, daß der Strick um 10 m zu lang ist. Man lockert deshalb den Strick ein wenig rings um die ganze Erde herum. Die Frage ist: Kann sich zwischen dem so gelockerten Strick und der Erde wohl eine Maus hindurchzwängen oder nicht?

Die meisten werden antworten: „Ausgeschlossen, daß sich eine Maus hindurchzwängen könnte!“

Und doch würde nicht nur eine Maus, sondern auch ein Mensch in gebückter Stellung bequem durchgehen können; denn der Abstand zwischen Erde und Strick würde ungefähr $1\frac{1}{2}$ Meter betragen.

Ausblick

Hier kann sich die Erarbeitung der Stereometrie anschließen, und zwar in einer Behandlung, die methodisch und inhaltlich vieles in der Planimetrie Behandelte unmittelbar aufgreift und auf die Gegebenheiten des Raumes überträgt. Diesem Schwerpunktthema soll ein ergänzender Aufsatz gewidmet sein.

¹⁹Simon Strehl: Fröhliche Wissenschaft, Nürnberg 1941, S. 14

III Anhang: Unterrichtsgepflogenheiten

Ich bevorzuge es, die üblichen zwei Übstunden pro Woche als Doppelstunden zu haben, weil der nötige Methodenwechsel sonst zur Kurzatmigkeit führt und die Schüler keine ausreichende Ruhe zum Verfolgen eines Gedankenganges mit anschließender Fixierungs- und vor allem Übungsphase haben.

Gern behandle ich Geometrisches, Arithmetisches und Algebraisches in einem Unterricht oder in einer Unterrichtsfolge nebeneinander. Dabei bemühe ich mich allerdings, die den Gebieten eigenen, grundsätzlich verschiedenen Denkweisen nicht zu vermischen. Im 9. Schuljahr empfiehlt es sich, hiermit besonders vorsichtig zu sein.

Hin und wieder führe ich manche Inhalte, die scheinbar nichts miteinander zu tun haben, eine Zeitlang parallel, bis nach und nach doch ein Zusammenhang geahnt werden kann und schließlich offenbar wird, so dass der Ziel-Sachverhalt, von unterschiedlichen Seiten beleuchtet, eine genügende Dichte und Fülle aufweist.

In den ersten Stunden einer Unterrichtseinheit versuche ich, langsam vorgehend, eine solide Grundlage zu schaffen. So ermögliche ich den ganz schwachen Schülern, einen Einstieg bzw. Neuanfang zu finden. Der „Zeitverlust“ am Anfang erspart das zeitraubende spätere Aufarbeiten von Defiziten, und die schwächeren Schüler gewinnen wieder Selbstvertrauen. Dieser behutsame Beginn schließt nicht aus, dass auch stärker begabte Schüler schon reichlich zu tun haben. Problemstellung und Niveau der Übungsaufgaben müssen hierzu breit gefächert sein. Andererseits sind die Begabteren für die schwierigen Formulierungen und für die Zusammenfassungen und Erläuterungen zuständig.

Es ist mir wichtig, die Schüler so oft wie möglich in die Eigenaktivität zu führen. Sie sollen, neben intensivem Üben, die Gelegenheit haben, Vieles selbständig herauszufinden und Sachverhalte selbst darzustellen.

Gern füge ich – einleitend, überleitend, länger erzählend, je nachdem – Biographisches, Geistesgeschichtliches, die Bewusstseinsentwicklung Betreffendes, Anekdotisches und sonstwie Wissenswertes an geeigneter Stelle ein.

Im ersten Teil des Hauptunterrichts, nach dem Morgenspruch, den Sprachübungen und einer Rezitation, mache ich Kopfrechen- und/oder Vorstellungsübungen. Danach sind die Schüler wach und aufnahmebereit. Oft leite ich hieraus nahtlos in den Hauptteil über.

Zum Umfang der Hausaufgaben: Die meisten Schüler haben einen gewissen Aufgaben-„Überhang“ aus dem Hauptunterricht, der zu Ende zu führen ist; schwerere und zugleich interessantere Aufgaben, die alternativ oder zusätzlich bearbeitet werden dürfen, füge ich hinzu.

Dasjenige Tafelbild, das keinen „Kladdencharakter“ hat, muss äußerst sauber und übersichtlich gestaltet, in sich logisch aufgebaut und für sich sprechend sein. Der hieraus folgende pädagogische Effekt kann kaum überschätzt werden.

Ich benötige viel Tafelfläche, so dass ich meistens noch mit zusätzlichen fahrbaren Tafeln arbeite, die dann, ohne Beeinträchtigung anderer Unterrichte, über mehrere Tage ihre Aufschrift behalten können. Gern setze ich auch einen großen Schreibblock („Flip-Chart“) ein; die erarbeiteten, z.B. mit Merksätzen, Beispielen, Formeln, Tabellen versehenen Blätter werden im Klassenraum aufgehängt und können so die Arbeit unterstützen; sie sind ein „aushängendes Gedächtnis“.

Zur Heftführung:

- a) Wenn man eine neu übernommene 9. Klasse erst einmal bei sich „ins Arbeiten bringen“ will, empfiehlt sich folgendes Vorgehen: *2 Übungshefte* für das Bearbeiten der Übungsaufgaben. Wenn eines eingesammelt wird, steht das andere dem Schüler noch zur Verfügung. Eventuell muss, um frühzeitig eine regelmäßige Arbeit zu gewährleisten, eine Zeitlang von Stunde zu Stunde jeweils das eine Heft eingesammelt werden. Wer Heft oder Hausaufgaben vergessen hat, bringt es am selben Tag zu mir nach Hause. Das ist für den Schüler meistens so umständlich, dass er den bequemer Weg wählt, nämlich regelmäßig seine Aufgaben erledigt. Aus Unterlassungen des Lehrers in dieser Hinsicht resultieren oft spätere Schwierigkeiten, sofern sie mit der Arbeitshaltung des Schülers zusammenhängen.
- b) *1 „gutes Heft“*, in das laufend die Inhalte der Epoche und das Allgemeingültige oder besonders Bedeutsame der Übstunden eingetragen wird, nicht etwa jede gerechnete Aufgabe. Es soll hier gleich sauber eingetragen werden. Ich bevorzuge hierzu das Führen von Heftern, was z.B. das Unterbringen von Nachträgen und Ergänzungen und der Arbeitsbögen erleichtert. Die guten Hefte(r) werden vom Schüler aufbewahrt und ergeben am Ende der Oberstufe ein inhaltlich zusammenhängendes Kompendium unserer mathematischen Arbeit, auf das man gelegentlich, z.B. bei Wiederholungen oder anlässlich einer Prüfungsvorbereitung, verweisen kann.

In Lübeck setzen wir den Taschenrechner erst im 10. Schuljahr *nach* den beiden Epochen (Höhere Rechnungsarten; Trigonometrie) ein, und zwar für Zinseszinsberechnungen und *im* Feldmesspraktikum; von da ab ist er das geeignete, zeitgemäße Arbeitsmittel für numerische Berechnungen. Die Schüler haben keine Probleme, die von uns genannten Gründe

überzeugend zu finden:

- Man verlernt das Rechnen bzw. wird sehr langsam, besonders im Kopfrechnen, und zwar nach kürzester Zeit, wenn man einen Taschenrechner benutzt.
- Man muss zunächst die Rechenmethode verstehen und beherrschen, ehe es sinnvoll ist, einen Taschenrechner zu benutzen.
- Am Ende seiner Schulzeit soll ein junger Mensch mit einem Maximum an individueller Rechenfähigkeit dastehen können.

Im Übrigen erleben sie an den Seiteneinsteigern aus Schulen in staatlicher Trägerschaft, auch an den besser begabten, die z.T. massive Rechenschwierigkeiten mitbringen, dass frühzeitige und intensive Taschenrechner-Benutzung ihre Schattenseiten hat.

Auf folgende Literatur wurde im Text Bezug genommen.

- BARAVALLE H.V.: Geometrie als Sprache der Formen, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1980³
- BERLOQUIN P.: Mathematische Kopfspiele, München 1983
- BERNHARD A.: Geometrie für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1993
- BINDEL E.: Die Arithmetik, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1967
- EIGENMANN P.: Geometrische Denkaufgaben, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1981
- LOUIS LOCHER-ERNST: Arithmetik und Algebra, Dornach 1984
- OTT G.: Geometrie für Klassenlehrer der 6., 7. und 8. Klassen

Weitere Literatur

- ULIN, BENGT: Der Lösung auf der Spur, Stuttgart 1987
- Schulbücher: ältere Ausgaben von Lambacher-Schweizer, Klett Verlag Stuttgart und Reidt-Wolff, Schrödel-Schöning Verlag
- Sehr anregend ist auch die reine Stoffdarstellung von KUNO FLADT: Mathematik Bd. I, 1962², Verlag Moritz Diesterweg
- Historische Quellen, wie im Text angegeben
- Insbesondere ist hinzuweisen auf eine grandiose, nach genetischer und historisierender Methode die Entwicklung der Mathematik höchst spannend darstellende Arbeit, aus der der Lehrer (und nicht nur der!) vielfältige Anregungen und Kenntnisse für seinen Unterricht gewinnen kann, ja sein Fach in einer Weise überhaupt erst kennen lernt: LANCELOT HOGBEN, Mathematik für alle (Ich empfehle die ersten Auflagen.)

Eine Anmerkung zum geometrischen Ort

UWE HANSEN

Der Begriff des geometrischen Ortes spielt in der Mathematik eine zentrale Rolle. Jeder Schüler sollte die folgenden geometrischen Orte kennen: Mittelsenkrechte einer Strecke, Winkelhalbierende zweier sich schneidender Geraden, Parallele zu einer Geraden, Kreislinie, Ellipse, Parabel, Hyperbel, Cassinische Kurven - speziell die Lemniskate, Kreis des Apollonius (Divisionskreis).

Das Verständnis für den Begriff des geometrischen Ortes kann durch die folgenden Beispiele erweitert werden:

1. Beispiel: In einer Ebene seien zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2 gegeben. Die Abstände eines Punktes P von g_1 und g_2 seien d_1 bzw. d_2 . Wo liegt P, wenn gilt:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $d_1 + d_2 = \textit{konstant}$ | b) $d_1 - d_2 = \textit{konstant}$ |
| c) $d_1 \cdot d_2 = \textit{konstant}$ | d) $d_1 : d_2 = \textit{konstant?}$ |

Im Falle a) erhält man ein Rechteck mit den Diagonalen g_1 und g_2 . Im Falle b) erhält man ein „negatives“ Rechteck: alle vier Seiten schneiden die unendlich ferne Gerade der Ebene. g_1 und g_2 sind wieder Diagonalen. Im Falle c) erhält man Hyperbeln, deren Asymptoten g_1 und g_2 sind, und im Falle d) erhält man Geraden, die durch den Schnittpunkt von g_1 und g_2 gehen.

2. Beispiel: Gegeben sei ein fester Punkt F und eine feste Gerade l, die nicht durch F geht. d_1 und d_2 seien die Abstände eines beliebigen Punktes P von F bzw. l. Wo liegt P wenn gilt:

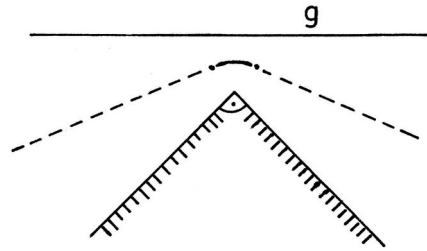
- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $d_1 + d_2 = \textit{konstant}$ | b) $d_1 - d_2 = \textit{konstant}$ |
| c) $d_1 \cdot d_2 = \textit{konstant}$ | d) $d_1 : d_2 = \textit{konstant?}$ |

Im Falle a) erhält man eine Kurve, die sich aus 2 Parabelbögen zu-

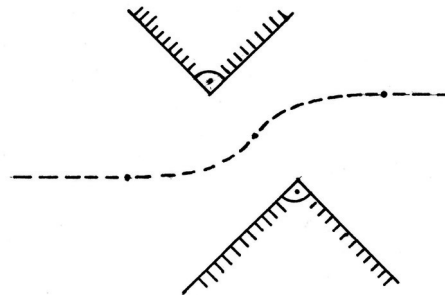
sammensetzt. Auch im Falle b) erhält man eine Kurve, die sich aus 2 Parabelteilen zusammensetzt, die aber beide bis ins Unendliche gehen. Im Falle c) erhält man muschelförmige Kurven, und im Falle d) erhält man die Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel.

Die Fälle c) und d) kann man in einer gemeinsamen Zeichnung darstellen lassen, indem man die Abstände d_1 und d_2 gleiche geometrische Folgen durchlaufen lässt.

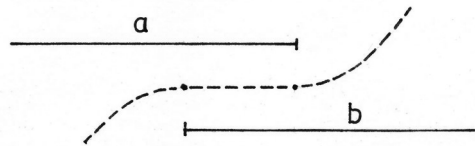
3. Beispiel: Welche Punkte P liegen von der Geraden g und dem Winkel gleichweit entfernt? Die Lösungskurve setzt sich aus einem Parabelbogen und zwei Halbgeraden (Winkelhalbierenden) zusammen. Der Öffnungswinkel muss nicht 90° betragen.



4. Beispiel: Welche Punkte P liegen von beiden Winkeln gleichweit entfernt? Die Lösungskurve setzt sich zusammen aus 2 Parabelteilen und 2 Halbgeraden.

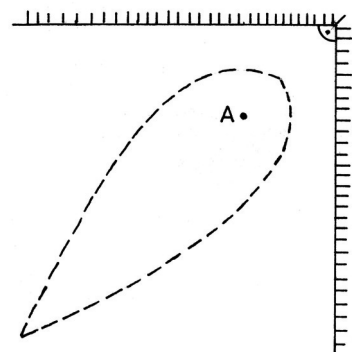


5. Beispiel: Auf welcher Kurve liegen die Punkte P , die von den beiden Halbgeraden a und b gleichweit entfernt liegen? Die Lösungskurve setzt sich aus einer Strecke und 2 Halb-Parabeln zusammen.



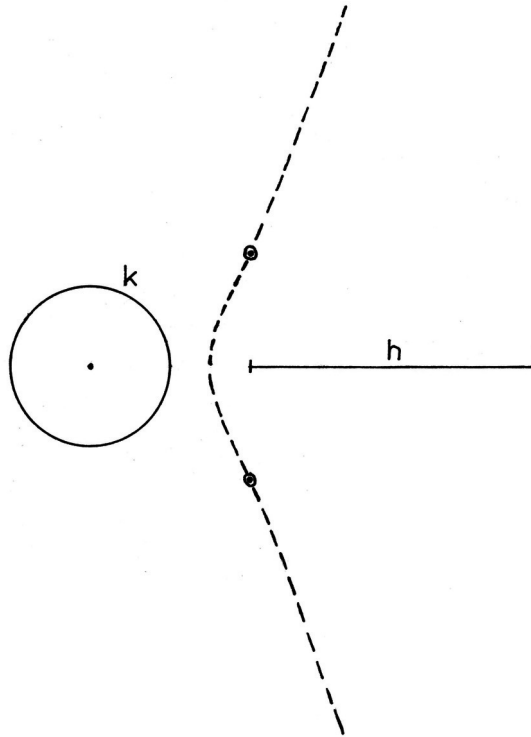
6. Beispiel: Welche Punkte P liegen von dem Winkel genau so weit entfernt wie vom Punkte A ? Als Lösung erhält man eine Kurve, die sich aus 2 Parabelbögen zusammensetzt.

An diesem Beispiel sei erläutert, wie man die Lösungskurve auch



finden kann: Um A als Mittelpunkt dehnt sich ein Kreis mit einer bestimmten Geschwindigkeit aus; dieser wird geschnitten mit dem geometrischen Ort aller Punkte, die vom Winkel den Abstand des jeweiligen Kreisradius haben. Verändert sich der Radius, so durchlaufen die Schnittpunkte die gesuchte Kurve.

7. Beispiel: Welche Punkte liegen von der Halbgeraden h , genau so weit entfernt wie vom Kreis k ? Die Lösungskurve setzt sich zusammen aus einem Hyperbelteil und zwei Parabelteilen.



Geometrische Ortskurven

Ein Beitrag zur Metamorphose von Kurvenformen

SIGURD BINDEL UND KLAUS LABUDDE

In dem von Caroline von Heyebrand herausgegebenen „Lehrplan der Freien Waldorfschule“ wird für das 9. Schuljahr die Behandlung der Kegelschnitte und ausgewählter Kurven höheren Grades im Anschluss an die Lehre von den geometrischen Ortslinien angegeben. Der Begriff des geometrischen Ortes gehört zu den wesentlichen Grundlagen für den Geometrieunterricht in der Mittelstufe. Daher ist es sicher auch sinnvoll, wenn manche Klassenlehrer die Kegelschnitte bereits im 8. Schuljahr behandeln, wobei sie jedoch die Akzente dieser Klassenstufe gemäß anders setzen als der Oberstufenlehrer im 9. Schuljahr.

Zu den ausgewählten Beispielen geometrischer Ortskurven höheren Grades sollen auf der Grundlage gemachter Erfahrungen einige Anregungen gegeben werden. Manche Oberstufenlehrer mögen einwenden, es fehle ihnen die nötige Zeit, um auch noch Ortskurven im Geometrieunterricht zu behandeln. In den Mathematikepochen einer 9. Klasse könne man dies nicht auch noch unterbringen. Dazu ist zu sagen, dass es wohl für jedes Schuljahr in der Oberstufe mehr geeigneten Stoff gibt, als Zeit dafür zur Verfügung steht. Außerdem kann man – auch hier liegen Erfahrungen vor – die Ortskurven auch im Fach „Darstellende Geometrie“ (manchmal auch „geometrisch-technisches Zeichnen“ genannt) behandeln. Auch in diesem Fach gibt es bewährte, aber keineswegs absolut festgelegte Inhalte. Es ist Aufgabe des Lehrers, herauszufinden, was er für seine 9. Klasse für wichtig und vordringlich hält. In diesem Sinn ist dieser Beitrag als ein Angebot für den Geometrieunterricht im 9. Schuljahr gemeint. Als Einstieg habe ich meistens begonnen mit den

Drei Problemen von Delos¹

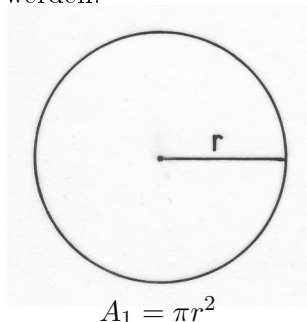
Die Pythia von Delos, des Apollon-Orakels, stellte der Menschheit drei Aufgaben: Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal²

1. Die Quadratur des Kreises
2. Die Würfelverdoppelung
3. Die Winkeldreiteilung

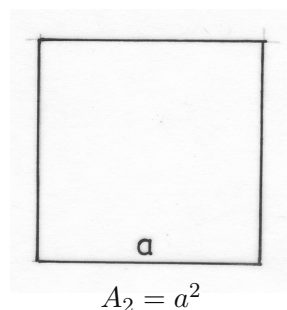
Alle 3 Aufgaben sind aber mit Zirkel und Lineal unlösbar. Bei den Versuchen, diese Aufgaben zu lösen, sind in der Geschichte der Mathematik eine Fülle von wertvollen Konstruktionen und Erkenntnissen entstanden. Zwei Beispiele möchte ich herausgreifen, die zu neuen Kurvenformen geführt haben.

1. Die Quadratur des Kreises

Die Fläche des Kreises soll in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandelt werden.

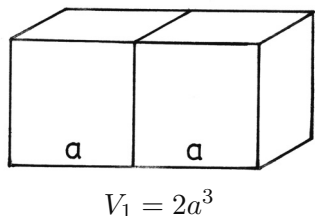


$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \\ a^2 &= \pi r^2 \\ a &= r\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

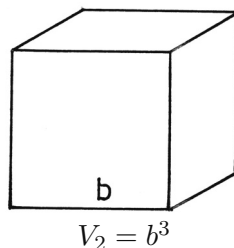


2. Die Würfelverdoppelung

Zwei gleiche Würfel sollen in einen einzigen Würfel von gleichem Volumen verwandelt werden.



$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 \\ b^3 &= 2a^3 \\ b &= a\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

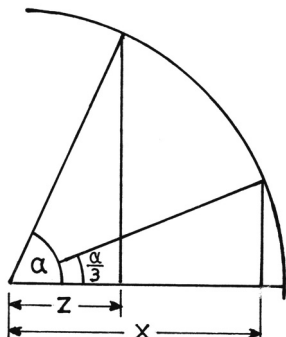


¹ Delos, jetzt Delopulo oder Mikra Dilos, eine der kleinsten Inseln des Ägäischen Meeres, ganz aus Granit. Im Altertum: Apollon-Tempel mit Orakel, Bundesheiligtum aller ionischen Seestaaten, Haupt-Sklavenmarkt.

² Lineal ohne cm-Skala, ausschließlich zum Zeichnen gerader Linien bestimmt.

3. Die Winkeldreiteilung

Ein beliebiger Winkel soll in drei gleiche Teile geteilt werden.



$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3}$$

$$x = \cos \frac{\alpha}{3} \quad z = \cos \alpha$$

Kubische Gleichung:

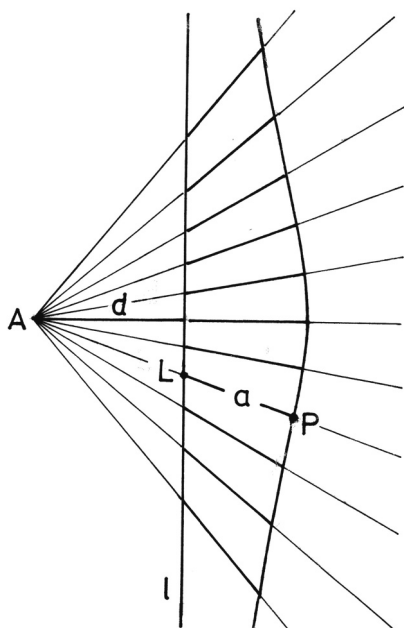
$$z = 4x^3 - 3x$$

$$\text{oder } x \text{ aus: } 4x^3 - 3x - z = 0$$

Die Konchoide

Die Konchoide wurde von dem griechischen Mathematiker Nikomedes (um 150 v.Chr.) erfunden, mit dieser Kurve konnte er das Problem der Winkeldreiteilung lösen.

Die Durchführung dieser Aufgabe der Winkeldreiteilung soll am Schluss dieses Kapitels gezeigt werden.

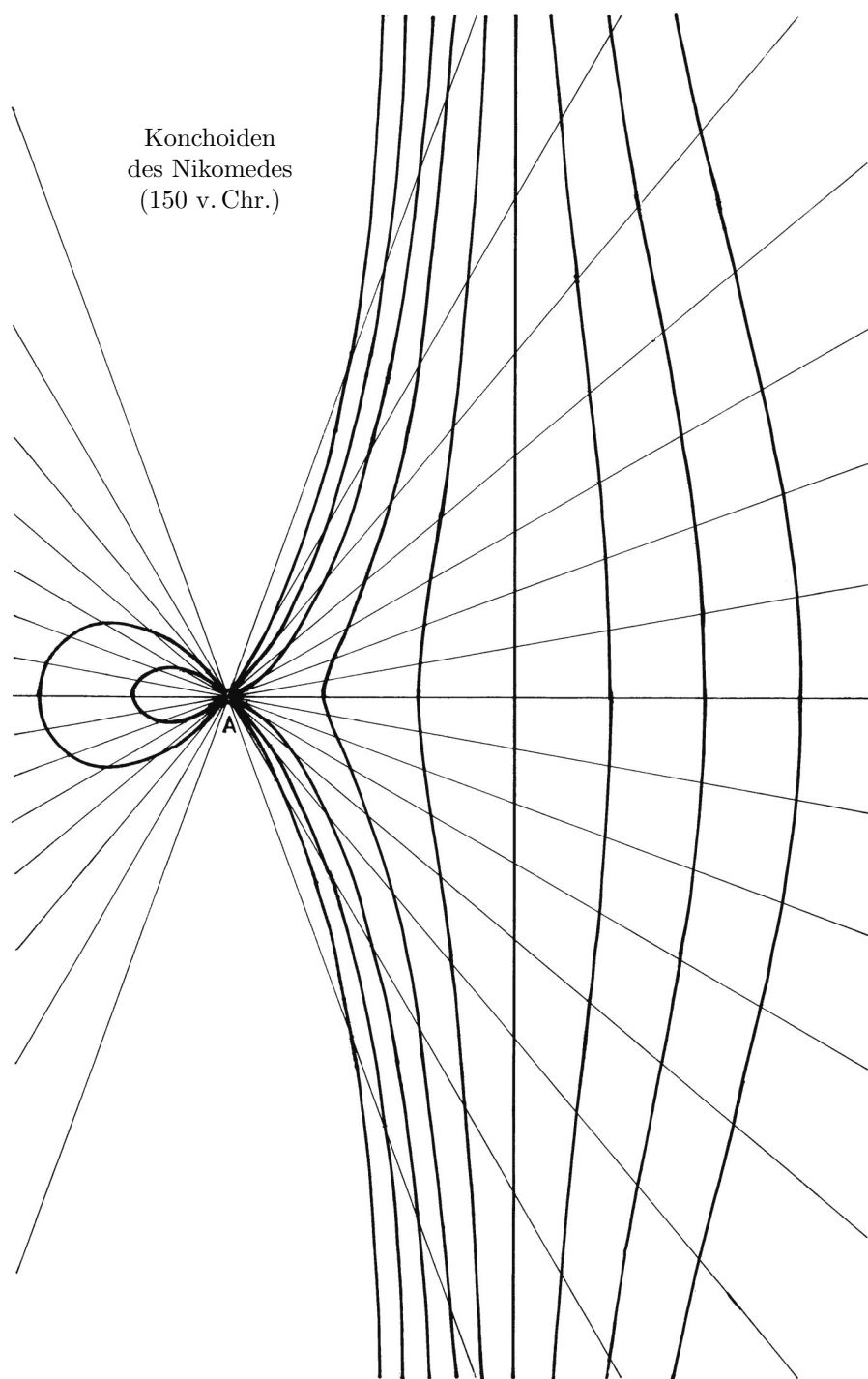


Definition:

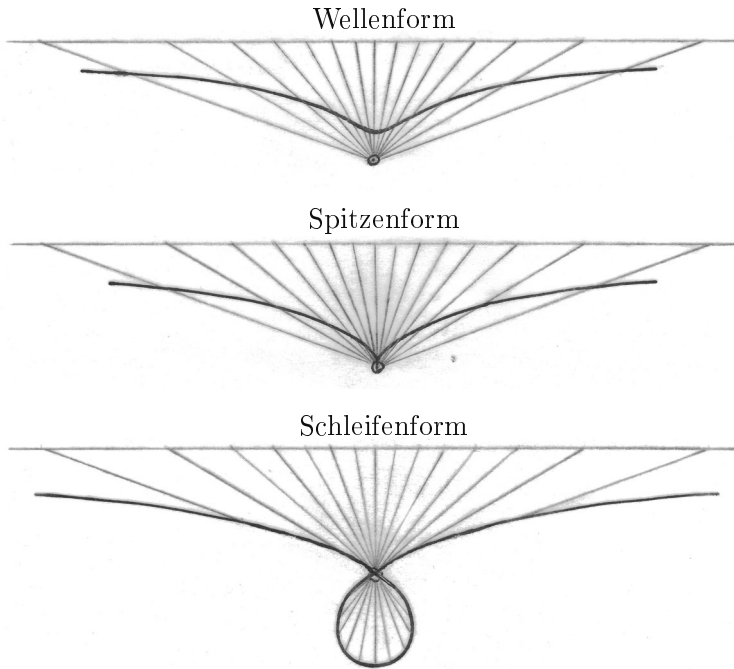
Durch den Pol A wird ein Strahlenbündel gezogen. Die Leitlinie l , im Abstand d vom Pol schneidet das Strahlenbündel in den Punkten L. Von den L-Punkten aus wird auf den Strahlen die konstante Länge a abgetragen bis zu den Punkten P. Diese P-Punkte erzeugen die Konchoide, d.h. Muschelkurve (wegen ihrer Form).

Anstatt die konstante Länge a nach außen abzutragen, kann man sie auch nach innen in Richtung zum Pol abtragen. Die Zeichnung auf der folgenden Seite enthält Konchoiden, bei denen der Leitlinienabstand $d = 6\text{ cm}$ beträgt. Dann werden nach außen die Konchoiden für $a = 2; 4; 6\text{ cm}$ gezeichnet, nach innen für $a = 2; 4; 6; 8; 10\text{ cm}$. Bei den „Innen-Konchoiden“ treten drei verschiedene Formprinzipien auf:

Wellenform für	$0 < a < 6\text{ cm}$
Spitzenform für	$a = 6\text{ cm}$
Schleifenform für	$a > 6\text{ cm}$



Nun werden die drei Erscheinungsformen der Konchoiden noch einmal gesondert dargestellt:



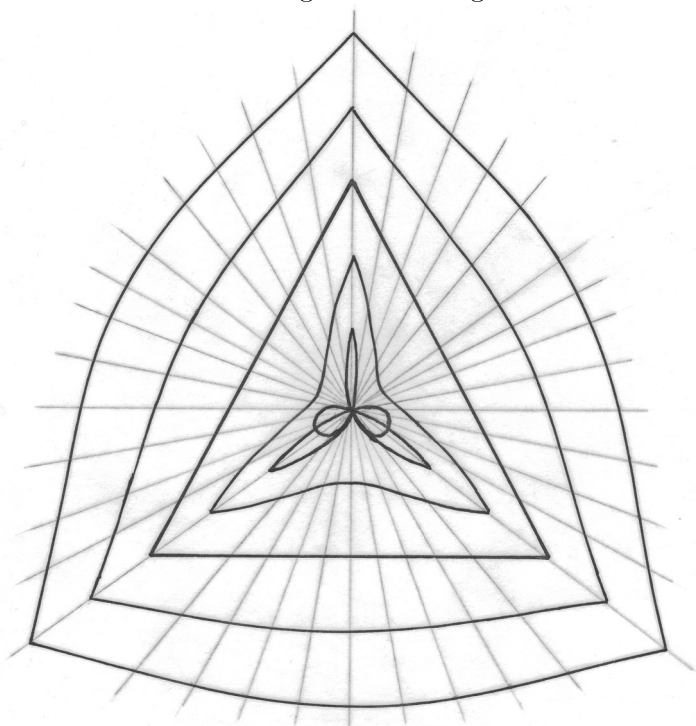
Zu bemerken ist außerdem noch, dass alle Konchoiden die Leitgerade als Asymptote haben. Nach dieser Einführung ergibt sich ein reiches Anwendungsgebiet:

Konchoiden geradliniger Figuren wie Dreiecke, Vierecke usw.

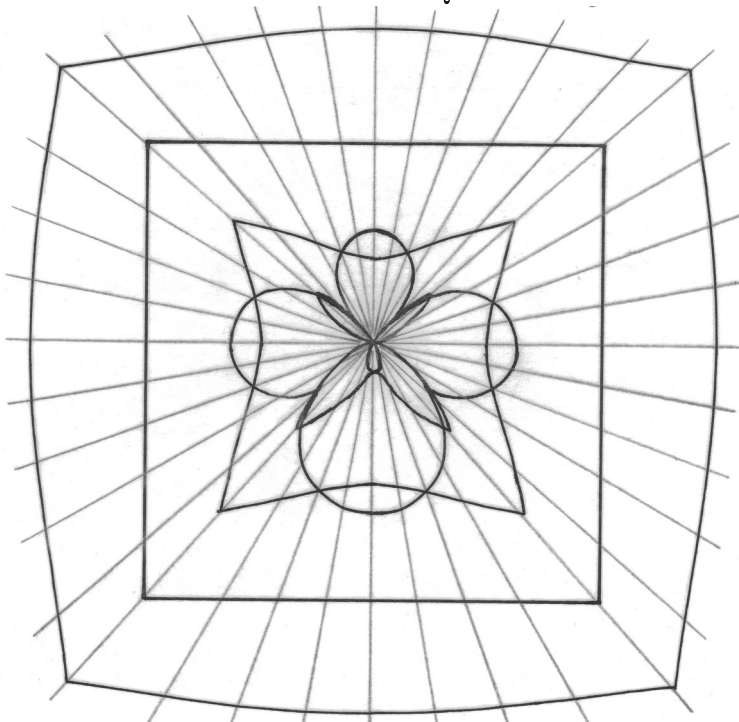
Man geht aus von einer geradlinigen Figur, wählt einen Pol A, entweder in der Mitte oder asymmetrisch, zieht durch diesen Pol ein Strahlenbüschel, welches die Figur in den L-Punkten schneidet. Fasst man nun die geradlinigen Strecken als Stücke der Leitlinien auf, so kann man nun die nach außen oder innen liegenden Konchoiden zeichnen. Dabei entstehen gekrümmte Figuren mit einem reichen Formenspiel.

Bemerkung: Sollen die Schüler den Formenreichtum zeichnend kennenlernen, so kann man ihnen einige Konstruktionsarbeit abnehmen und Vorlagen kopieren, in denen die geradlinige Figur und das Strahlenbüschel bereits eingezeichnet sind.

Konchoiden eines gleichschenkligen Dreiecks

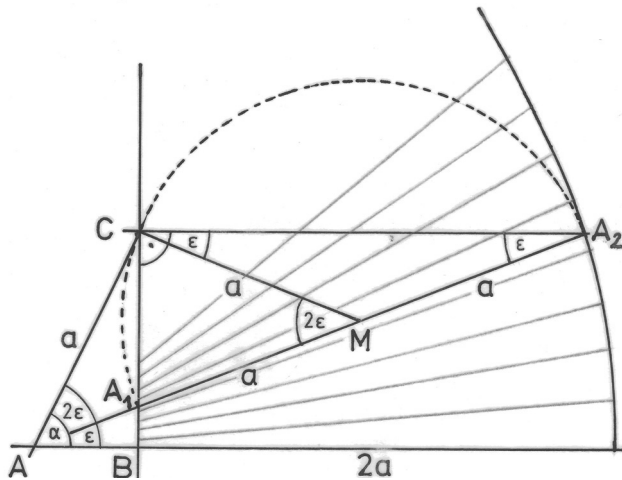


Konchoiden eines Quadrats



Anmerkung: Man kann die Konchoiden auch dadurch variieren, dass man die geradlinige Leitlinie durch eine kreisförmige ersetzt.

Konstruktion der Winkeldreiteilung nach Nikomedes



Konstruktion:

1. Winkel α im Pol A zeichnen.
2. $\overline{AC} = a$ beliebig abtragen bis C.
3. Lot von C auf den waagrechten Schenkel ziehen bis B.
4. Die $2a$ -Konchoide zeichnen mit Pol A und Leitgerade BC.
5. Durch C die Parallele zu AB ziehen. Diese trifft die Konchoide in A_2 .
6. AA_2 schneidet die Leitgerade BC in A_1 .
7. Nun ist Winkel $A_1AB = \frac{\alpha}{3}$.

Beweis:

1. M ist die Mitte von A_1A_2 , und es ist $\overline{A_1M} = \overline{MA_2} = a$ (wegen der Konchoide).
2. Der Thaleskreis über M mit Radius a geht durch C, da $A_1C \perp CA_2$.
3. Im gleichschenkligen Dreieck MCA_2 sind die Basiswinkel ϵ , der Außenwinkel bei M ist 2ϵ .
4. Im gleichschenkl. Dreieck ACM sind beide Basiswinkel 2ϵ .
5. Die Winkel CA_2A und A_2AB sind Wechselwinkel an Parallelen.

Nun ist der Winkel bei A: $\alpha = 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon$,
und folglich ist $\epsilon = \frac{\alpha}{3}$ q.e.d.

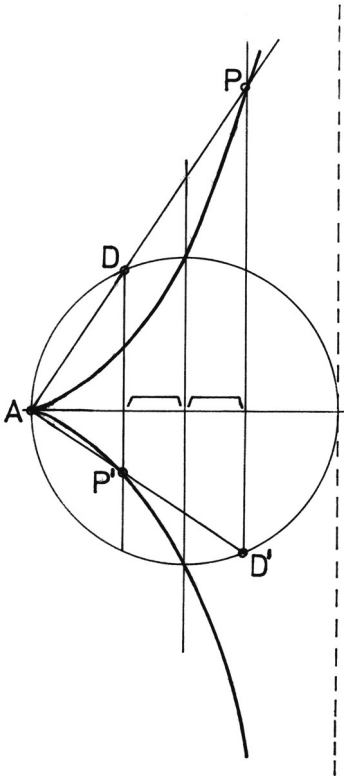
Diese Beweisführung ist genial, aber die Konstruktion ist nicht mit Zirkel und Lineal durchführbar, sondern sie benützt den Schnitt einer Geraden mit einer Kurve, die entweder punktweise konstruiert wurde oder – wie schon im Altertum – mit einem „Konchoidenzirkel“ gezeichnet wurde.³

Nachbemerkung: Diese Beweisführung kommt für die gesamte Klasse kaum in Betracht. Man kann sie jedoch begabten Einzelschülern oder einer kleinen Gruppe zur Bearbeitung übergeben, eventuell auch für ein Referat.

³ vgl. *Egmont Colerus*: Vom Punkt zu vierten Dimension – Geometrie für Jedermann, Paulzsolnay Verlag

Die Zissoide

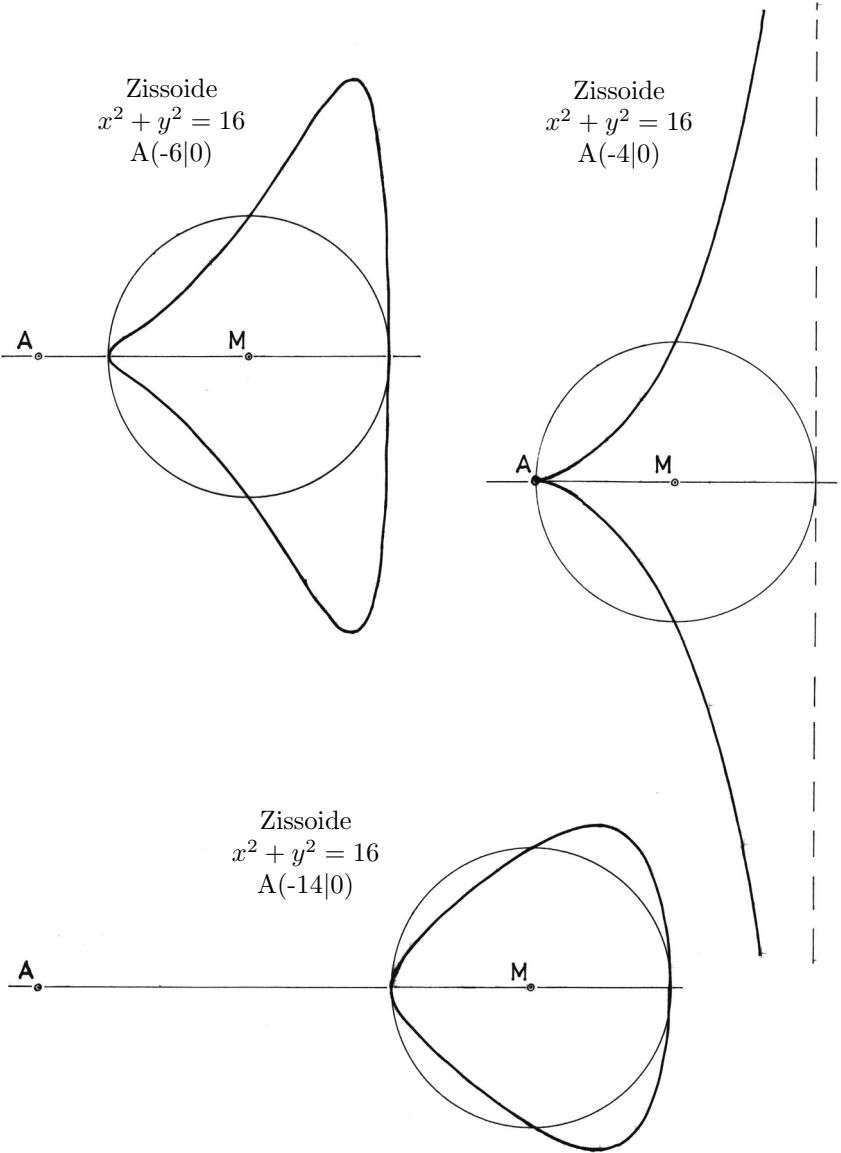
Auf der Suche nach einer Lösung des 2. delischen Problems, der Würfelverdoppelung, fand der Grieche *Diokles* (150 v.Chr.) eine Kurven-Konstruktion, die zu einer Lösung dieser Aufgabe führte: *Die Zissoide*, wegen ihrer Form „Efeu-Kurve“ genannt. Zuerst soll die Zissoide einige-male konstruiert werden, und zwar unter verschiedenen Anfangsbedin-gungen. Zum Schluss wird die Beweisführung des Diokles durchgeführt, wie man mit dieser Kurve das Problem der Würfelverdoppelung lösen kann.



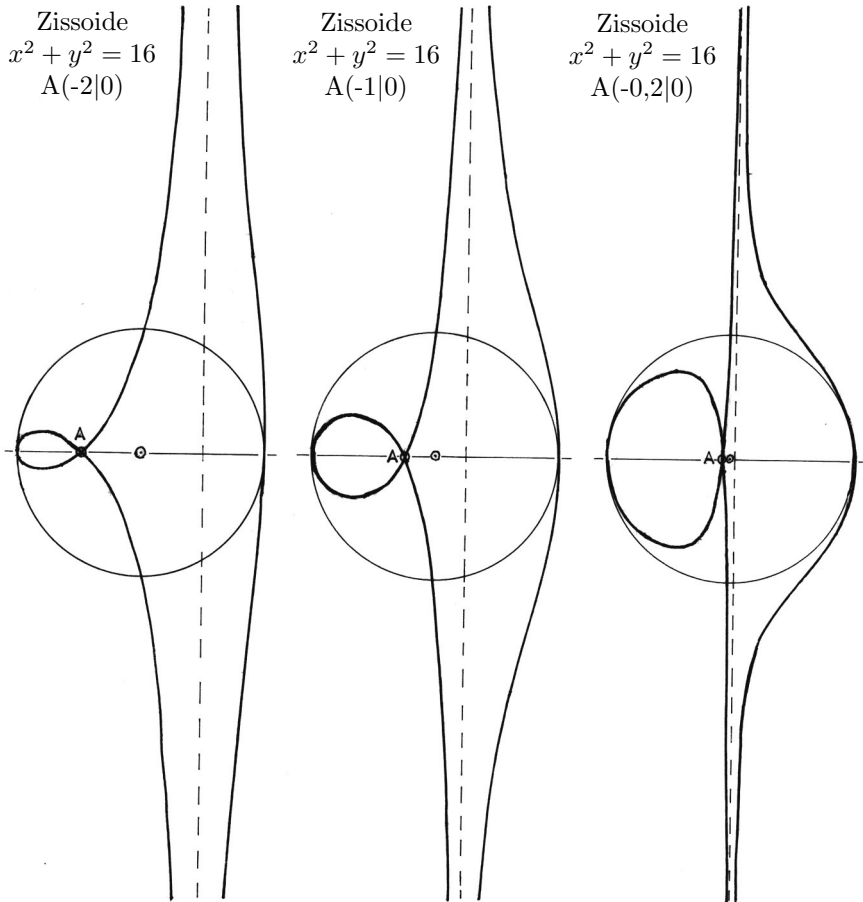
Definition: In einem Kreise werden ein waagrechter und ein senkrechter Durchmesser gezogen. Am linken Ende des waagrechten Durchmessers liegt der feste Pol A. Symmetrisch zum senkrechten Durchmesser zeichnet man zwei Sehnen. Verbindet man den Endpunkt D einer Sehne mit dem Pol A, so liegen die Schnittpunkte P dieser Verbindungslinie (AD) mit der Verlängerung der anderen Sehne (bzw. dieser selbst) auf einer Kurve, die Zissoide des Diokles.

Beschreibung: Die Zissoide trifft den Pol A mit einer Spitze, geht durch die Endpunkte des mittleren senkrechten Durchmessers und nähert sich asymptotisch der Tangente im rechten Endpunkt des waagrechten Durchmessers.

In den folgenden Zeichnungen (Seite 107) werden Zissoiden konstruiert, bei denen der Pol A auf dem verlängerten waagrechten Durchmesser vom Kreis weg wandert. (Die Maße sind durch die Kopie verkleinert.) Diese Zissoiden verlaufen ganz im Endlichen. Je weiter sich der Pol vom Kreis entfernt, desto mehr nähert sich die Zissoide wellenförmig der Gestalt dieses Kreises.



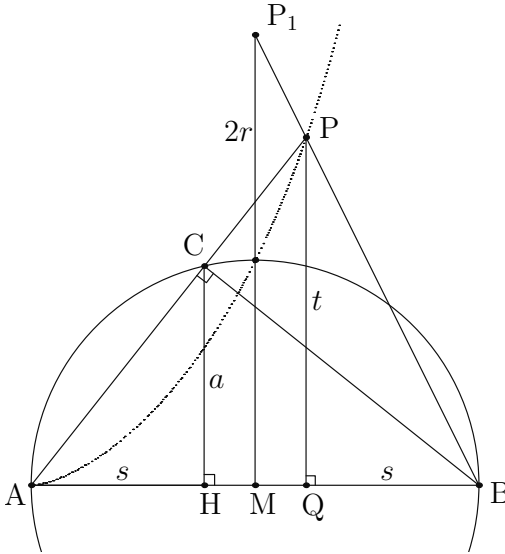
Nun folgen Zissoiden, bei denen der Pol A auf dem waagrechten Durchmesser zum Mittelpunkt des Kreises hin wandert. Es entstehen dabei „schleifenförmige“ Zissoiden. Symmetrisch zum Pol gibt es hierbei jedesmal eine senkrechte Asymptote. Je mehr der Pol auf den Mittelpunkt zuwandert, desto mehr wird die Zissoide zum Kreis mit einer Senkrechten.



Lösung der Aufgabe der Würfelverdoppelung mit der Zissoide des Diokles (150 v. Chr.)

Gesucht sind als Würfelkanten zwei Strecken a und s , deren dritte Potenzen sich wie 2:1 verhalten: $a^3 = 2 \cdot s^3$. Ist die Zissoide im Kreis über dem Durchmesser $AB = d = 2 \cdot r$, gezeichnet, so zeichnet man in M die zu AB senkrechte Strecke $AP_1 = 2 \cdot r$, verbindet P_1 mit B und erhält den Schnittpunkt P mit der Zissoide. Die Gerade AP schneidet den Kreis in

einem Punkt C. Die Lote von C und P auf den Durchmesser AB seien a und t mit den Fußpunkten H und Q.



Behauptung:

$$a^3 = 2 \cdot s^3 \text{ also } \left(\frac{a}{s}\right)^2 = 2 \cdot \frac{s}{a}$$

Beweis:

Wegen der Konstruktion der Zissoide ist $AH = QB = s$ und $AQ = HB = d - s$. Das rechtwinklige Dreieck AHC ist zu den beiden Dreiecken AQP und CHB ähnlich, so dass jeweils die Verhältnisse der großen zur kleinen Kathete übereinstimmen:

$$\frac{a}{s} = \frac{t}{d-s} \quad (1)$$

$$\frac{a}{s} = \frac{d-s}{a} \quad (2)$$

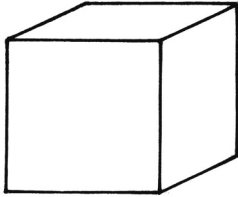
Hieraus folgt

$$\left(\frac{a}{s}\right)^2 = \frac{t}{d-s} \cdot \frac{d-s}{a} = \frac{t}{a} \quad (3)$$

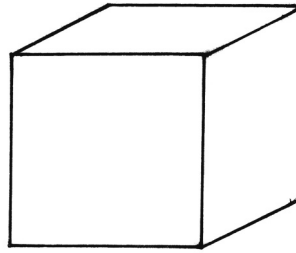
Da auch die Dreiecke MBP_1 und QBP ähnlich sind, ist $t = 2 \cdot s$. Durch Einsetzen in (3) erhält man die Behauptung:

$$\left(\frac{a}{s}\right)^2 = \frac{t}{a} = 2 \cdot \frac{s}{a}$$

1. Würfel: $V_1 = s^3$



2. Würfel: $V_2 = a^3$



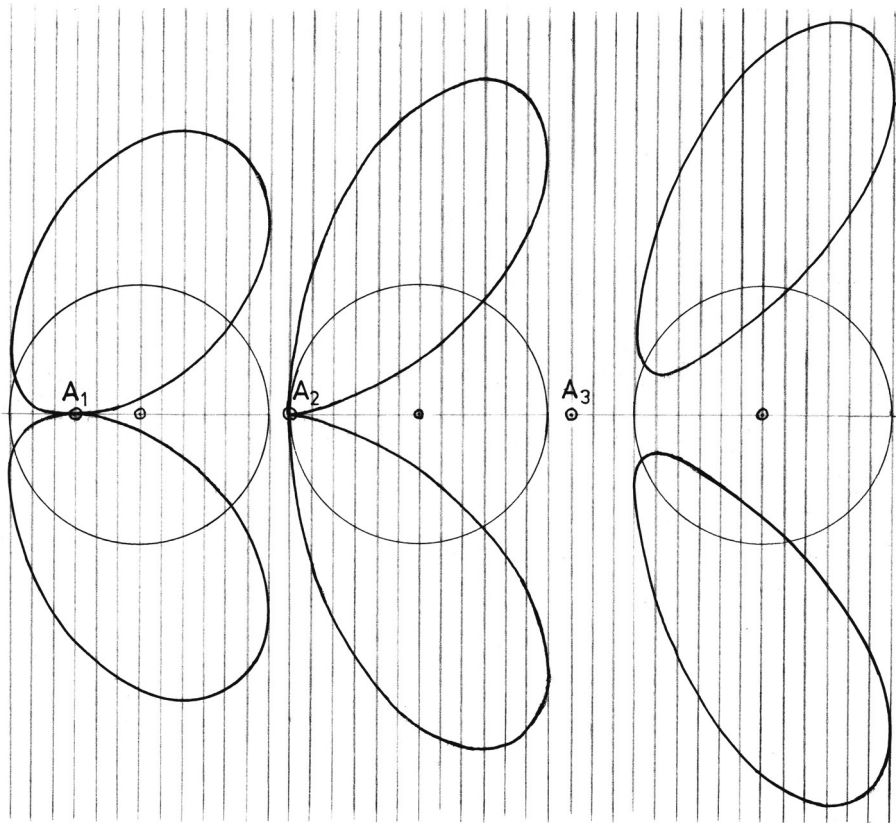
Will man einen beliebigen Würfel mit $s = s_1$ cm verwandeln, so muss man mit einer Strahlensatz-Figur a_1 konstruieren:

$$s_1 : a_1 = s : a$$

Nachbemerkung: Siehe Nachbemerkung zur Konstruktion der Winkeldreiteilung!

Zweiblatt-Formen

Wählt man den Pol A auf der waagrechten Durchmessergeraden, so erhält man eine Zweiblattform, und zwar als Achterform, als Zweiblattform mit Spitze oder als zwei getrennte Ovale, je nach Lage des Pols.



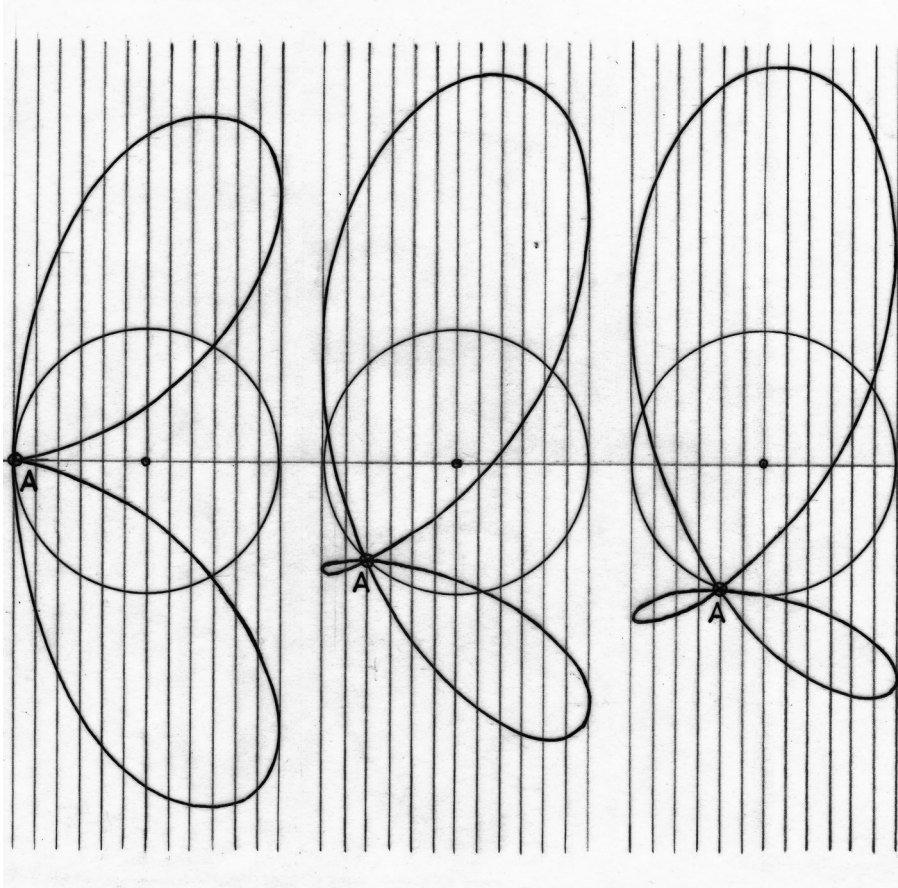
Liegt der Pol A_2 (wie bei der mittleren Figur) am linken Rand des Kreises, so erhält man die Zweiblattform, wo eine Spitze von innen den Blattübergang am Pol trifft.

Liegt der Pol A_1 (linke Figur) innerhalb des Kreises, so stoßen im Pol zwei Ovale achterförmig zusammen.

Liegt der Pol A_3 außerhalb des Kreises (rechte Figur), so besteht die Kurve aus zwei getrennten Ovalen.

Übergang vom Zweiblatt zum Dreiblatt

Lässt man in den folgenden Zeichnungen den Pol A von links nach unten auf der Kreisperipherie wandern, so erhält man den Übergang vom Zweiblatt zum Dreiblatt.



Die Spitze des Zweiblattes plustert sich auf zu einer kleinen Blattschleife und das untere Blatt verkleinert sich dabei. Je weiter der Pol sich abwärts bewegt, desto mehr wächst das linke untere Blatt, während das rechte untere immer mehr schrumpft.

Ist der Pol am unteren Punkt des Kreises angekommen, so sind die beiden unteren Blätter gleich groß und symmetrisch, es wird zur Dreiblattfigur, wie bei der ersten Zeichnung.

Man kann die Kurve vielfältig variieren, indem man z. B. den Pol A in immer neue Lagen bezüglich des Kreises bringt. Es ist aber auch möglich, den Kreis durch eine andere Linie zu ersetzen, z. B. durch eine Gerade. Oder man ersetzt die Parallelschar durch ein Geradenbüschel.

So schön die Vielfalt der möglichen Kurvenformen ist, so ist doch dar-

auf zu achten, dass man sich nicht in ihr verliert. Das einheitliche Konstruktionsprinzip muss immer die Übersicht und den Blick für den inneren Zusammenhang ermöglichen. Dies gilt natürlich auch für die anderen Kurvenarten.

Die Behandlung der geometrischen Ortskurven ließe sich noch sehr erweitern durch viele interessante Kurvenarten; z. B. die Epizykloiden, die Ptolemäus für die Erklärung der Planetenbahnen benützt, auch die Cassinischen Kurven mit der Lemniskate, die ein wichtiges geistiges und leibliches Gestaltungsprinzip sind.

Nun möchte ich noch auf die Literatur hinweisen, welche die zeichnerische Erstellung von geometrischen Ortskurven beinhaltet:

Die Behandlung von Parabel, Ellipse und Hyperbel ist sehr anschaulich dargestellt in dem Buch von Ernst Bindel: „Die Kegelschnitte. Ihre zeichnerische Gewinnung und ihre Beziehung zum Menschen“. (Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart).

Ebenso ist eine Kostbarkeit ersten Ranges das Buch von Louis Locher-Ernst: „Geometrisieren im Bereich wichtigster Kurvenformen“. (Neuauf-
lage im Verlag am Goetheanum, Dornach). Aufgrund von Bewegungs-
geometrie werden die Kegelschnitte, die Cassinischen Kurven und die
Logarithmoiden erzeugt, dazu werden auch noch Spiralen und Zykloiden
behandelt. Ferner sei hingewiesen auf folgende Werke:

Arnold Bernhard: „Projektive Geometrie, aus der Raumanschauung
zeichnend entwickelt“ (Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart), einzel-
ne Kapitel.

Louis Locher-Ernst: „Geometrische Metamorphosen“ (Philosophisch-
Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach), einzelne
Kapitel.

Louis Locher-Ernst: „Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven“
(Verlag Birkhäuser, Basel)

Schlussbetrachtung

Worauf ist in der Unterrichtspraxis zu achten, wenn sich die konstruktive Behandlung der Ortskurven in einem gesunden Arbeitsprozess abspielen soll? Aus der Aufgabenstellung ergibt sich unmittelbar die Gelegenheit, den Unterrichtsablauf durch einen lebendigen Wechsel von Tun und Betrachten zu gestalten. Die exakte Konstruktion der einzelnen Kurvenpunkte verlangt einen sicheren Überblick über das mit jedem Schritt wachsende Gefüge von geraden Linien, Kreisen und Punkten, außerdem

eine ruhige Hand. Sollen die so konstruierten Punkte anschließend mit freier Hand zu der gewünschten Ortskurve verbunden werden, so wird diese Tätigkeit von feinen, unmerklichen Sinnesprozessen begleitet. Neben dem Sehsinn sind es vor allem der Eigenbewegungssinn und der Gleichgewichtssinn, die dabei betätigt werden. Mit „Gleichgewicht“ ist hier selbstverständlich ein weiter gefasster Begriff gemeint als derjenige, der sich auf die Statik gründet. „Ausgewogenheit“ im weitesten Sinn bringt besser zum Ausdruck, was hier gemeint ist. Man beobachte einmal sich selbst beim Zeichnen, wenn man versucht, eine Reihe von zuvor konstruierten Punkten durch eine Freihandkurve möglichst exakt zu verbinden. Mit zunehmender Übung erwirbt man sich allmählich einen sicheren Sinn für „die rechte Bahn“, auf der sich ein Punkt bewegt, wenn er die Kurve durchläuft. Abweichungen von dieser rechten Bahn rufen das Bedürfnis nach Korrektur hervor, um die Unausgewogenheit der Zeichnung zu beseitigen. Der Gleichgewichtssinn hat sich geregt. – So ist die praktische Seite des Tuns in solch einem Unterricht auch ein Feld der Sinnesschulung.

Jegliches Tun richtet sich auf Unfertiges und ist daher zukunftsgerichtet. Im Gegensatz dazu richtet sich die Betrachtung auf das Gewordene. Sie ist vergangenheitsorientiert. Das Gegensatzpaar „Ausweitung – Konzentration“ kann in diesem Zusammenhang als die Doppelgeste eines so verstandenen Unterrichts gelten, im Sinn des Goethe-Gedichtes, welches mit den Worten beginnt: „Im Atemholen sind zweierlei Gnaden ...“.

Ein weiterer Prozess, der in diesem Unterricht eine gewichtige Rolle spielt, ist die Bildung von Vorstellungen, wobei es hier vor allem um bewegliche Vorstellungen geht.

Im Zusammenhang mit unserem Thema sind zwei Arten von beweglichen Vorstellungen zu unterscheiden. Die einfachere Art hat es mit einer einzelnen Kurve zu tun, die als die Spur eines Punktes entsteht, der sich in gesetzmäßiger Weise bewegt. Hinzu kommt die andere, schwierigere Art der Vorstellungsbildung. Wenn z. B. bei einer Konchoide der Abstand d des Pols A von der Leitlinie L fest bleibt, die Länge a sich jedoch stetig verändert, denn entsteht die Aufgabe, sich ein inneres Bild davon zu verschaffen, wie sich eine Kurve als ganzes kontinuierlich verwandelt. Das zugrunde liegende Gestaltungsgesetz bleibt dabei im Prinzip erhalten. Solche Prozesse führen in das Gebiet der geometrischen Metamorphosen. Es ist so anspruchsvoll, dass es Neuntklässler i. a. noch überfordert. Es sollte der oberen Oberstufe vorbehalten bleiben, wo das Thema „Metamorphosen“ auch außerhalb der Geometrie eine wichtige Rolle spielt. Selbst wenn einmal mehrere Kurven nach dem gleichen Konstruktionsprinzip auf ein Blatt gezeichnet werden (wie z. B. bei den Konchoiden

auf Seite 101), sollte doch der Akzent auf die Entstehung jeder einzelnen Kurve gelegt werden, und nicht auf die ganze Kurvenschar als das Ergebnis der Verwandlung *einer* Kurve. So darf die Beschäftigung mit geometrischen Ortskurven im 9. Schuljahr auch als eine Vorstufe zum späteren Verständnis des Metamorphosebegriffs angesehen werden.

Schließlich sei der Blick noch auf eine Eigentümlichkeit in der Gestaltbildung gelenkt: auf die Dreiheit von Welle, Spitze und Schleife. Die Frage ist, ob diese Dreiheit als Bild für Sachverhalte angesehen werden darf, die über die Geometrie hinaus reichen. Nicht als pure Analogie, sondern innerlich begründet. Ernst Bindel hat in seinem Buch über die Kegelschnitte eine Beziehung zwischen den drei charakteristischen Kegelschnittgestalten und dem dreigliedrigen Menschen dargestellt.⁵

Lässt sich für die Dreiheit von Welle, Spitze und Schleife Vergleichbares finden? Bei den Konchoiden kann man mit der Welle die Empfindung der Annäherung an ein Ziel verbinden, die Spitze mit dem Erreichen und die noch weiter vorwärts dringende Schleife mit dem vollständigen Durchdringen einerseits und der Entstehung von etwas völlig Neuem andererseits.

Am Anfang des menschlichen Erkenntnisprozesses steht das Ringen um ein Ziel. Man spürt, dass es existiert. Seine Ausgestaltung liegt noch im Dunkeln. Dann wird das Ziel erreicht – in *einem* Moment. Die Sache ist gleichsam „auf den Punkt gebracht“. Nun folgt die gründliche Durchdringung, und in der Anwendung wird Neues geschaffen. Die Schleife als Bild des Hervorquellens, verbunden mit der Entstehung von etwas völlig Neuem.

Soweit, wie man durch tastendes Suchen nach realen Entsprechungen selbst vorankommt, mag davon etwas in den Unterricht einfließen. Notwendig ist jedoch, dass dieses Suchen zu echter innerer Gewissheit geführt hat.

⁵Siehe das Kapitel „Die Idee einer Dreigliederung“ (S. 30 ff) und die nachfolgenden Kapitel.

Die Irrationalität in Arithmetik und Geometrie

**Die Wechselwegnahme und der euklidische Algorithmus.
Kommensurabilität, Wurzelziehen und Kettenbrüche.**

PETER BAUM

1. Vorbemerkung

In der neunten Klasse hat man in der Regel zwei Mathematikepochen zur Verfügung. Eine von ihnen hat Arithmetik und Algebra zum Thema, die andere Geometrie. An vielen Waldorfschulen ist es üblich, in der Geometrieepoche die Kegelschnitte (Parabel, Ellipse und Hyperbel) zu behandeln, etwa nach dem gleichnamigen Büchlein von Ernst Bindel. Ich habe meistens die Kegelschnitte im Rahmen der darstellenden Geometrie durchgenommen und im Hauptunterricht den Schwerpunkt in die Ähnlichkeitslehre gesetzt, ausgehend von den Kongruenzsätzen, die sich aus der Eindeutigkeit der Lösungen entsprechender Dreieckskonstruktionen ergeben, und hinführend zu wichtigen Sätzen (Satzgruppe des Pythagoras, Peripheriewinkelsatz, Sekanten-Tangenten-Satz, Satz des Ptolemäus). Der folgende Beitrag stellt nicht den Inhalt einer Epoche dar, sondern behandelt aus beiden Epochen Teilgebiete, die inhaltlich zusammenhängen und historisch bedeutsam sind. Im Anhang ist der Zusammenhang zwischen der Pell'schen Gleichung und den Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen dargestellt.

2. Einstieg in die euklidische Geometrie

Der Geometrieunterricht in der neunten Klasse kann umso schärfer die gedankliche Struktur der Sachverhalte mit einer hierzu auch notwendigen Kargheit herausarbeiten, je reichhaltigere Erfahrungen in der Mittelstufe im geometrischen Zeichnen gemacht worden sind. Wie in anderen Fächern auch (z.B. Geschichte und Biologie) wird der in Klasse 8 behandelte Stoff aufgegriffen, aber nun unter einem neuen Aspekt.

Ich beginne die Epoche daher gerne mit der Wiederholung der Grundkonstruktionen mit Zirkel und maßstabslosem Lineal. Was können diese beiden Hilfsmittel leisten? Zunächst erlauben sie lediglich, zwei vorhandene Punkte durch eine Gerade zu verbinden und um einen vorhandenen Punkt einen Kreis mit einem bestimmten Radius zu zeichnen. Zur Beschreibung genügen zwei Sätze:

„Ich zeichne durch die Punkte A und B eine Gerade g .“

„Ich zeichne um den Punkt M einen Kreis mit dem Radius r .“

Die ordnende Kraft der Geometrie wird unterstützt, wenn man nun in den Formulierungen auf alles Beiwerk, welches in der Mittelstufe den Sinn hatte, dem Schüler seine Tätigkeit bewusst zu machen, zu Gunsten des reinen Konstruktionsgedanken verzichtet („Ich nehme den Zirkel und steche im Punkt M ein und ziehe einen Kreisbogen ...“ usw). Gewiss kann man eine Gerade nie vollständig zeichnen, aber sie sollte stets als Ganzes gedacht werden, damit nicht mögliche Schnittpunkte verloren gehen. Ebenso sollte man immer den ganzen Kreis im Auge haben, auch wenn man ihn vielleicht nicht vollständig zu Papier bringen kann oder will. Was man zeichnet ist ohnehin nur eine Annäherung an das Gemeinte: Die Gegenstände der Geometrie selbst (Gerade, Kreis, Punkt) sind reine Gedankendinge, die es als Sinneswahrnehmung gar nicht gibt. Was man eben noch für einen exzellenten Punkt hielt, mit spitzem Bleistift H7 hingehaucht, erweist sich unter einem Mikroskop als ein Graphitgebirge beachtlicher Ausdehnung. Natürlich kann es sich nicht darum handeln, philosophische Spekulationen zu kultivieren. Die Frage: was ist ein Punkt, was ist eine Gerade, sollte dennoch angeschnitten werden, um beim Schüler das Bewusstsein für Erkenntnisprobleme zu wecken.

Wichtig ist ferner die Bezeichnung des Gezeichneten. Man sollte mit möglichst wenig Bezeichnungen auskommen. Eine Zusammenstellung von bewährten und üblichen Bezeichnungen findet sich in Abb. 2.1.

Der Epochenunterricht in der Waldorfschule kann nur dann seine Wirksamkeit voll entfalten, wenn man das Prinzip der Wiederholung beachtet. Auch in der neunten Klasse sollte man sich der Grundkonstruktionen (Mittelsenkrechte, Lot, Parallele, Winkelhalbierende), die (hoffentlich) schon in der sechsten Klasse behandelt wurden, versichern. Wenn bei den Grundkonstruktionen eine Größe gegeben ist, so bedeutet dies zunächst nur, dass sie gezeichnet vorliegt. Wenn dann besprochen wurde, wie man eine Strecke und einen Winkel ohne Maßstab und Winkelmesser nur mit dem Zirkel abtragen kann und dies auch etliche Male durchgeführt wurde, werden Millimetermaß und Geo-Dreieck zugelassen.

Die klassischen Dreieckskonstruktionen aus drei gegebenen Größen bieten nun ein reiches Übungsfeld. An wirklichen und scheinbaren Lösungen kann

$A, B, C, \dots$	Punkte
$a, b, c, \dots$	Strecken oder Geraden
ABC	Dreieck
abc	Dreiseit
$ab=C$	Schnittpunkt der Geraden a und b
$AB=c$	Verbindungsgerade der Punkte A und B
$\overline{AB}$	Strecke zwischen Punkt A und Punkt B
$\sphericalangle ab$	Winkel zwischen den Halbgeraden a und b
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Winkel
$\sphericalangle ABC = \beta$	Winkel im Dreieck ABC mit Scheitelpunkt B
$a \parallel b$	Parallele Geraden
$a \perp b$	Gerade a steht rechtwinklig auf Gerade b
$P \in g$	Punkt P liegt auf der Geraden g
$g \in P$	Gerade g geht durch Punkt P
$P \notin g$	Punkt P liegt nicht auf der Geraden g
$g \notin P$	Gerade g geht nicht durch den Punkt P
M_a, M_b, M_c	Mittelpunkte der Dreiecksseiten a, b, c
m_a, m_b, m_c	Mittelsenkrechte der Dreiecksseiten a, b, c
$w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$	Winkelhalbierende im Dreieck
s_a, s_b, s_c	Seitenhalbierende im Dreieck
h_a, h_b, h_c	Höhen im Dreieck
H_a, H_b, H_c	Höhenfußpunkte im Dreieck
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	Die Dreiecke ABC und DEF sind kongruent
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Die Dreiecke ABC und DEF sind ähnlich

Abbildung 2.1. Bezeichnungen

man den Unterschied zwischen einer Konstruktion und der Herstellung einer schönen Zeichnung deutlich machen. Wenn man die Konstruktion durchschaut, darf man auch zu anderen Hilfsmitteln greifen. Die Genauigkeit einer Zeichnung ist davon unabhängig. Beispielsweise kann man von einem Punkt außerhalb eines Kreises die Kreistangenten sehr genau mit dem Augenmaß zeichnen, ohne sie mit dem Thaleskreis zu konstruieren - aber man muss die Konstruktion kennen. Es geht hier um die Klärung der Begriffe Konstruktion, Zeichnung, Genauigkeit, die in den vorausgehenden Klassen kaum thematisiert wurde.

Wieviel Zeit man im Unterricht auf die Dreieckskonstruktionen verwendet, hängt davon ab, wie ausführlich sie vom Klassenlehrer in der Mittelstufe betrieben wurden. Sie eignen sich gut als Hausaufgabe zum Knobeln, besonders für die begabten Schüler. Allerdings muss man aufpassen, dass man keine unlösbaren Aufgaben stellt. Eine systematische Übersicht über alle Dreieckskonstruktionen mit mehreren Beispielaufgaben ist im Klett-Verlag erschienen.¹

3. Das Messen

In der neunten Klasse wird man auch Flächenberechnungen und Körperberechnungen durchführen. Vorher oder nachher ist es ratsam, das Messen als solches zu behandeln.

Was heißt messen? Was wird eigentlich gemessen?

Es stellt sich heraus, dass eine Messung letztlich darauf beruht, etwas zu zählen. Man zählt, wie oft eine vom Menschen festgesetzte Größe, die Maßeinheit, in eine gleichartige Größe hineinpasst. Meistens will man zwei gleichartige Größen mit Hilfe einer kleineren dritten gleichartigen Größe miteinander vergleichen. Längen misst man mit Längen, Gewichte mit Gewichten, Flächen mit Flächen usw. Bezüglich des Messens von Flächen und Volumina herrscht (nicht nur bei den Schülern) der weitverbreitete Irrtum, man würde diese durch Längen messen, und der Flächeninhalt sei dann das Produkt zweier Längen, und das Volumen das Produkt dreier Längen. In Wirklichkeit zählt man aber auch hier, wie oft eine Vergleichsfläche - die Maßeinheit - in die zu messende Fläche hineinpasst, und wie oft ein Vergleichsvolumen in das zu messende Volumen hineinpasst. Da die Maßeinheit einer Fläche üblicherweise ein Quadrat ist, kann man bei einem Rechteck das Auszählen der Quadrate abkürzen, indem man die Anzahl der Reihen mit der Anzahl der Spalten multipli-

¹ K. Herterich: Die Konstruktion von Dreiecken, Klett Verlag

ziert. Das Messen der beiden Rechteckseiten dient dann nur zur Ermittlung der Spaltenzahl und der Zeilenzahl. Dies wird besonders deutlich, wenn man als Flächeneinheit (F.E.) kein Quadrat sondern ein kleines Rechteck nimmt:

1							
2							
3							
4							
	1	2	3	4	5	6	7

Abbildung 3.1. Flächenberechnung

Auch hier (Abb. 3.1) ist die Maßzahl des Flächeninhalts (Anzahl der F.E.) das Produkt von Spaltenzahl und Zeilenzahl – hier $4 \cdot 7 = 28$ – und eben nicht ein „Produkt“ von Längeneinheiten, was durch die übliche Schreibweise $m \cdot m = m^2$ fälschlicherweise suggeriert wird. Dass man in der Physik mit Maßeinheiten auch so „rechnen“ kann, bedarf jeweils einer besonderen Begründung und soll hier nicht thematisiert werden.

Wie genau kann man messen?

Beim Messen einer Strecke wird die Maßeinheit, z.B. ein Meter, so oft es geht auf der Strecke abgetragen, beispielsweise vier mal. Dann bleibt meist eine Reststrecke übrig, die kleiner ist als die Maßeinheit. Die zu messende Strecke ist dann größer als vier Meter und kleiner als fünf Meter. Diese Angabe ist in den meisten Fällen nicht ausreichend, deswegen misst man die Reststrecke mit einer kleineren Maßeinheit, dem Zentimeter. Aber auch hier entsteht oft dasselbe Problem: es bleibt eine Reststrecke übrig, die kleiner ist als ein Zentimeter. Für manche Fälle mag die Genauigkeit ausreichen, etwa für die Länge eines Gartenbeetes. In vielen Fällen misst man aber die Reststrecke wieder mit einer kleineren Maßeinheit, dem Millimeter. Aber auch dann wird oft eine Reststrecke übrig bleiben, die kleiner ist als ein Millimeter. Wir bemerken: die Fälle, bei denen die Maßeinheit genau in die letzte Strecke hineinpasst, sind in der Praxis eher die Ausnahme. Für die praktische Messung hat das jedoch keine Bedeutung: man geht zu immer kleineren Bruchteilen des Meters über, bis die Genauigkeit für den Zweck der Messung ausreicht. In der Messtechnik gerät man dann ohnehin irgendwann an eine Grenze, so dass jenseits dieser Grenze die Messung ihren Sinn verliert. Die kleinste Maßeinheit, die man technisch verwirklichen kann, passt dann praktisch ohne Rest ganzzahlig in jede zu messende Strecke hinein.

Ist dies aber auch theoretisch der Fall? Kann man zu zwei gegebenen Strecken immer eine dritte Strecke - eine Maßeinheit - finden, so dass beide Strecken jeweils ein Vielfaches der Maßeinheit sind?

Bildet man aus den beiden gegebenen Strecken ein Rechteck, dann kann die Frage auch so gestellt werden: gibt es zu diesem Rechteck ein Quadrat, mit dem man die Rechteckfläche vollständig auspflastern kann?

Wenn es ein solches Quadrat gibt, nennt man die Rechteckseiten kommensurabel, d.h. sie haben dann ein gemeinsames Maß. Gibt es ein solches Quadrat nicht, heißen die Rechteckseiten inkommensurabel.

So haben z.B. die Strecken $a = 3,40\text{ m}$ und $b = 4,10\text{ m}$ das gemeinsame Maß $c = 0,1\text{ m} = 1\text{ dm}$, denn es ist $a = 34c$ und $b = 41c$, und die Rechteckfläche kann mit $34 \cdot 41 = 1394$ Quadraten der Seitenlänge $c = 1\text{ dm}$ überdeckt werden. Natürlich ist jeder Bruchteil von c ebenfalls ein gemeinsames Maß von a und b .

Nachdem das Problem den Schülern durch weitere Beispiele bewusst gemacht wurde, kann nun ein Verfahren gesucht werden, wie man auf geometrischem Wege das größte Quadrat findet, welches ein gegebenes Rechteck vollständig ausfüllt. Auf einem Karoblatt entwickelt man das Verfahren der Wechselwegnahme an Beispielen:

$$a = 12\text{ cm}, b = 5\text{ cm} \quad a = 12\text{ cm}, b = 7\text{ cm} \quad a = 20\text{ cm}, b = 12\text{ cm}$$

Die kleinere Rechteckseite b wird auf der größeren Rechteckseite a so oft abgetragen, wie es geht. Es entsteht ein Rest c mit $c < b$. Dieser Rest c wird auf b so oft abgetragen, bis wieder ein Rest d mit $d < c$ entsteht, usw. Beim Karoblatt bleibt schließlich irgendwann kein Rest mehr übrig. Das Quadrat mit dem letzten Rest als Kantenlänge ist das Gesuchte, es füllt das gegebene Rechteck vollständig aus.

Dieses Verfahren bedarf der sorgfältigen Vorbereitung und genauen Tafelzeichnung, in der die einzelnen Strecken farbig dargestellt werden sollten, damit auch schwache Schüler das „Rezept“ verstehen. Langsames Vorgehen ist hier ökonomisch.

Sind mehrere geeignete Beispiele durchkonstruiert worden, sind die Schüler davon überzeugt, dass immer der Rest irgendwann Null wird und somit immer ein Quadrat gefunden werden kann, welches das Rechteck vollständig ausfüllt. Sie befinden sich mit dieser Meinung in guter Gesellschaft der alten Griechen.

Nun kann man den Begriff des Verhältnisses zweier kommensurablen Strecken a und b klären.

Wenn sie ein gemeinsames Maß c haben, dann ist $a = m \cdot c$ und $b = n \cdot c$, wobei m und n ganze Zahlen sind. Das Verhältnis von a zu b ist dann der Bruch $\frac{m}{n}$, also ein reines Zahlenverhältnis.

In welchem Verhältnis steht denn nun die Quadratseite zur Quadratdiagonalen?

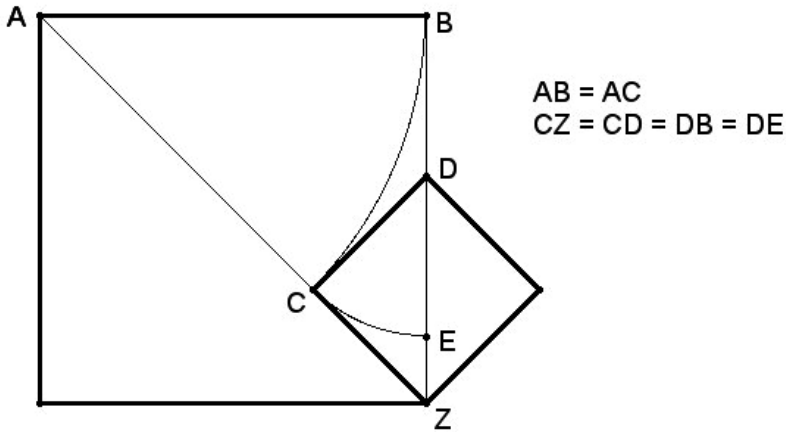


Abbildung 3.2. Inkommensurabel

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir ein gemeinsames Maß suchen. Hierzu führen wir das Verfahren der Wechselwegnahme durch: zunächst tragen wir die Quadratseite AB auf der Quadratdiagonalen AZ ab und erhalten Punkt C. Die Senkrechte in C auf die Diagonale AZ schneidet die Quadratseite in Punkt D. Man kann nun zeigen, dass das Dreieck $\triangle CDZ$ rechtwinklig und gleichschenkelig ist, also zu einem Quadrat ergänzt werden kann, und dass $\overline{CD} = \overline{DB}$ ist. Dies sollten die Schüler selbst beweisen, z.B. durch Anwendung vorher gelernter Kongruenzsätze.

Die Fortsetzung der Wechselwegnahme führt nun dazu, den Diagonalenrest $\overline{CZ}$ auf der Quadratseite $\overline{BZ}$ so oft wie möglich abzutragen. Nach dem eben Bewiesenen erhalten wir zunächst Punkt D, weiteres Abtragen führt zu Punkt E. Dieser letzte Schritt heißt aber offenbar, dass wiederum eine Quadratseite (CD) auf der zugehörigen Quadratdiagonalen (DZ) abgetragen wird, womit ja, nur im größeren Format, die Wechselwegnahme begonnen wurde. Sie kann also gar nicht zu einem Ende kommen, es bleibt immer ein Rest übrig. Folglich gibt es kein gemeinsames Maß von Quadratseite und Quadratdiagonale, man nennt diese daher inkommensurabel.

Andererseits können wir die Diagonale mit dem Satz des Pythagoras berechnen: für $a = 1\text{ m}$ erhalten wir $d^2 = 2 \cdot a^2$ und $d = \sqrt{2} \cdot a$, also $d = \sqrt{2}\text{ m}$. Demnach ist $\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{2}\text{ m}}{1\text{ m}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ und es ist nach dem vorhergehenden offenbar nicht möglich, $\sqrt{2}$ als gewöhnlichen Bruch zu schreiben.

Ein weiteres Beispiel für inkommensurable Strecken liefert das regelmäßige Fünfeck. Die Konstruktion desselben sollte in der Mittelstufe bereits behandelt worden sein und kann nun gegebenenfalls wiederholt werden oder neu angelegt werden. Nicht so bekannt, aber übersichtlicher und schöner als die übliche Konstruktion ist die folgende Konstruktion des Fünfecks aus dem Umkreis (siehe Abb. 3.3):

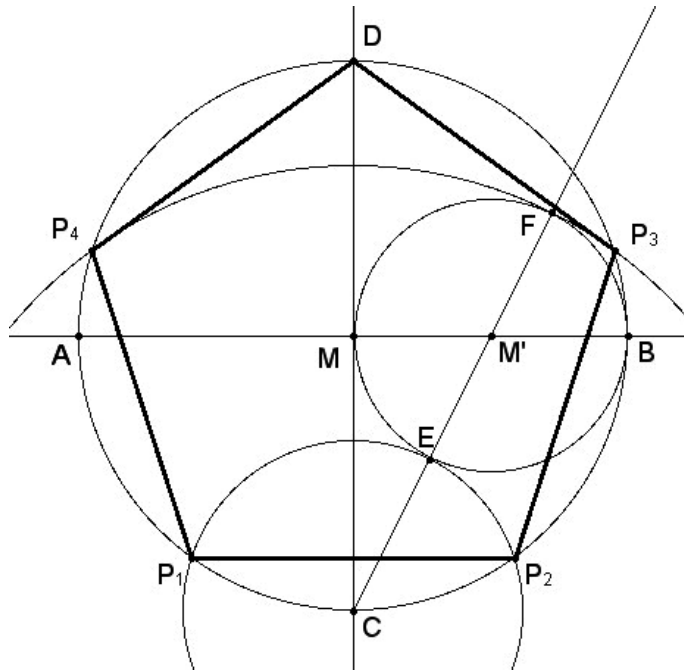


Abbildung 3.3. Konstruktion des Fünfecks aus dem Umkreis

1. Kreis um M mit dem Radius r
2. Durchmesser AB und CD mit $AB \perp CD$
3. Radius $r = MB$ wird durch Punkt M' halbiert
4. Gerade CM'
5. Der Kreis um M' mit $r' = MM'$ schneidet die Gerade CM' in E und F
6. Die Kreise um C mit den Radien $r_1 = CE$ und $r_2 = CF$ schneiden den Umkreis in den Fünfeckpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 . Der fünfte Punkt ist D.

Man kann das regelmäßige Fünfeck auch mit Hilfe der charakteristischen Winkel $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 2\alpha = 72^\circ$, $\gamma = 3\alpha = 108^\circ$ zeichnen. Hierzu sollte man die Schüler jedoch erst herausfinden lassen, dass diese Winkel dort vorkommen. Folgende Überlegung ist möglich (vgl. Abb. 3.4):

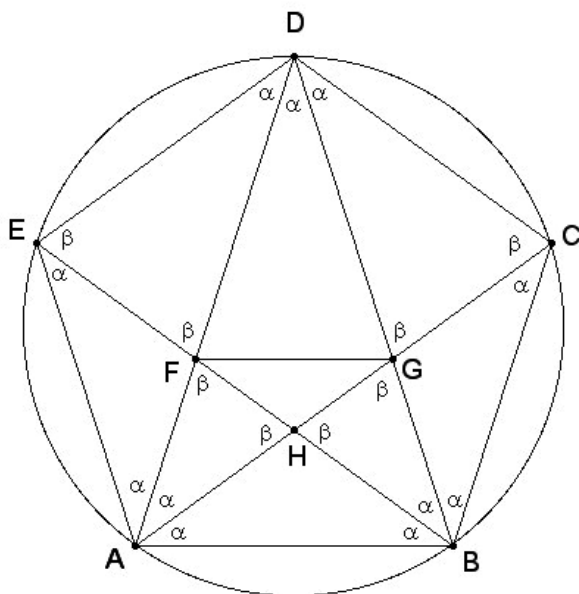


Abbildung 3.4. Die Winkel im regelmäßigen Fünfeck

Im Fünfeck zeichnen wir vier Diagonalen und erhalten die Schnittpunkte F, G und H. Den Peripheriewinkel über der Fünfeckseite nennen wir α und die beiden Peripheriewinkel über der Fünfeckdiagonalen nennen wir β und γ . Dann ist unmittelbar ersichtlich, dass $\gamma = 3\alpha$ und $\beta = 2\alpha$ ist. Aus der Winkelsumme im Dreieck folgt dann $5\alpha = 180^\circ$, also $\alpha = 36^\circ$ und somit $\beta = 72^\circ$ und $\gamma = 108^\circ$.

Nach dem Satz vom Außenwinkel sind die Winkel bei F, G und H ebenfalls $\beta = 2\alpha$. Daher sind die sieben Dreiecke DEF, CDG, FGD, AHE, BHC, ABF, ABG gleichschenkelig und kongruent, d.h. DF, DG, HE, HC, AG und BF sind Fünfeckseiten.

Nun fragen wir nach dem Verhältnis der Fünfeckdiagonale zur Fünfeckseite und suchen ein gemeinsames Maß mit dem Verfahren der Wechselwegnahme. Das Abtragen der Seite auf der Diagonalen AD führt zum Punkt F. Der Rest AF muss nun auf der Fünfeckseite abgetragen werden. Das Trapez ABGF kann nun wegen $\overline{AF} = \overline{FG} = \overline{GB}$ und den darin

auftretenden Winkeln 36° und 72° durch einen fünften Punkt zu einem regelmäßigen Fünfeck ergänzt werden, in dem die Strecke AG eine Diagonale ist. Die Aufgabe, die Reststrecke AF auf einer Seite des großen Fünfecks, z. B. AG, abzutragen, bedeutet wiederum, dass eine Fünfeckseite auf einer Fünfeckdiagonale abgetragen werden soll. Es bleibt also wieder ein Rest, beispielsweise die Strecke HG, der wiederum die Seite eines kleineren regelmäßigen Fünfecks ist, in dem die Strecke AF = FG die Diagonale darstellt. Da bei dieser Wechselwegnahme immer ein Rest bleibt, sind die Seite und die Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks inkommensurabel.

Der geometrische Vorgang der Wechselwegnahme hat eine arithmetische Analogie, die offenbar wird, wenn man die oben genannten Zahlenbeispiele (in Abschnitt 3 auf Seite 122) aufschreibt:

$$\begin{array}{ll} 12 \text{ cm} = 2 \cdot 5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} & 12 \text{ cm} = 1 \cdot 7 \text{ cm} + 5 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} = 2 \cdot 2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} & 7 \text{ cm} = 1 \cdot 5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} \\ 2 \text{ cm} = 2 \cdot 1 \text{ cm} & 5 \text{ cm} = 2 \cdot 2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} \\ & 2 \text{ cm} = 2 \cdot 1 \text{ cm} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 \text{ cm} = 1 \cdot 12 \text{ cm} + 8 \text{ cm} \\ 12 \text{ cm} = 1 \cdot 8 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \\ 8 \text{ cm} = 2 \cdot 4 \text{ cm} \end{array}$$

Die Maßzahl der so erhaltenen Quadratseite ist ein gemeinsamer Teiler der Maßzahlen der Rechteckseiten, und zwar der größte.

4. Der euklidische Algorithmus und die Kettenbrüche

Das arithmetische Verfahren, von zwei Zahlen, (z.B. 854 und 679) den größten gemeinsamen Teiler zu finden, heißt *euklidischer Algorithmus*. Es wird am Anfang des siebten Buches der „Elemente“ des Euklid beschrieben und sollte eigentlich in der Mittelstufe im Zusammenhang mit dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) zweier Zahlen behandelt werden. Es geht folgendermaßen:

- (1) Wie oft geht die 679 in die 854? 1 mal, die 1 schreibt man oben zwischen die Zahlen 854 und 679.
- (2) Welcher Rest bleibt? Hierzu schreibt man 1 mal 679 unter die 854,

berechnet die Differenz 175 und setzt diesen Rest hinter die 679.
Denn nun wiederholt sich die Rechnung:

- (3) Wie oft geht der Rest 175 in die 679? 3 mal, die 3 schreibt man wieder oben zwischen die 679 und die 175.
(4) Welcher Rest bleibt? 3 mal 175 ist 525, dies wird von 679 abgezogen, es bleibt der Rest 154, usw.

Somit erhält man folgende Schreibweise:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 \\
 854 & : & 679 & : & 175 & : & 154 & : & 21 & : & \mathbf{7} \\
 -679 & & -525 & & -154 & & -147 & & -21 & & \\
 \hline
 175 & & 154 & & 21 & & 7 & & 0 & &
 \end{array}$$

Der letzte von Null verschiedene Rest, in diesem Fall die 7, ist der größte gemeinsame Teiler von 854 und 679.

Ein zweites Beispiel: Wie lautet der größte gemeinsame Teiler von 741 und 559?

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & & 3 & & 14 \\
 741 & : & 559 & : & 182 & : & \mathbf{13} \\
 -559 & & -546 & & -182 & & \\
 \hline
 182 & & 13 & & 0 & &
 \end{array}$$

Die zugehörigen Gleichungen mit den Resten lauten:

$$741 = 1 \cdot 559 + 182 \quad 559 = 3 \cdot 182 + 13 \quad 182 = 14 \cdot 13 + 0$$

Der ggT von 741 und 559 ist also 13.

Hieraus ergeben sich folgende Bruchgleichungen:

$$\frac{741}{559} = 1 + \frac{182}{559} \quad \frac{559}{182} = 3 + \frac{13}{182} \quad \frac{182}{13} = 14 + 0$$

Die Schüler entdecken:

- der erste Bruch einer Gleichung ist der Kehrwert des letzten Bruches der vorigen Gleichung
- der letzte Bruch einer Gleichung ist immer ein echter Bruch.

Wegen

$$\frac{13}{182} = \frac{1}{\frac{182}{13}} = \frac{1}{14}$$

und

$$\frac{182}{559} = \frac{1}{\frac{559}{182}} = \frac{1}{3 + \frac{13}{182}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{14}}$$

ist

$$\frac{741}{559} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{14}}.$$

Diesen „Kettenbruch“ kann man von hinten her ausrechnen und erhält:

$$\begin{aligned} 3 + \frac{1}{14} &= \frac{42}{14} + \frac{1}{14} = \frac{43}{14} \\ 1 + \frac{14}{43} &= \frac{43}{43} + \frac{14}{43} = \frac{57}{43} \end{aligned}$$

also $\frac{741}{559} = \frac{57}{43}$. Dies ist der mit 14 gekürzte gegebene Bruch. Will man einen etwa gleichwertigen Bruch mit kleinerem Zähler und kleinerem Nenner haben, so kann man $3 + \frac{1}{14}$ ersetzen durch 3 und erhält $\frac{741}{559} \approx 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. In der Tat ist $\frac{741}{559} = \frac{57}{43} = 1,32558$ und $\frac{4}{3} = 1,3\bar{3}$, also fast genau so groß.

Eine interessante Anwendung der Kettenbrüche betrifft den Vergleich von Zeitrhythmen. Es gibt folgende Mittelwerte der Jahres- und Monatsrhythmen ² :

Tropisches Sonnenjahr:	365,242 199 d
Siderisches Sonnenjahr:	365,256 366 d
Synodischer Monat:	29,530 588 d
Siderischer Monat:	27,321 661 d
Tropischer Monat:	27,321 582 d
Drakonitischer Monat:	27,212 220 d
Anomalistischer Monat:	27,554 550 d
Umlauf der Mondknoten:	6.793,50 d

Das tropische Sonnenjahr ist die Zeit zwischen zwei gleichen Jahreszeiten, also zwischen zwei Frühjahrstag- und Nachtgleichen oder zwei Sommer-sonnenwenden (griechisch tropein = wenden). Ein Kalenderjahr sollte im Idealfall genau so lang sein, damit gleiche Jahreszeitpunkte immer das

² Die Zahlenwerte sind entnommen aus

W.Winnenburg: Einführung in die Astronomie, Mannheim 1990

gleiche Datum haben. Ein Kalenderjahr kann aber nur eine ganze Anzahl von Tagen haben, also entweder 365 - das ist zu kurz - oder 366 Tage, das ist zu lang. Es stellt sich die Frage, in welchem möglichst gleichbleibendem Rhythmus die kurzen und die langen Jahre miteinander abwechseln sollten, damit sich auf lange Sicht das Datum nicht in der Jahreszeit verschiebt.

Bei dieser Gelegenheit ist zum Verständnis des Kalenders ein kleiner Ausflug in die Astronomie angebracht.

Wenn wir uns auf der nördlichen Halbkugel der Erde befinden und am 21. März die Bahn der Sonne am Himmel verfolgen, so geht sie um 6 Uhr fast genau im Osten am Horizont auf, bewegt sich im Verlauf des Tages über den Südhimmel und geht um 18 Uhr fast genau im Westen am Horizont unter. Sie bewegt sich an diesem Tag fast genau auf einem besonderen Großkreis der Himmelskugel, dem *Himmelsäquator*. Im Winterhalbjahr bewegt sich die Sonne unterhalb dieses Himmelsäquators und im Sommer oberhalb. Deswegen geht sie im Winter im Südosten auf und im Südwesten unter, der Tag ist kurz und die Nacht ist lang, während die Sonne im Sommerhalbjahr im Nordosten aufgeht und im Nordwesten untergeht, die Tage sind lang und die Nächte kurz.

Im Frühjahr am 20. oder 21. März gibt es einen Moment, in dem sich die Sonne genau auf dem Himmelsäquator befindet. Dieser Ort des Himmelsäquators heißt *Frühlingspunkt*. Die Sonne stand 1993 am 20. März um 15.38 Uhr und 1994 am 20. März um 21.28 Uhr im Frühlingspunkt.

Die Zeit, die bis zu dem Moment verstreicht, in dem die Sonne ein Jahr später wieder genau im Frühlingspunkt steht, nennt man das *tropische Sonnenjahr*. Da diese Zeit fast sechs Stunden länger ist als 365 Tage, können wir nicht jedes Kalenderjahr nur 365 Tage dauern lassen. Das hätte nämlich zur Folge, dass nach 4 Jahren die Sonne erst am 22. März im Frühlingspunkt steht, und nach $4 \cdot 30 = 120$ Jahren wäre dieser Zeitpunkt einen Monat später, nämlich am 21. April. Das würde schließlich bedeuten, dass im Laufe der Zeit jeder Monat mal im Hochsommer läge, und das wäre für alle längerfristigen Planungen sehr unpraktisch. Darum muss man nach jeweils 4 Jahren das Jahr einen Tag länger machen, dieses Jahr heißt dann *Schaltjahr* und besitzt einen 29. Februar. Damit wäre man die Kalendersorgen los, wäre das tropische Jahr genau sechs Stunden länger als 365 Tage. Da es etwas kürzer ist, ist nach einiger Zeit wieder eine Korrektur fällig.

Welche Korrekturen überhaupt möglich sind, erfahren wir durch den Kettenbruch mit seinen Näherungsbrüchen.

Es ist $365.2422 = \frac{3652422}{10000}$ und nach obigem Schema

	365		4		7		1
3652422	:	10000	:	2422	:	312	:
-3650000		-9688		-2184		-238	
2422		312		238		74	

	3		4		1		1		1		2	
238	:	74	:	16	:	10	:	6	:	4	:	2
-222		-64		-10		-6		-4		-4		
16		10		6		4		2		0		

Der Kettenbruch heißt also

$$365.2422 = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}$$

Hieraus ergeben sich der Reihe nach für den Nachkommateil folgende Näherungsbrüche:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{7}{29} \quad \frac{8}{33} \quad \frac{31}{128} \quad \frac{132}{545} \quad \frac{163}{673} \quad \frac{295}{1218} \quad \frac{458}{1891} \quad \frac{1211}{5000}$$

Sie bedeuten den Bruchteil eines Tages, um den das Jahr länger ist als 365 Tage. Man kann an ihnen ablesen, wieviel Schalttage in wieviel Jahren eingeschoben werden müssen: in 4 Jahren 1 Schalttag oder in 29 Jahren 7 Schalttage oder in 33 Jahren 8 Schalttage usw. Ziemlich genau ist der vierte Näherungsbruch :

$$\frac{31}{128} = \frac{32}{128} - \frac{1}{128} = \frac{1}{4} - \frac{1}{128}$$

Würde man nach ihm die Schaltjahre einrichten, so müsste man wie beim Gregorianischen Kalender alle vier Jahre einen Schalttag einschieben, ihn aber immer nach 128 Jahren weglassen, und es würde ca. 80 000 Jahre dauern, bis wiederum eine Korrektur von einem Tag notwendig wäre.

Im geltenden Gregorianischen Kalender sind diejenigen Kalenderjahre Schaltjahre, deren Jahreszahl durch 4 geteilt eine ganze Zahl ergibt. Von den Kalenderjahren, deren Jahreszahl ganze Vielfache von 100 sind, ist jedoch nur jedes vierte ein Schaltjahr, z.B. 1600, 2000, 2400 (vgl. DIN-

Norm 1355). Damit erhält man folgende Jahreslänge in Tagen:

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365 + 0,25 - 0,001 + 0,0025 = 365,2425$$

Damit ist das Gregorianische Kalenderjahr um

$365,2425 - 365,242198 = 0,000302$ Tage zu lang, sodass in 3311 Jahren statt eines Schaltjahres ein Gemeinjahr angeordnet werden muss.

Ein weiteres Anwendungsbeispiel entsteht durch die Frage, wann sich Sonnenfinsternisse und Mondfinsternisse wiederholen. Eine Sonnenfinsternis kann nur dann eintreten, wenn der Mond vor der Sonne steht, wenn also Neumond ist. Eine Mondfinsternis kann nur dann eintreten, wenn die Erde sich zwischen der Sonne und dem Mond befindet, wenn also Vollmond ist. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichen Mondphasen nennt man *Synodischer Monat* (Synode = Zusammenkunft von Sonne und Mond, z.B. im Neumond) oder *Lunation*. Er hat den mittleren Wert $L = 29,530588$ Tage oder $L = 29 \text{ d } 12 \text{ h } 44 \text{ m } 2,8 \text{ s}$.

Nun ist es aber so, dass nicht bei jedem Neumond der Mond sich genau auf der Ekliptik, also vor der Sonne befindet. Die Bahn des Mondes am Himmel verläuft teils oberhalb, teils unterhalb der Ekliptik. Die Punkte, in denen die Mondbahn die Ekliptik schneiden, nennt man Mondknoten. Im aufsteigenden Mondknoten überquert der Mond die Ekliptik von der Nordhalbkugel aus gesehen von unten nach oben, also von Süd nach Nord, im absteigenden Mondknoten von oben nach unten, also von Nord nach Süd. Die Wiederkehr der Stellung im gleichen Mondknoten nennt man den *Drakonitischen Monat*, weil nur dann eine Mond- oder Sonnenfinsternis (eklipis) stattfinden kann und in der Anschauung der alten Völker ein Drache die Sonne oder den Mond verschlang, wenn eine Finsternis auftrat. Der drakonitischen Monat beträgt im Mittel $D = 27,21222$ Tage oder $D = 27 \text{ d } 5 \text{ h } 05 \text{ m } 36 \text{ s}$. Eine Finsternis kann sich also dann wiederholen, wenn in der Zwischenzeit eine ganze Zahl von synodischen Monaten und eine ganze Zahl von drakonitischen Monaten verstrichen ist. Um diese Zahlen zu ermitteln, berechnen wir das Verhältnis von $L : D$ in einem Kettenbruch:

	1		11		1		2		1
2953059	:	2721222	:	231837	:	171015	:	60822	:
-2721222		-2550207		-171015		-121644		-49371	
231837		171015		60822		49371		11451	

4	3	4	1	3	10	6
49371	: 11451	: 3567	: 750	: 567	: 183	: 18 : 3
-45804	-10701	-3000	-567	-549	-180	-18
3567	750	567	183	18	3	0

Der Kettenbruch heißt somit:

$$\frac{2953059}{2721222} = 1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{6}}}}}}}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche lauten der Reihe nach:

$$\frac{L}{D} \approx \frac{12}{11}, \quad \frac{13}{12}, \quad \frac{38}{35}, \quad \frac{51}{47}, \quad \frac{242}{223}, \quad \frac{777}{716}, \quad \frac{3350}{3087}, \quad \frac{4127}{3803},$$
$$\frac{15731}{14496}, \quad \frac{161437}{148763}, \quad \frac{984353}{907074}$$

Die Zähler bedeuten die Anzahl der drakonitischen Monate (D) und die Nenner die Anzahl der synodischen Monate, nach denen ein Vollmond (ungefähr) wieder an einem Mondknoten stattfindet. Wir rechnen diese Zeiten für die ersten sieben Näherungen aus und stellen sie in einer Tabelle zusammen:

<i>Z</i>	<i>N</i>	<i>D</i> · <i>Z</i> (Tage)	<i>L</i> · <i>N</i> (Tage)	Differenz (Tage)	Differenz (Stunden)	<i>D</i> · <i>Z</i> (Jahre)
12	11	326.54664	324.83649	1.7102	41.045	0.894
13	12	353.75886	354.36708	-0.6082	-14.597	0.969
38	35	1034.06436	1033.57065	0.4937	11.849	2.831
51	47	1387.82322	1387.93773	-0.1145	-2.748	3.800
242	223	6585.35724	6585.32157	0.0357	0.857	18.030
777	716	21143.89494	21143.90244	-0.0075	-0.180	57.890
3350	3087	91160.93700	91160.93133	0.0057	0.137	249.590

Die fünfte Näherung liefert mit 18,03 Jahren die Sarosperiode, die schon den Chaldäern 600 v. Chr. bekannt war. Nach dieser Zeit wiederholt sich eine Mondfinsternis im Mittel 45 mal und eine Sonnenfinsternis im Mittel 70 mal. Die Finsternisse einer Sarosreihe beginnen als partielle Finsternis, werden dann immer besser (total) und verschwinden wieder nach

einer partiellen Phase. Innerhalb einer Sarosperiode gibt es im Mittel 42 verschiedene Sonnenfinsternisse und 27 verschiedene Mondfinsternisse. Aber auch die 4. Näherung mit 3,8 Jahren liefert Zyklen von Finsternissen, die sich jedoch viel weniger oft wiederholen, weil die Differenz in der 6. Spalte fast 3 Stunden beträgt.

Ein drittes Beispiel ist die Frage, wann der Vollmond an der gleichen Stelle des Fixsternhimmels steht. Hierzu muss der synodische Monat $L = 29,530588^d$ mit dem siderischen Monat $S = 27,321661^d$ ins Verhältnis gesetzt werden:

	1		12		2		1
29530588	:	27321661	:	2208927	:	814537	:
-27321661		-26507124		-1629074		-579853	
2208927		814537		579853		234684	

	2		2		8		17		1
579853	:	234684	:	110485	:	13714	:	773	:
-469368		-220970		-109712		-13141		-573	
110485		13714		773		573		200	

	2		1		6		2		2		5	
573	:	200	:	173	:	27	:	11	:	5	:	1
-400		-173		-162		-22		-10		-5		
173		27		11		5		1		0		

Der Kettenbruch heißt also:

$$\frac{29530588}{27321661} = 1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}}}}}}}}}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche lauten der Reihe nach

$$\frac{L}{S} \approx \frac{13}{12}, \frac{27}{25}, \frac{40}{37}, \frac{107}{99}, \frac{254}{235}, \frac{2139}{1979}, \frac{36617}{33878}, \dots$$

Die Zähler bedeuten die Anzahl der siderischen Monate und die Nenner die Anzahl der synodischen Monate, nach denen ein Vollmond (ungefähr) wieder an derselben Stelle des Fixsternhimmels steht. Wir rechnen diese Zeiten aus und stellen sie in einer Tabelle zusammen:

Z	N	$S \cdot Z$ (Tage)	$L \cdot N$ (Tage)	Differenz (Tage)	Differenz (Stunden)	$S \cdot Z$ (Jahre)
13	12	355.181593	354.367056	0.814537	19.549	0.972
27	25	737.684847	738.264700	-0.579853	-13.916	2.020
40	37	1092.86644	1092.631756	0.234684	5.632	2.992
107	99	2923.417727	2923.528212	-0.110485	-2.652	8.004
254	235	6939.701894	6939.688180	0.013714	0.329	19.000
2139	1979	58441.032879	58441.033652	-0.000773	-0.019	160.006

Die fünfte Näherung liefert den Metonischen Zyklus von 19 Jahren. Nach dieser Zeit fallen die Mondphasen wieder auf dasselbe Kalenderdatum. Dieser Zyklus spielt bei der Bestimmung des Osterdatums eine Rolle.

5. Berechnungen von Wurzeln

Die Fähigkeit, einen Prozess in seiner Abfolge zu überschauen und wach zu bemerken, an welcher Stelle des Verfahrens man sich gerade befindet, ist in jedem Beruf hilfreich. Sie kann insbesondere bei Rechenprozessen geübt werden. Bei den folgenden Beispielen steht dieser Aspekt im Vordergrund und nicht so sehr der praktische Nutzen, der im Zeitalter des Taschenrechners an Bedeutung verloren hat.

Von der Mittelstufe her kennen die Schüler manchmal das übliche Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{10'30'41} = 321 \\
 \underline{-9'00'00} \\
 1'30'41 \quad 62 \cdot 2 \\
 \underline{-1'24'00} \\
 0'06'41 \quad 641 \cdot 1 \\
 \underline{-06'41} \\
 0
 \end{array}$$

In dieser Größenordnung der Quadratzahlen ist das Verfahren brauchbar und sollte einmal von den Schülern gekannt sein. Man kann sich auch einen Merkvers für das Verfahren ausdenken:

Teil den Baum in je zwei,
und such der Krone Wurzel frei,
das Quadrat zieh ab,
hol den Rest herab.
Mein Freund, wie oft steckt dort das Doppel darin?
Schreib's schnell dreimal hin.
Lässt das Produkt sich abziehen,
so wirst Du bald haben,
die Wurzel ausgegraben.

Das Verfahren wird aber ab der 5. Stelle der Wurzel ziemlich mühsam. Bequemer ist eine Rekursionsformel, die sich schließlich aus einem Verfahren von Rafaele Bombelli (1572) ergibt und die Mittelwerte des Heron-Verfahrens darstellt.

Bombelli ging am Beispiel $\sqrt{13}$ so vor:

Eine erste Näherung ist 3, der Rest sei x . Dann ist $\sqrt{13} = 3 + x$, also $13 = 9 + 6 \cdot x + x^2$. Hieraus folgt $x = \frac{2}{3} - \frac{x^2}{6}$, und damit erhält man unter Vernachlässigung von x^2 die zweite Näherung $\sqrt{13} \approx 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$. Nun kann man das Verfahren mit dieser besseren Näherung wiederholen und setzt $\sqrt{13} = \frac{11}{3} + x$, was zu $13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3} \cdot x + x^2$ und $x = -\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{22} - \frac{3x^2}{22}$, also der dritten Näherung $\sqrt{13} \approx \frac{11}{3} - \frac{2}{33} = \frac{119}{33}$ führt.

Die allgemeine Rekursionsformel erhalten wir folgendermaßen:
Es sei z die Wurzel, z^2 die gegebene Zahl und z_1 die erste Näherung.
Dann ist

$$\begin{aligned} z &= z_1 + x \\ z^2 &= z_1^2 + 2 \cdot z_1 \cdot x + x^2 \\ x &= \frac{z^2 - z_1^2}{2z_1} - \frac{x^2}{2z_1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Einsetzen für x in 5.1 führt zu

$$z = z_1 + \frac{z^2 - z_1^2}{2z_1} - \frac{x^2}{2z_1} < z_1 + \frac{z^2 - z_1^2}{2z_1} = z_2.$$

Hieraus folgt

$$z_2 = \frac{z^2 + z_1^2}{2z_1} = \frac{z^2}{2z_1} + \frac{z_1}{2}$$

und im nächsten Schritt durch den Ansatz $z = z_2 + x$ nach dem gleichen Verfahren

$$z_3 = \frac{z^2 + z_2^2}{2z_2} = \frac{z^2}{2z_2} + \frac{z_2}{2}.$$

So ergibt sich die Rekursionsformel

$$z_{n+1} = \frac{z^2}{2z_n} + \frac{z_n}{2}, \quad (5.2)$$

mit der man immer genauere Werte bekommt. Denn aus $z < z_n$ für $n = 2, 3, \dots$ folgt auch $z_{n+1} < z_n$, da $z < z_{n+1} = \frac{z^2}{2z_n} + \frac{z_n}{2} < \frac{z_n^2}{2z_n} + \frac{z_n}{2} = z_n$.

Das Beispiel $z^2 = 5$ ergibt folgende Näherungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \\ z_2 &= \frac{5}{2 \cdot 2} + 1 = \frac{9}{4} \\ z_3 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{8} = \frac{161}{72} \\ z_4 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{72}{161} + \frac{161}{144} = \frac{51841}{23184} \end{aligned}$$

Schon die vierte Näherung liefert einen sehr guten Wert:

$$\begin{aligned} z_4 &= 2,23606797791\dots \\ \sqrt{5} &= 2,23606797749\dots \end{aligned}$$

Die Herleitung der Näherungslösungen nach Bombelli hat den Vorteil, dass sie auf beliebige n -te Wurzeln anwendbar ist:

$$\begin{aligned} z^n &= (z_1 + x)^n = z_1^n + n \cdot z_1^{n-1} \cdot x + \dots \quad (5.3) \\ \frac{z^n - z_1^n}{n \cdot z_1^{n-1}} &\approx x \\ z &= z_1 + x \approx z_1 + \frac{z^n - z_1^n}{n \cdot z_1^{n-1}} = \frac{z^n + (n-1)z_1^n}{n \cdot z_1^{n-1}} \\ z &\approx \frac{z^n + (n-1)z_1^n}{n \cdot z_1^{n-1}} \end{aligned}$$

Somit ist z.B. $\sqrt[3]{30} \approx \frac{30+2 \cdot 3^3}{3 \cdot 3^2} = \frac{28}{9}$ und $\sqrt[4]{60} \approx \frac{60+3 \cdot 3^4}{4 \cdot 3^3} = \frac{101}{36}$.

Die Formeln lassen sich noch verbessern, wenn man auch noch x^2

berücksichtigt:

$$x \approx \frac{z^n - z_1^n}{n \cdot z_1^{n-1}}$$

$$x^2 \approx \frac{z^n - z_1^n}{n \cdot z_1^{n-1}} \cdot x$$

Geht man hiermit in die binomische Formel 5.3, so erhält man die bessere Näherung $x \approx \frac{2z_1(z^n - z_1^n)}{(n-1)z^n + (n+1)z_1^n}$ und schließlich $z \approx z_1 \cdot \frac{(n+1)z^n + (n-1)z_1^n}{(n-1)z^n + (n+1)z_1^n}$.

Für $z^2 = 5$ liefert diese Formel mit $z_1 = 2$ im ersten Schritt $\sqrt{5} \approx 2 \cdot \frac{3 \cdot 5 + 2^2}{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2^2} = \frac{38}{17} = 2.2352\dots$

Mit dieser letzten Betrachtung höherer Wurzeln ist eine 9. Klasse schon überfordert. Ich füge sie hier an, weil immer mal wieder von Schülern gefragt wird, wie man eigentlich höhere Wurzeln berechnen kann. Vorliegendes bietet in einem solchen Fall Futter für gute Schüler und könnte gut der Inhalt eines Referates sein, auch in höheren Klassen.

6. Quadratwurzeln und ihre Kettenbrüche

Zum Abschluss folgt noch eine Bemerkung zu den Kettenbrüchen der Quadratwurzeln. Wenn die Schüler die Kettenbrüche für die Wurzeln aus den natürlichen Zahlen $n = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, \dots$ nach dem Verfahren berechnen, welches in diesem Buch von Friedrich Hartmann dargestellt wurde, erhalten sie

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = [1; \overline{2}]$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}} = [1; \overline{1, 2}]$$

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\sqrt{6}}} = [2; \overline{2, 4}]$$

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\sqrt{7}}}} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$$

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\sqrt{8}}} = [2; \overline{1, 4}]$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{3+\sqrt{10}} = [3; \overline{6}]$$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{3+\sqrt{11}}} = [3; \overline{3, 6}]$$

$$\sqrt{12} = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\sqrt{12}}} = [3; \overline{2, 6}]$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \sqrt{13}}}}} = [3; \overline{1, 1, 1, 6}]$$

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \sqrt{14}}}}} = [3; \overline{1, 2, 1, 6}]$$

Die Schüler entdecken an diesen Beispielen:

- Der Kettenbruch hat die Gestalt

$$\sqrt{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_0 + \sqrt{n}}}}}}, \quad (6.1)$$

er ist also unendlich.

- Der Kettenbruch hat eine Periode, d.h. es gibt eine natürliche Zahl k so dass $a_k = 2a_0$, $a_{k+m} = a_m$.
- Die Periode hat eine Symmetrie, d.h. es ist $a_1 = a_{k-1}$, $a_2 = a_{k-2}$, $a_3 = a_{k-3}$ usw.

Es gibt noch eine einfache Überlegung, die den Schülern zugemutet werden kann und einen Zusammenhang zwischen Quadratwurzeln und Kettenbrüchen stiftet.

Jede natürliche Zahl n liegt zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen: $a^2 \leq n < (a+1)^2$, lässt sich also in der Form $n = a^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ darstellen.

Es sei nun $z = \sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b}$, also $z^2 = a^2 + b$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} z^2 - a^2 &= b \\ (z - a) \cdot (z + a) &= b \\ z &= a + \frac{b}{a + z}. \end{aligned}$$

Nun kann man auf der rechten Seite für z diese Formel einsetzen und bekommt

$$z = a + \frac{b}{a + \left(a + \frac{b}{a + z}\right)} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{a + z}} \quad (6.2)$$

Wiederholtes Einsetzen führt zu dem unendlichen Kettenbruch

$$\sqrt{n} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}} \quad (6.3)$$

mit der Periode $2a$. Aus ihm lassen sich brauchbare Näherungen leicht berechnen. Diese sind umso „besser“, je kleiner der Bruch $\frac{b}{2a}$ ist.

Ein allgemeiner Kettenbruch hat die Gestalt

$$z = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}} \quad (6.4)$$

Sind alle Teilzähler identisch ($b_i = b$), gilt ferner $a_i = 2a_0$ für $i = 1, 2, \dots$, so stellt der unendliche Kettenbruch 6.3 offenbar die Quadratwurzel $\sqrt{a_0^2 + b}$ dar.

Der euklidische Algorithmus und das von Friedrich Hartman dargestellte Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzeln führt immer zu einem Kettenbruch, in dem alle Teilnenner a_i positive ganze Zahlen sind und sämtliche Teilzähler b_i den Wert 1 haben. Solche Kettenbrüche heißen *regelmäßig*, man kann sie auch in der bequemerem Schreibweise in eckigen Klammern notieren:

$$\sqrt{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_0 + \sqrt{n}}}}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Für welche Werte von b ist der Kettenbruch 6.3 regelmäßig?

Offenbar für $b = 1$, die Periodenlänge ist dann $k = 1$:

$$\sqrt{a^2 + 1} = a + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \dots}} = [a, \overline{2a}] ,$$

Aber auch für $b = 2$ erhält man durch Kürzen einen regelmäßigen Kettenbruch, er hat die Periodenlänge $k = 2$:

$$\sqrt{a^2 + 2} = a + \frac{1}{a + \frac{1}{2a + \frac{1}{a + \frac{1}{2a + \dots}}}} = [a, \overline{a, 2a}]$$

Ist $a = b \cdot c$, $c \in \mathbb{N}$, sind also b und c Teiler von a , erhält man durch Kürzen ebenfalls einen regelmäßigen Kettenbruch mit der Periodenlänge $k = 2$:

$$\sqrt{a^2 + \frac{a}{c}} = a + \frac{1}{2c + \frac{1}{2a + \frac{1}{2c + \frac{1}{2a + \dots}}}} = [a, \overline{2c, 2a}] .$$

Mit diesen Formeln kann man für die Wurzel aus den Zahlen 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 17, 18, 20, 26, 27, 30, ... den jeweils zugehörigen regelmäßigen Kettenbruch leicht berechnen. Beispielsweise ist $\sqrt{39} = \sqrt{6^2 + \frac{6}{2}} = [6; \overline{4, 12}]$.

7. Anhang

Die in diesem Abschnitt dargestellten Zusammenhänge sind nicht als Unterrichtsinhalte in einer 9. Klasse gedacht, sondern dem Lehrer als zusammenfassende Hintergrundinformation gewidmet. Wer sich näher mit den Kettenbrüchen befassen möchte sei auf die Literatur³ verwiesen.

Es sei n eine natürliche Zahl, aber keine Quadratzahl, und $z^2 = n$. Dann kann z auch als ein unendlicher, periodischer Kettenbruch geschrieben werden:

$$z = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_0 + z}}} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0}] . \quad (7.1)$$

Wir bezeichnen die Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruches mit $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, es ist also

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= [a_0] = \frac{a_0}{1} \\ \frac{p_1}{q_1} &= [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} \end{aligned}$$

usw. Die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche genügen den Rekursionsformeln

$$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} \quad (7.2)$$

$$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} . \quad (7.3)$$

³ Oskar Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Bd.1, Darmstadt 1977
Harald Scheid: *Zahlentheorie*, 2. Aufl. Mannheim 1994

Die Periode im Kettenbruch 7.1 hat eine Symmetrie: es ist $a_k = 2a_0$, $a_{k-i} = a_i$ für $i = 1, 2, \dots, k-1$. Man kann den Kettenbruch also auch so schreiben:

$$z = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_3, a_2, a_1, 2a_0}] .$$

Löst man den Kettenbruch $z = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_0 + z}}$ von hinten her auf, so erhält man eine Gleichung der Form $z = \frac{p \cdot z + c}{q \cdot z + d}$ mit natürlichen Zahlen p, q, c und d . Hieraus folgt

$$\begin{aligned} z \cdot (q \cdot z + d) &= p \cdot z + c \\ q \cdot z^2 + (d - p) \cdot z &= c \\ (d - p) \cdot z &= c - q \cdot n \end{aligned}$$

Da z keine rationale Zahl ist, folgt $d - p = 0$ und $c - q \cdot n = 0$. Es ist also

$$z = \frac{p \cdot z + n \cdot q}{q \cdot z + p} . \quad (7.4)$$

Diese Gleichung wird durch alle Zahlenpaare $(p|q) \neq (0|0)$ erfüllt. Die Auflösung des Kettenbruches 7.1 liefert aber, wenn k die Periode des Kettenbruches ist, das eindeutig bestimmte Zahlenpaar $p = p_{k-1}$, $q = q_{k-1}$. Denn nach den Rekursionsformeln 7.2 und 7.3 gilt wegen $a_n = a_0 + z$

$$\begin{aligned} p_k &= (a_0 + z)p_{k-1} + p_{k-2} & q_k &= (a_0 + z)q_{k-1} + q_{k-2} \\ p_k &= p_{k-1} \cdot z + a_0 \cdot p_{k-1} + p_{k-2} & q_k &= q_{k-1} \cdot z + a_0 \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

und somit $z = \frac{p_{k-1} \cdot z + a_0 \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{q_{k-1} \cdot z + a_0 \cdot q_{k-1} + q_{k-2}}$ mit $\frac{p}{q} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]$.

Nach einem Satz von Legendre (1752 - 1833) sind Zähler und Nenner dieses Näherungsbruches Lösungen der sogenannten Pell'schen Gleichung, und zwar ist

$$\begin{aligned} p^2 - n \cdot q^2 &= 1 & \text{falls } k \text{ gerade ist} \\ p^2 - n \cdot q^2 &= -1 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = n + \frac{1}{q^2}$ (falls k gerade) bzw. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = n - \frac{1}{q^2}$ (falls k ungerade).

Die Pell'sche Gleichung hat unendlich viele Lösungen, jede stellt Zähler und Nenner eines Näherungsbruches des unendlichen Kettenbruchs dar, und zwar ist

$$\begin{aligned}
p_{mk-1}^2 - n \cdot q_{mk-1}^2 &= 1 && \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \text{ falls } k \text{ gerade ist} \\
&&& \text{und } m = 2, 4, 6, \dots \text{ falls } k \text{ ungerade ist} \\
p_{mk-1}^2 - n \cdot q_{mk-1}^2 &= -1 && \text{mit } m = 1, 3, 5, \dots \text{ falls } k \text{ ungerade ist.}
\end{aligned}$$

Die Zähler p_{mk-1} und Nenner q_{mk-1} der Näherungsbrüche für $\sqrt{n}$ kann man mit den Rekursionsformeln 7.2 und 7.3 berechnen. Einfacher sind folgende Formeln für die Berechnung der Lösungen der Pell'schen Gleichung aus den Minimallösungen p_{k-1} und q_{k-1} :

$$\begin{aligned}
p_{mk-1} &= \frac{1}{2} [(p_{k-1} + \sqrt{n}q_{k-1})^m + (p_{k-1} - \sqrt{n}q_{k-1})^m] \\
q_{mk-1} &= \frac{1}{2\sqrt{n}} [(p_{k-1} + \sqrt{n}q_{k-1})^m - (p_{k-1} - \sqrt{n}q_{k-1})^m] .
\end{aligned}$$

Setzt man auf der rechten Seite in Gleichung 7.4 für z die Näherung $\frac{p}{q}$ ein, erhält man

$$z \approx \frac{p \cdot \frac{p}{q} + n \cdot q}{q \cdot \frac{p}{q} + p} = \frac{\frac{p^2}{q} + n \cdot q}{2p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{q} + \frac{n}{2} \cdot \frac{q}{p} .$$

Setzen wir hier $n = z^2$ und $\frac{p}{q} = z_n$, so erhalten wir die Formel 5.2 von Bombelli:

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{2} + \frac{z_n^2}{2z_n} .$$

Der neue Näherungsbruch $z_{n+1} = \frac{p'}{q'} = \frac{p^2 + nq^2}{2pq}$ erfüllt übrigens ebenfalls die Pell'sche Gleichung. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
p'^2 - n \cdot q'^2 &= (p^2 + nq^2)^2 - n \cdot (2pq)^2 \\
p'^2 - n \cdot q'^2 &= (p^2 - n \cdot q^2)^2 \\
p'^2 - n \cdot q'^2 &= 1
\end{aligned}$$

Die folgende Tabelle enthält für die ersten Wurzeln $\sqrt{n}$ die Periode k des Kettenbruchs und die Minimallösungen $p = p_{k-1}$, $q = q_{k-1}$ der zugehörigen Pell'schen Gleichung.

n	k	p	q
2	1	1	1
3	2	2	1
5	1	2	1
6	2	5	2
7	4	8	3
8	2	3	1
10	1	3	1
11	2	10	3
12	2	7	2
13	5	18	5
14	4	15	4
15	2	4	1
17	1	4	1
18	2	17	4
19	6	170	39
20	2	9	2
21	6	55	12
22	6	197	42
23	4	24	5
24	2	5	1
26	1	5	1
27	2	26	5
28	4	127	24
29	5	70	13

n	k	p	q
30	2	11	2
31	8	1520	273
32	4	17	3
33	4	23	4
34	4	35	6
35	2	6	1
37	1	6	1
38	2	37	6
39	2	25	4
40	2	19	3
41	3	32	5
42	2	13	2
43	10	3482	531
44	8	199	30
45	6	161	24
46	12	24335	3588
47	4	48	7
48	2	7	1
50	1	7	1
51	2	50	7
52	6	649	90
53	5	182	25
54	6	485	66
55	4	89	12

Zur Arithmetik und Algebra der 9. Klasse

Ein Unterrichtsbeispiel

F. J. HARTMANN

Vorbemerkung

Im Folgenden ist das Gerüst einer etwa 3-wöchigen Epoche dargestellt, wie sie in einer 9. Klasse stattfinden kann und stattgefunden hat. Wie das Gespräch im Einzelnen angestoßen, durch Arbeitsaufträge an die Schüler mit Erfahrungen ausgestattet, in Fragen zugespitzt, Lösungen zugeführt und zu neuen Fragen übergeleitet werden kann, hängt sehr stark von der jeweiligen Klasse ab. Eine verallgemeinernde Darstellung dieser für den konkreten Unterricht entscheidenden Details erschien mir wenig sinnvoll. Wer Neigung hat das angeregte Thema aufzugreifen, kommt, so oder so, nicht umhin, aus eigener Initiative phantasievoll und geistesgegenwärtig die Fähigkeiten der Klasse wahrzunehmen, aufzugreifen, zu ermutigen und nach allen Seiten zu fördern.

Wir fangen damit an, dass die Schüler und der Lehrer die ungeraden Zahlen, beginnend mit 1, in Spalten zu jeweils 10, aufschreiben.

1	21	41	61	...
3	23	43	...	...
5	25	.	...	...
.	.	.	...	...
.	.	.	...	...
.	.	.	...	...

Die Tabelle endet vorläufig mit 199. Sodann werden diese Zahlen fortlaufend addiert. Hier beginnt man mit 0, addiert 1, $0+1 = 1$, addiert zu diesem Ergebnis die nächste ungerade Zahl, also 3, $1+3 = 4$, und setzt dieses Verfahren bis zum Ende der Tabelle fort. Die Ergebnisse werden „auf Lücke“ geschrieben.

	0		100		400		...
1	1	21	121	41	441	...	...
3	4	23	144	43	484	...	...
5	9	25	169	45	...	...	...
7	.	27	.	...			
.	.	.	.				
.	.	.	.				

Die Tabelle endet mit 10.000, vorausgesetzt, es sind keine Rechenfehler unterlaufen. Rechtzeitiger Hinweis auf Fehlerfortpflanzung und wechselseitige Kontrolle ist angebracht; Verwendung unterschiedlicher Farbe für die ungeraden Zahlen und die Summen ist zweckmäßig. Ein Taschenrechner hat hier nichts verloren – gerade schwachen Schülern sollte er nicht permanent bestätigen, dass sie doch nur Tasten drücken können.

In der Tabelle ergeben sich zahlreiche Regelmäßigkeiten: Die Endziffern wiederholen sich, in jeder Spalte spiegelsymmetrisch zur 5, vor der immer eine 2 steht; es kommen nicht alle Endziffern vor, es gibt weitere „Spiegelpunkte“ in der Tabelle, das sind ja alles Quadratzahlen... Die Phase des Betrachtens und Sammelns darf nicht zu kurz sein: Hier kann *jeder* mitmachen, Vorkenntnisse sind wirklich nicht gefragt.

Das Beobachtete und Vermutete wird dann genauer analysiert und bewiesen, und das kann auf sehr verschiedene Art und Weise gemacht werden. An dieser Stelle können Schüler ohne jede Mühe endgültig entmutigt werden, womöglich mit der Einleitung „das und jenes *müsst* ihr aber kennen“.

Die Schüler haben gemeinsam etwas *getan*, aus dem sich offensichtlich Gesetzmäßiges *ergeben* hat. Es muss sich demnach aus der Art der Tätigkeit *schließen* lassen, welche Besonderheiten dem Resultat eigen sein müssen: Man *beschreibe* also, was man getan hat. Das kann nun wieder jeder versuchen; Schülern, von denen in der Klasse die Meinung besteht, die „können das sowieso nicht“, muss an solchen Stellen vom Lehrer ggf. Gehör verschafft werden. In der Klasse kann hier ein Fachgespräch entstehen, in dem Argumente geäußert, geprüft, verworfen, modifiziert werden; sein Verlauf ist im Detail nicht planbar. Was nachfolgend ausgeführt ist, darf somit nicht einfach in die Klasse transportiert und vom Lehrer verkündet werden; es sollte sich, unbeschadet der Endergebnisse, in irgendeiner sinnvoll moderierten Abfolge, aus dem Gespräch der Klasse ergeben.

1. Aufbau der ersten Spalte. Wie kann man die Folge der ungeraden Zahlen entstehen lassen; was hat man eigentlich getan? Immer 2 dazu-

gezählt. Lässt sich sagen, welche ungerade Zahl dastehen muss, wenn die vorangehende nicht bekannt ist, man aber weiß, an welcher Stelle man sich in der Tabelle befindet; Nummerierung der errechneten Zahlen, beginnend mit 0, ist hier zweckmäßig; auch diese Nummern trage man in die Tabelle ein. (Vorher Platz lassen!)

	0	0		10	100		20	400	...
1			21			41			
	1	1		11	121		21	441	...
3			23			43		.	
	2	4		12	144	.		.	
5			25			.		.	
	3	9	.	13	169	.		.	
7			.		.			.	
	4	16	.		.			.	
9		.			.			.	
.		.			.			.	
.		.			.			.	

Wir bezeichnen eine beliebige dieser Nummern mit n , die jeweils nächste ungerade Zahl ergibt sich durch Verdoppeln der Nummer und Addition von 1, $2n + 1$. (Nochmalige) Begründung, warum dies eine *ungerade* Zahl ist!

2. Fortlaufende Addition der ungeraden Zahlen ergibt die Quadratzahlen. Die ersten Summen sind offensichtlich Quadratzahlen, bei den anderen kann man es nachrechnen. (Das Quadrat ergibt sich als Produkt aus zwei gleichen Faktoren, *nicht* indem man eine Zahl „mit sich selbst malnimmt“.) Was also ist zu beweisen? Nun, doch wohl dies, dass sich Quadratzahlen ergeben, so weit man auch die Tabelle fortgesetzt denken mag – und das heißt, dass konkretes Nachrechnen unmöglich ist. Es muss die Beweisführung so angelegt werden, dass der rekursive Aufbau der Tabelle berücksichtigt wird. Wir haben uns davon zu überzeugen, dass wir bei jedem Schritt die jeweils nächste Quadratzahl erhalten *müssen*. Sehen wir uns also an, *was* wir gerechnet haben, und *wie* wir das modifizieren können; wir wählen Beispiele als Paradigmen. Sagen wir, wir haben unsere Vermutung bis $25^2 = 625$ überprüft; aus der Tabelle lesen wir ab, dass nun 51 zu addieren ist:

$$25^2 + 51 = 676$$

So zeigt sich nichts, was Beweiskraft hätte, auch die Berechnung von 26^2 liefert nur das richtige Ergebnis, keine Einsicht. Es muss also deutlicher werden, wie wir einen Schritt weitergehen. Die hinzuaddierte 51

wird weiter analysiert:

$$26^2 = 25^2 + 51 = 25^2 + 50 + 1 = 25^2 + 2 \cdot 25 + 1^2$$

Jetzt wird deutlich, *wie* die nächste ungerade Zahl zur folgenden Quadratzahl führt – und, dass dies so immer gehen muss. Die Formel

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

wird aber erst *nach* Behandlung von Beispielen aussagekräftig, da zunächst nur diese dem unmittelbaren Erleben des tätigen Schülers zugänglich sind. Formalisierung des Verfahrens der Vollständigen Induktion wäre hier natürlich völlig sinnlos: den Schülern fehlt die mathematische (Vor-)Erfahrung.

3. Beispiele wie 226^2 , 234^2 (die im wesentlichen *gleich* gerechnet werden, beide ausgehend von 230^2), größere Zahlen, Dezimalzahlen, Brüche können quadriert werden; dabei wird die Handhabung der binomischen Formeln geübt.¹ Nun sollten auch die eingangs festgestellten Regelmäßigkeiten der Tabelle bewiesen werden, also z. B. warum steht bei jeder Quadratzahl, die auf 5 endet, am Schluss 25; Warum sind diese Zahlen „Spiegelpunkte“ in der Tabelle, für die letzten Ziffern, andere, z. B. 50^2 , auch für die beiden letzten Ziffern? Man gehe in aller Ruhe den Entdeckungen der Schüler nach, lasse sie prüfen, ordnen, beweisen.
4. Nun kann das Verfahren umgekehrt werden: Quadratzahlen werden vorgegeben, Wurzeln gesucht. Erst aus der Tabelle, dann darüber hinaus. Jetzt sind erste Näherungsschritte, Vermutungen, Proben gefragt; z. B.:

$$\sqrt{149769} = ?$$

Wir betrachten zunächst *nicht* die gegebene Zahl, sondern einen für den Prozess des Wurzelziehens einfachen Bruchteil, der im Bereich der verfügbaren Tabelle liegt, also $1/100$, $1/10000$ etc. des Radikanden. Natürlich finden wir 1497,69 nicht in der Tabelle, aber wir finden zwei Nachbarn dieser Zahl,

38	1444
	1497,69
39	1521

¹ Vgl. hierzu auch den Beitrag von R. Rosbigalle in diesem Heft.

Diese Wurzeln sind hier mit 10 zu multiplizieren, dann erhalten wir

$$380^2 = 144400$$

$$149769$$

$$390^2 = 152100$$

Die zunächst völlig vernachlässigten Endziffern werden nun wichtig: 9 kommt bei einer Quadratzahl nur vor, wenn die quadrierte Zahl auf 3 oder 7 endete; jetzt sehe man nach, ob man sich näher beim größeren oder beim kleineren Nachbarn befindet und mache die Probe – mit der passenden binomischen Formel, nicht mit schriftlicher Multiplikation und schon gar nicht mit dem Taschenrechner. Weitere Beispiele können, auch von den Schülern, gewählt werden und vermitteln erste Sicherheit.

5. Nun können Wurzeln in Angriff genommen werden, die nicht mehr „aufgehen“, z. B.

$$\sqrt{2} = ?$$

Ist im Sinne von 4. sinnvoll gearbeitet worden, wird $\sqrt{200} \approx 14$, also $\sqrt{2} \approx 1,4$, rasch gefunden werden – aber wie weiter? Hier bedarf es einer *begrifflichen* Klärung: Was *ist* denn $\sqrt{2}$ für eine Zahl? Da wir sie zunächst nicht angeben können, geben wir ihr zur einfacheren Verständigung eine Bezeichnung, z. B.

$$\sqrt{2} = x$$

und halten fest, was wir von x wissen:

$$x^2 = 2.$$

Können wir diesen Sachverhalt anders schreiben? Auch hier wieder: suchen lassen, Hinweise geben, Geduld! Es wird schon herauskommen, dass

$$x = \frac{2}{x}$$

d. h. 2 geteilt durch $\sqrt{2}$ muss exakt $\sqrt{2}$ ergeben. Nun,

$$2 : 1,4 = 1,428\dots$$

Das Ergebnis ist zu groß, der erste Näherungswert muss zu klein gewesen sein. Versuchen wir es also mit dem (arithmetischen) Mittel

$$\sqrt{2} \approx 1,414... \quad (2. \text{ Näherung})$$

$$2 : 1,414 =$$

Am Ergebnis der Division kann abgelesen werden, wie genau die jeweilige Näherung schon ist; die Zahl der Stellen kann von Schritt zu Schritt verdoppelt werden (meist kann man noch eine weitere Stelle dazunehmen). Nach 4 - 5 Schritten ist man jenseits der Genauigkeit, die ein einfacher Taschenrechner z. Zt. erreicht.²

Nun können in der Klasse Gruppen gebildet werden, die $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$... ebenfalls auf 20 - 30 Stellen errechnen.³

6. Wie *rechnen* wir nun mit diesen Wurzeln? Können wir z.B. $1/\sqrt{2}$, $(\sqrt{3} + 1)/(\sqrt{3} - 1)$ und ähnliche Ausdrücke ausrechnen? Geht das ohne geradezu unsinnigen Aufwand? Mit Bruchrechnung geht es – und die sollte man an dieser Stelle ggf. kurz, aber sorgfältig wiederholen. Nicht nur Beispiele, die durch Erweitern zu vereinfachen sind, auch Ausdrücke wie

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

müssen durchschaubar werden.

Für $\sqrt{2} - 1$ kann z. B. geschrieben werden,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

denn es ist zunächst noch zu vermuten, dass wir es mit einem Bruch zu tun haben. Weitere Beispiele zu rechnen, dürfte hier notwendig

²Das Verfahren stammt von HERON (75 n. Chr.) und wurde von NEWTON mit Hilfe der Differentialrechnung verallgemeinert.

Betrachtet man die Funktion $y = x^2 - 2$, so handelt es sich um die approximative, rekursive Bestimmung der positiven Nullstelle. Das Verfahren ist *quadratisch konvergent*, d. h. der Fehler wird quadratisch kleiner. Dies begründet die genannte Faustregel zur sinnvollerweise berechneten Stellenzahl. Es ist überdies *selbstkorrigierend*. Stellt man bei der Division fest, dass sich *nicht* alle bereits berechneten Ziffern wiederholen, so zählt man die Anzahl derer nach, die sich wiederholt haben, und verdoppelt diese (geringere) Anzahl.

³Dies wird man nicht von allen SchülerInnen erwarten. In Gruppenarbeit findet eine solche Arbeit aber immer wieder positive Aufnahme.

und sinnvoll sein.

7. Was soeben als scheinbare Spielerei auftauchte, kann mit erstaunlichen Folgen angewendet werden: Wir rollen die Bestimmung von Quadratwurzeln neu auf und begnügen uns dabei mit denkbar groben, nämlich ganzzahligen Näherungen, fassen dafür aber die verbleibenden Reste exakt. Am Beispiel:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) \quad (\text{sinnlos, typisch Mathematik...})$$

Nehmen wir uns den Rest vor und machen deutlich, dass er *nicht* mehr ganzzahlig ist:

$$\sqrt{3} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3} - 1}}$$

Dem Nenner des Nennerbruches geben wir einen ganzzahligen Wert, indem wir den Nennerbruch mit $\sqrt{3} + 1$ erweitern:

$$\sqrt{3} - 1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}$$

Da $\sqrt{3} \approx 1$, kann aus dem Nennerbruch somit 1 als größte ganze Zahl herausgezogen und der verbleibende Rest bestimmt und angeschrieben werden:

$$\sqrt{3} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$$

Der neue Rest lässt sich entsprechend bearbeiten:

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3} - 1}} \quad (\text{Haben Sie die Bruchrechnung wirklich sorgfältig durchschaubar gemacht?})$$

Wieder wird der Nennerbruch erweitert:

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{\frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$$

Aus dem Nenner ziehen wir wieder die größte ganze Zahl heraus:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}$$

Damit ist nun etwas passiert, was nach den Erfahrungen mit dem ersten Näherungsverfahren völlig unerwartet ist: ein bereits bekannter Rest taucht wieder auf, das Verfahren wird periodisch. Die Wurzel lässt sich als unendlicher, periodischer Kettenbruch darstellen:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. können in dieser Form berechnet werden. Es wird klar, dass alle diese Wurzeln keine gewöhnlichen Brüche sein können, sie sind irrational. Für praktische Berechnungen sind die Kettenbrüche nicht geeignet – hierzu brauchen wir Näherungsbrüche. Deren Berechnung ist die nächste Etappe.

8. Da man sich nun von der Stelle, an der man den Kettenbruch abgebrochen hat, hochrechnen muss, ergeben sich wieder schöne Gelegenheiten, die Bruchrechnung zu üben. Quadrieren kann man die jeweiligen Resultate mit den eingangs der Epoche entwickelten Verfahren.

Nr. der Näherung	Näherungswert	Quadrat
1	$\sqrt{3} \approx 1$	1
2	$\sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{1} = 2$	4
3	$\sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}$ $= 1 + \frac{2}{3}$ $= \frac{5}{3}$	$\frac{25}{9}$
4	$\sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$

Die Näherungswerte sind abwechselnd zu klein und zu groß: die erreichte Genauigkeit kann ständig beurteilt werden.

9. Ein gegebener periodischer (und symmetrischer) Kettenbruch kann exakt bestimmt werden:

$$x = 3 + \cfrac{1 \leftarrow}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}$$

Die 6 kann aufgespalten werden in $3 + 3$, so dass wir erhalten

$$x = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3+x}}}}}$$

Der unendliche Kettenbruch ist, dank seiner Periodizität, gestoppt. Was bei der Bestimmung der Näherungsbrüche geübt wurde, kann nun angewendet werden beim „Hochrechnen“ dieses Kettenbruchs. Bedächtiges Rechnen führt am sichersten, d. h. auch am schnellsten, zum Ziel.

$$\begin{aligned}
 \text{1. Schritt:} \quad & 1 + \frac{1}{3+x} = \frac{(3+x)+1}{3+x} \\
 \text{2. Schritt:} \quad & 1 + \frac{1}{\frac{(3+x)+1}{3+x}} = 1 + \frac{3+x}{(3+x)+1} \\
 & = \frac{1((3+x)+1) + (3+x)}{(3+x)+1} \\
 & = \frac{2(3+x)+1}{(3+x)+1} \\
 \text{3. Schritt:} \quad & 1 + \frac{1}{\frac{2(3+x)+1}{(3+x)+1}} = \frac{3(3+x)+2}{2(3+x)+1} \\
 \text{4. Schritt:} \quad & 1 + \frac{1}{\frac{3(3+x)+2}{2(3+x)+1}} = \frac{5(3+x)+3}{3(3+x)+2} \\
 \text{5. Schritt:} \quad & 3 + \frac{1}{\frac{5(3+x)+3}{3(3+x)+2}} = \frac{18(3+x)+11}{5(3+x)+3} \\
 \text{6. Schritt:} \quad & x = \frac{18(3+x)+11}{5(3+x)+3} = \frac{65+18x}{18+5x}
 \end{aligned}$$

$$18x + 5x^2 = 65 + 18x$$

$$x^2 = 13$$

Da der Kettenbruch positiv ist, ist somit

$$x = \sqrt{13}$$

10. Es liegt nahe, neben weiteren Beispielen dieser Art auch den einfachsten Kettenbruch zu betrachten, den man haben kann, nämlich

$$g = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Er konvergiert sehr schlecht, Näherungswerte stabilisieren sich nur langsam. Offensichtlich ist er aber noch einfacher zu stoppen als der vorangehende:

$$g = \frac{1}{1 + g}$$

woraus sich ergibt

$$g^2 + g - 1 = 0 :$$

eine schöne Gelegenheit, an die quadratischen Gleichungen zu erinnern. g stellt den goldenen Schnitt dar.

11. Wir kommen zum Abschluss auf den ersten Anfang zurück und betrachten ein Verfahren zum Ziehen der Quadratwurzel, das außerordentlich stur und recht schnell ist, hervorragend für einen Computer geeignet (und dort auch implementiert):
Berechnung einer Wurzel durch Abzählen von Minuszeichen (mitgeteilt von WALTER MOTTE). Es folgt ein Beispiel mit Hinweisen auf das, *was* getan wird:

$$\sqrt{28879876} = \quad \text{Einteilung des Radikanden in 2-er Blöcke, } \textit{hinten}$$

$$\sqrt{28|87|98|76} = \quad \text{beginnend (vorne bleibt ggf. auch nur } \textit{eine} \text{ Ziffer stehen).}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{28|87|98|76} = \\
 \underline{-1} \\
 27 \\
 \underline{-3} \\
 24 \\
 \underline{-5} \\
 19 \\
 \underline{-7} \\
 12 \\
 \underline{-9} \\
 \underline{\underline{3}}
 \end{array}$$

Im ersten Block beginnen wir, der Reihe nach die ungeraden Zahlen abzuziehen, solange, bis es nicht mehr geht.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{28|87|98|76} = 5^* \\
 . \\
 . \\
 . \\
 \underline{\underline{3}} \ 87
 \end{array}$$

Die Anzahl der bis dahin erforderlichen Minuszeichen ist die erste Ziffer des Resultats; sie wird angeschrieben und der zweite Block heruntergeholt. Das bisherige Ergebnis wird verdoppelt, um eine Stelle nach links geschoben, an die freigeordnete Stelle kommt eine 1, also:

$5 \rightarrow 10 \rightarrow 101$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{28|87|98|76} = 5 \\
 . \\
 . \\
 . \\
 \underline{\underline{3}} \ 87 \\
 \underline{-1} \ 01 \\
 \underline{\quad} \ 2 \ 86 \\
 \underline{-1} \ 03 \\
 \underline{\quad} \ 1 \ 83 \\
 \underline{-1} \ 05 \\
 \underline{\underline{\quad}} \ 78
 \end{array}$$

Die so errechnete Zahl wird als nächste abgezogen: dann gehts weiter mit der folgenden ungeraden Zahl, solange es eben geht.

Von hier an genau wie bei *:

$$\sqrt{28|87|98|76} = 53$$

$$\begin{array}{r}
 . \\
 . \\
 . \\
 \overline{\overline{78\ 98}} \\
 -10\ 61 \\
 \hline
 68\ 37 \\
 -10\ 63 \\
 \hline
 57\ 74 \\
 -10\ 65 \\
 \hline
 47\ 09 \\
 -10\ 67 \\
 \hline
 36\ 42 \\
 -10\ 69 \\
 \hline
 25\ 73 \\
 -10\ 71 \\
 \hline
 15\ 02 \\
 -10\ 73 \\
 \hline
 4\ 29
 \end{array}$$

Noch einmal repetieren:

$$\sqrt{28|87|98|76} = 537$$

$$\begin{array}{r}
 . \\
 . \\
 . \\
 4\ 29\ 76 \\
 -1\ 07\ 41 \\
 \hline
 3\ 22\ 35 \\
 -1\ 07\ 43 \\
 \hline
 2\ 14\ 92 \\
 -1\ 07\ 45 \\
 \hline
 1\ 07\ 47 \\
 -1\ 07\ 47 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Nur das Ergebnis muss noch notiert werden:

$$\sqrt{28|87|98|76} = 5374$$

Machen Sie die Probe – und begründen Sie das Verfahren. *Wie* Sie das machen können, steht unter Punkt 2, natürlich noch nicht in der geeigneten Formulierung!

Literaturhinweise

Louis Locher-Ernst: Arithmetik und Algebra, Dornach 1984

Oskar Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Stuttgart 1954³

Die Division durch 9 und die Neunerprobe

ARNOLD BERNHARD

Einleitung (KLAUS LABUDDE)

Das Thema der vorliegenden Ausarbeitung ist inhaltlich sehr verschieden vom Thema „Kombinatorik“, dessen Behandlung in neunten Klassen an Waldorfschulen weit verbreitet ist. Man kann es meines Erachtens als gleichwertig zur Kombinatorik ansehen und daher für die Behandlung im 9. Schuljahr empfehlen.

Beide Gebiete machen notwendig, dass man sich auf ein Denken in Zahlzusammenhängen einlässt. Genau darin kann man einen Grund dafür sehen, sich damit zu beschäftigen. Ist es doch eine Aufgabe, gerade für dies Lebensalter Ordnung im Denken zu schaffen, als Gegengewicht zu den seelischen Turbulenzen, in die viele Jugendliche dann geraten.

Im Gegensatz zur Neunerprobe würde ich die Elferprobe als geeignet ansehen für Arbeitsgemeinschaften oder als Thema für ein Referat durch besonders begabte Schüler.

Manche Klassenlehrer führen in dem 7. oder 8. Schuljahr die Neunerprobe bereits ein, vermutlich aber nur als ein praktisches Rezept zur Überprüfung ganzer Zahlen auf Teilbarkeit durch neun. Gerade dann macht es einen Sinn, dies Thema im neunten Schuljahr wieder aufzugreifen – nun aber, um es gedanklich zu durchdringen. Insofern ist es auch ein Beispiel für die meines Wissens von RUDOLF STEINER gegebene Empfehlung, Lehrinhalte des achten Schuljahres unter neuen Gesichtspunkten im neunten Schuljahr erneut aufzugreifen.

Beim Dividieren durch 9 können wir besondere Erfahrungen machen. Am besten gestalten wir die Division halb schriftlich, halb mündlich:

$$573 : 9 = (540 + 33) : 9 = 60 + 3 \quad R=6$$

Wir teilen den Dividenten so in zwei Summanden, dass die Division des ersten Summanden die Anzahl der Zehner ergibt. Jetzt vertauschen wir zwei Ziffern des Dividenten und vollziehen die Division wieder auf die gleiche Art. Wir vertauschen z. B. die Anzahl der Zehner und der Einer:

$$537 : 9 = (450 + 87) : 9 = 50 + 9 \quad R=6$$

Weitere Vertauschungen:

$$357 : 9 = (270 + 87) : 9 = 30 + 9 \quad R=6$$

$$375 : 9 = (360 + 15) : 9 = 40 + 1 \quad R=6$$

$$735 : 9 = (720 + 15) : 9 = 80 + 1 \quad R=6$$

$$753 : 9 = (720 + 33) : 9 = 80 + 3 \quad R=6$$

Die Vertauschungen ergeben sechs verschiedene Dividenten; weitere gibt es mit diesen Ziffern nicht. Zweierlei fällt auf: der Rest ist immer der gleiche, und als zweiter Summand kommen nur drei Zahlen vor, jede zweimal. Ist dies immer so, wenn wir dreistellige Zahlen durch 9 teilen? Machen wir weitere Beispiele:

$$239 : 9 = (180 + 59) : 9 = 20 + 6 \quad R=5$$

$$293 : 9 = (270 + 23) : 9 = 30 + 2 \quad R=5$$

$$923 : 9 = (900 + 23) : 9 = 100 + 2 \quad R=5$$

$$932 : 9 = (900 + 32) : 9 = 100 + 3 \quad R=5$$

$$392 : 9 = (360 + 32) : 9 = 40 + 3 \quad R=5$$

$$329 : 9 = (270 + 59) : 9 = 30 + 6 \quad R=5$$

Gleiche Erfahrungen! Drittes Beispiel:

$$234 : 9 = (180 + 54) : 9 = 20 + 6 \quad R=0$$

$$243 : 9 = (180 + 63) : 9 = 20 + 7 \quad R=0$$

$$423 : 9 = (360 + 63) : 9 = 40 + 7 \quad R=0$$

$$432 : 9 = (360 + 72) : 9 = 40 + 8 \quad R=0$$

$$342 : 9 = (270 + 72) : 9 = 30 + 8 \quad R=0$$

$$324 : 9 = (270 + 54) : 9 = 30 + 6 \quad R=0$$

Nach diesen Erfahrungen können wir ein allgemeines Gesetz vermuten. Versuchen wir ihm bei kleineren Dividenten auf die Spur zu kommen. Wählen wir als Dividenten zweistellige Zahlen; es gibt dann nur eine Vertauschung.

$$52 : 9 = 5 \quad R=7 \quad 24 : 9 = 2 \quad R=6 \quad 31 : 9 = 3 \quad R=4$$

$$25 : 9 = 2 \quad R=7 \quad 42 : 9 = 4 \quad R=6 \quad 13 : 9 = 1 \quad R=4$$

$$\begin{array}{lll}
 35 : 9 = 3 & R=8 & 12 : 9 = 1 \quad R=3 \\
 53 : 9 = 5 & R=8 & 21 : 9 = 2 \quad R=3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lll}
 41 : 9 = 4 & R=5 & \\
 14 : 9 = 1 & R=5 &
 \end{array}$$

Bei diesen Beispielen fällt auf, dass der Rest die Summe der beiden Ziffern ist:

$$\begin{array}{lll}
 5 + 2 = 7 & 2 + 4 = 6 & 3 + 1 = 4 \\
 2 + 5 = 7 & 4 + 2 = 6 & 1 + 3 = 4 \\
 \\
 3 + 5 = 8 & 1 + 2 = 3 & 4 + 1 = 5 \\
 5 + 3 = 8 & 2 + 1 = 3 & 1 + 4 = 5
 \end{array}$$

Die Summe der beiden Ziffern nennen wir die Quersumme der Zahl (abgekürzt QS). Falls der Rest immer gleich der Quersumme ist, so wäre klar, dass Vertauschung der Ziffern den Rest nicht ändern könnte. Betrachten wir weitere Beispiele:

$$\begin{array}{lll}
 28 : 9 = 3 & R=1 & (QS=10) \\
 82 : 9 = 9 & R=1 & (QS=10) \\
 68 : 9 = 7 & R=5 & (QS=14) \\
 86 : 9 = 9 & R=5 & (QS=14)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lll}
 75 : 9 = 8 & R=3 & (QS=12) \\
 57 : 9 = 6 & R=3 & (QS=12) \\
 78 : 9 = 8 & R=6 & (QS=15) \\
 87 : 9 = 9 & R=6 & (QS=15)
 \end{array}$$

Bei diesen Beispielen ist der Rest nicht einfach gleich der QS; aber gleich dem Rest, den wir erhalten, wenn wir die QS durch 9 teilen.

$$\begin{array}{lll}
 10 : 9 = 1 & R=1 & 12 : 9 = 1 \quad R=3 \\
 14 : 9 = 1 & R=5 & 15 : 9 = 1 \quad R=6
 \end{array}$$

Diese Reste bekommen wir auch, wenn wir von den QS wieder die QS, die zweiten Quersummen QS_2 bilden.

$$\begin{array}{lll}
 QS = 10 & QS_2 = 1 & QS = 12 \quad QS_2 = 3 \\
 QS = 14 & QS_2 = 5 & QS = 15 \quad QS_2 = 6
 \end{array}$$

Und wie sind die Zahlen beschaffen, die ohne Rest durch 9 teilbar sind? Betrachten wir die Neunerreihe:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, ...

Die QS dieser Zahlen ist immer 9. Setzen wir die Reihe fort...

99, 108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, ...

Außer 99 haben auch diese Zahlen die QS 9, wenn wir alle drei Ziffern addieren. 99 hat die QS 18, die QS_2 ist aber wieder 9. Betrachten wir den nächsten Abschnitt der Neunerreihe:

189, 198, 207, 216, 225, 234, 243, 252, 261, 270, ...

Für die beiden ersten Zahlen ist $QS_2 = 9$, für die übrigen ist schon $QS = 9$. Bis jetzt haben wir für Zahlen aus der Neunerreihe die $QS = 9$ und 18 gefunden, d.h. Zahlen, die selbst ohne Rest durch 9 teilbar sind. Gilt dies

als Gesetz für die ganze Neunerreihe? Prüfen wir noch die Quersummen bei den drei Gruppen von Vertauschungen:

$\begin{array}{r} 573 : 9 = 63 \text{ R}=6 \\ 537 : 9 = 59 \text{ R}=6 \\ 357 : 9 = 39 \text{ R}=6 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{QS} = 5+7+3 = 15 \\ \text{QS}_2 = 1+5=6=\text{R} \end{array}$	$\begin{array}{r} 239 : 9 = 26 \text{ R}=5 \\ 293 : 9 = 32 \text{ R}=5 \\ 923 : 9 = 102 \text{ R}=5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{QS} = 2+3+9 = 14 \\ \text{QS}_2 = 1+4=5=\text{R} \end{array}$	$\begin{array}{r} 234 : 9 = 26 \text{ R}=0 \\ 243 : 9 = 27 \text{ R}=0 \\ 423 : 9 = 47 \text{ R}=0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{QS} = 2+3+4 = 9 \\ \text{QS ist teilbar durch 9.} \end{array}$
--	---	---

Die Vermutung verdichtet sich: Der Rest bei Division durch 9 ist gleich der QS, wenn diese kleiner als 9 ist. Der Rest ist null, wenn die QS 9, oder ein Vielfaches von 9 ist; die QS ist dann selbst durch 9 teilbar. Der Rest ist gleich der QS₂, wenn die QS größer als 9 ist. Falls auch noch die QS₂ größer als 9 ist, so ist der Rest wohl gleich der QS₃, usw.

Bevor wir die vermuteten Regeln beweisen, erproben wir sie noch an größeren Dividenten. $58734 : 9 = ?$ $\text{QS} = 5 + 8 + 7 + 3 + 4 = 27$
Die QS ist durch 9 teilbar; ist es die ganze Zahl wirklich auch?

$$\begin{array}{r} 58734 : 9 = 6526 \quad \text{R}=0 \\ 47 \\ 23 \quad \text{Die Regel hat sich bewährt!} \\ 54 \end{array}$$

$$347028 : 9 = ? \quad \text{QS} = 3+4+7+0+2+8 = 24 \quad \text{QS}_2 = 2+4 = 6$$

$$\begin{array}{r} 347028 : 9 = 38558 \quad \text{R}=6 \\ 77 \\ 50 \\ 52 \\ 78 \\ 6 \end{array}$$

Auch diese Regel hat sich bewährt!

Um die vermuteten Regeln einsehen zu können, müssen wir daran denken, dass wir die Zahlen im *Zehnersystem* schreiben, d.h. dass die einzelnen Ziffern die Anzahl Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw. bedeuten.

$$5834 : 9 = (5000 + 800 + 30 + 4) : 9$$

Wir dividieren jeden Summanden.

$$\begin{array}{r|l}
 5000:9 = 555 \quad R=5 & 800:9 = 88 \quad R=8 \\
 50 & 80 \\
 50 & 8 \\
 5 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 30:9 = 3 \quad R=3 \\
 4:9 = 0 \quad R=4
 \end{array}$$

Die Summe der einzelnen Reste ist $=5+8+3+4=20$. Dies ist aber genau die QS. Weil sie größer als 9 ist, muss sie auch noch durch 9 geteilt werden und ergibt den endgültigen Rest 2; dieser ist gleich der $QS_2=2+0=2$. Dass die Rechnung im Prinzip immer so verläuft, kann man besonders deutlich einsehen, wenn man sie algebraisch gestaltet. Eine Zahl habe a Einer, b Zehner, c Hunderter, d Tausender usw; $a, b, c, d, \dots$ sind Ziffern von 0 bis 9. Die Rechnung heißt:

$$(\dots d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a \cdot 1) : 9$$

Wir teilen die einzelnen Summanden so auf, dass das Resultat der Division besonders leicht zu sehen ist:

$$\begin{aligned}
 & [\dots (d \cdot 999 + d) + (c \cdot 99 + c) + (b \cdot 9 + b) + a \cdot 1] : 9 \\
 & = \dots d \cdot 111 + c \cdot 11 + b \cdot 1 + \frac{\dots d + c + b + a}{9} \\
 & = \dots d \cdot 111 + c \cdot 11 + b \cdot 1 + \frac{QS}{9}
 \end{aligned}$$

Ist $\frac{QS}{9}$ eine ganze Zahl, dann ist $QS = 9$ oder gleich einem Vielfachen von 9, und es ergibt sich die

Regel 1 (Teilbarkeitsgesetz): *Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.*

Ist die Quersumme nicht durch 9 teilbar, so ist sie selbst (im Falle $QS < 9$) oder die zweite, dritte, ... Quersumme (im Falle $QS > 9$) gleich dem Neunerrest, und es ergibt sich die

Regel 2 (Restregel): *Wenn die Quersumme nicht durch 9 teilbar ist, so ist sie selbst oder die zweite, dritte usw. Quersumme gleich dem Neunerrest.*

Was hat der Schüler von dieser Neunerregel? Er kann nach jeder Division durch 9 selbst leicht prüfen, ob er einen Fehler gemacht hat. Stimmt der

gefundene Rest nicht mit einer der QS überein, so ist ihm sicher ein Fehler passiert, und er kann die Rechnung nochmals machen. Stimmen Neunerrest und QS überein, so kann er ziemlich sicher sein, dass sein Resultat stimmt; das gibt ihm ein Gefühl von Sicherheit und stärkt in gesunder Weise sein Selbstvertrauen.

Ganz sicher ist die Probe allerdings nicht, denn es können Rest und QS übereinstimmen, aber im Resultat doch ein Fehler vorliegen; öfter kommt der folgende Fehler vor:

$$\begin{array}{rcl} 4863 : 9 = 54 & R=3 & QS = 4 + 8 + 6 + 3 = 21 \\ 36 & & \\ 3 & & QS_2 = 3 \end{array}$$

QS₂ stimmt mit dem Rest überein; aber der Schüler hat vergessen, dass der letzte Rest 3 bei der Division auch noch durch 9 zu teilen ist (geht nullmal), das Resultat also 540 R=3 heißt. Dieser Fehler wird durch die Neunerprobe nicht aufgedeckt. Im folgenden werden wir aber sehen, dass die Neunerprobe bei allen Rechenarten angewendet werden kann. Dazu kann man sich im Bestimmen des endgültigen Restes besondere Geschicklichkeit erwerben. Jede Zahl 9, die in der QS auftritt, trägt zum endgültigen Rest nichts bei, weil sie selbst den Rest 0 hat; ebensowenig Zahlen, die zusammen 9 ergeben. Solche Zahlen können beim Bilden der QS von vornherein weggelassen werden.

QS von $49263 = 4 + 2 = 6$ (denn 9 und $6 + 3$ tragen zum Rest nichts bei) Nach einiger Übung erkennen die Schüler auch bei großen Zahlen den endgültigen Rest mit einem Blick.

$$\begin{array}{rcl} 427 & 935 & 436 & R=7 & (2+7 = 9, \quad 5+4 = 9, \quad 3+6 = 9) \\ 5 & 391 & 684 & R=0 & (5+4 = 9, \quad 3+6 = 9, \quad 1+8 = 9) \end{array}$$

Die Neunerprobe bei der Multiplikation

Aber nicht nur bei einer Division durch 9 kann man mit Hilfe der QS eine Probe durchführen, sondern bei jeder Rechnungsart: die so genannte Neunerprobe. Am bekanntesten ist die Neunerprobe bei der Multiplikation; ein Beispiel:

$$\begin{array}{r} 83 \cdot 421 \\ \hline 1263 \\ 3368 \\ \hline 34943 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Die rechte Zahl mit der linken multipliziert; wer es} \\ \text{umgekehrt gewohnt ist, kann es natürlich umgekehrt} \\ \text{machen.)} \end{array}$$

Nach jeder Rechnung stellen wir uns die Frage: Stimmt dieses Resultat? Wir möchten eine Bestätigung erleben. Im Zweifelsfalle rechnen wir noch

einmal. Aber es ist nicht nötig, die ganze Rechnung zu wiederholen; es genügt, die Rechnung mit den Neunerresten durchzuführen, d. h. wir bestimmen mit Hilfe der QS die Neunerreste der beiden Faktoren:

$$83 \quad R=2 \qquad 421 \quad R=7$$

Jetzt multiplizieren wir diese Neunerreste:

$$2 \cdot 7 = 14$$

Von 14 bestimmen wir wieder den Neunerrest: 5. Falls dieser Neunerrest nicht mit dem Rest des Resultates übereinstimmt, ist sicher ein Fehler passiert, und wir müssen die Rechnung wiederholen.

$$34943 \quad R=5$$

Weil die beiden Reste übereinstimmen, können wir ziemlich sicher sein, dass unser Resultat stimmt. Warum wir doch nicht ganz sicher sein können, werden wir noch erklären.

Die Rechnung mit den Neunerresten stellen wir oft in ein Kreuz neben die eigentliche Multiplikation.

$$\begin{array}{r} 83 \cdot 421 \\ \hline 1263 \\ 3368 \\ \hline \underline{\underline{34943}} \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ 2 \times 7 \\ 5 \end{array}$$

Ins linke Feld des Kreuzes schreiben wir den Neunerrest von 83 (2), ins rechte Feld den Neunerrest von 421 (7); diese zwei Neunerreste multiplizieren wir miteinander: $2 \cdot 7 = 14$; den Neunerrest von 14 (5) schreiben wir ins obere Feld. Ins untere Feld schreiben wir den Neunerrest von 34943 (5). Wenn die zwei Zahlen im oberen und unteren Feld nicht übereinstimmen, so liegt sicher ein Fehler vor: entweder in der Multiplikation selbst oder in der Neunerprobe. Im Erkennen der Neunerreste (der kleinsten QS) erüben sich die Schüler schnell Sicherheit und Behändigkeit; die Probe können sie mit ganz kleinen Zahlen durchführen, und da passieren ihnen viel weniger Fehler als mit den großen Zahlen. Und es ist jedesmal eine leise Ich-Stärkung, eine Bestätigung des eigenen Tuns, wenn obere und untere Zahl im Kreuz übereinstimmen. Es ist daher eine gute Gewohnheit, wenn sich die Schüler angewöhnen, nach jeder größeren Multiplikation schnell die Neunerprobe durchzuführen; sie ist im Augenblick gemacht.

Finden wir für eine Zahl als kleinste Quersumme $QS=9$, so dürfen wir dafür den Neunerrest gleich null setzen; denn $QS=9$ heißt ja, die Zahl ist ohne Rest teilbar. Weitere Beispiele:

$$\begin{array}{r}
 328 \cdot 473 \\
 \hline
 3784 \\
 946 \\
 \hline
 1419 \\
 \hline
 \underline{\underline{155144}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 4 \swarrow \searrow 5 \\
 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 214 \cdot 536 \\
 \hline
 2144 \\
 536 \\
 \hline
 1072 \\
 \hline
 \underline{\underline{114704}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 8 \\
 7 \swarrow \searrow 5 \\
 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 369 \cdot 517 \\
 \hline
 4653 \\
 3102 \\
 \hline
 1551 \\
 \hline
 \underline{\underline{190773}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \swarrow \searrow 4 \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 579 \cdot 4863 \\
 \hline
 43767 \\
 34041 \\
 \hline
 24315 \\
 \hline
 \underline{\underline{2815677}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 3 \swarrow \searrow 3 \\
 0
 \end{array}$$

Warum können wir uns auf die Neunerprobe nicht unbedingt verlassen? Es kann uns passieren, dass wir bei einer Rechnung sich gegenseitig aufhebende Fehler machen, die die QS nicht beeinflussen; solche Fehler deckt die Neunerprobe nicht auf. Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 56 \cdot 573 \\
 \hline
 3438 \\
 2875 \\
 \hline
 \underline{\underline{31188}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 3 \\
 2 \swarrow \searrow 6 \\
 3
 \end{array}$$

Die Neunerprobe stimmt; aber es stecken zwei Fehler in dieser Rechnung. Wir stellen sie richtig:

$$\begin{array}{r}
 56 \cdot 573 \\
 \hline
 3438 \\
 2865 \\
 \hline
 \underline{\underline{32088}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 3 \\
 2 \swarrow \searrow 6 \\
 3
 \end{array}$$

Wo steckten bei der ersten Rechnung die Fehler? In der zweiten Zeile haben wir mit 5 falsch multipliziert und 7 Hunderter statt nur 6 notiert. Beim Addieren haben wir den Übertrag der Hunderter zu den Tausendern vergessen und nur einen Tausender notiert anstatt 2. Ein Hunderter zu viel, ein Tausender zu wenig, diesen Fehler deckt natürlich die QS nicht auf. Aber solche Fehler kommen selten vor.

Noch eine Schreib- und Ausdrucksweise: der Neunerrest von 5873 ist 5. Dafür schreibt man kurz: $5873 \equiv 5$; das Zeichen „ $\equiv$ “ liest man „kongruent“, genauer „kongruent modulo 9“; d. h. die beiden Zahlen ergeben bei Division durch 9 den gleichen Rest. Ebenso könnte man schreiben: $5873 \equiv 14 \equiv 32$ usw.

Neunerprobe bei der Addition

$$\begin{array}{r|l}
 5873 & 5 \\
 462 & 3 \\
 512 & 8 \\
 18743 & 5 \\
 31 & 4 \\
 \hline
 25621 & \equiv 7 \\
 \hline
 \end{array}$$

Hinter jeden Summanden schreiben wir den Neunerrest und addieren sie. Von Ihrer Summe (25) notieren wir wieder den Neunerrest (7). Wenn er nicht mit dem Neunerrest des Resultates übereinstimmt, so liegt ein Fehler vor. Die Reste stimmen hier aber überein.

Das Rechnen der Schüler wird sehr geschmeidig und sicher, wenn sie die Zahlen laufend durch ihre Neunerreste ersetzen und die Neunerprobe machen. Sie kann auch durchgeführt werden, wenn Dezimalzahlen addiert werden.

$$\begin{array}{r|l}
 77,46 & 6 \\
 121,39 & 7 \\
 17,03 & 2 \\
 4863,57 & 6 \\
 \hline
 5079,45 & \equiv 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

Eigentlich ist der Neunerrest von 77,46 gleich 0,06. Aber wir können das Komma weglassen; auf den Verlauf der Neunerprobe hat es keinen Einfluss.

Neunerprobe bei der Subtraktion

Auch bei der Subtraktion besteht die Neunerprobe darin, dass man anstatt der gegebenen Zahlen ihre Neunerreste subtrahiert.

$$\begin{array}{r|l}
 58732 & 7 \\
 -43284 & -3 \\
 \hline
 15448 & \equiv 4 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 14573 \qquad 2 \\
 -9635 \qquad -5 \\
 \hline
 4938 \equiv 6 \equiv -3 \quad ? \\
 \hline
 \end{array}$$

Beim zweiten Beispiel ist der Neunerrest des Resultates 6; die Subtraktion des zweiten Neunerrestes (5) vom ersten (2) ergibt aber -3. Ist $6 \equiv -3$? Wir können bei der Neunerprobe den negativen Rest vermeiden, indem wir für den Minuenden 14573 nicht den Rest 2 sondern 11 angeben; denn 2 ist kongruent 11. Dann lautet die Neunerprobe $11-5 = 6$ und die Neunerreste der Subtraktion und der Probe stimmen überein. An solchen Beispielen lernen die Schüler ganz besonders beweglich mit

Resten umgehen. Der negative Rest hat aber auch seinen guten Sinn; wir können z.B. rechnen:

$$\begin{array}{llll} 24 : 9 = 3 & R=-3 & \text{denn} & 24 = 3 \cdot 9 - 3 \\ 15 : 9 = 2 & R=-3 & \text{denn} & 15 = 2 \cdot 9 - 3 \\ 6 : 9 = 1 & R=-3 & \text{denn} & 6 = 1 \cdot 9 - 3 \end{array}$$

Wenn wir den Rest wie eine Korrektur empfinden, so ist es die kleinere Korrektur, wenn wir zum Schluss 3 subtrahieren, als wenn wir 6 addieren ($24=2\cdot 9+6$). Insofern ist der Rest -3 sogar berechtigter. Besonders deutlich wird dies bei Rechnungen wie $17:9$; die Division geht doch eher zweimal als nur einmal; der Rest ist dann eben -1. Haben die Schüler schon mit negativen Zahlen rechnen gelernt, so macht der Umgang mit negativen Resten besonders beweglich. Und wir finden die zu negativen Resten kongruenten positiven Reste einfach, indem wir 9 addieren. Beispiele:

$$\begin{array}{llll} -1 \equiv 8 & \text{denn} & 44 : 9 = 5 & R=-1 \quad \text{oder} \quad 44 : 9 = 4 \quad R=8 \\ -2 \equiv 7 & \text{denn} & 34 : 9 = 4 & R=-2 \quad \text{oder} \quad 34 : 9 = 3 \quad R=7 \\ -3 \equiv 6 & \text{denn} & 24 : 9 = 3 & R=-3 \quad \text{oder} \quad 24 : 9 = 2 \quad R=6 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \end{array}$$

Neunerprobe bei der Division und bei der Messung

Ganz besonders gestaltet sich die Neunerprobe bei diesen beiden Rechnungsarten. Sie kann nicht einfach mit den Neunerresten durchgeführt werden. Beispiele:

$$\begin{array}{r} 523 : 15 = 34 \quad R=13 \\ \underline{-45} \\ 73 \\ \underline{-60} \\ 13 \end{array}$$

Unsere gewohnte Formulierung: $523 : 15$ geht 34 mal Rest 13 heißt eigentlich, dass wir die Rechnung als Messung auffassen, 523 gemessen mit 15. Da die Resultate die gleichen sind, ob wir die Rechnung als Division oder als Messung auffassen, mache ich fortan keinen Unterschied zwischen den beiden Rechnungsarten, obwohl inhaltlich einer besteht.

Ersetzen wir Dividend und Divisor einfach durch ihre Neunerreste, so ergibt sich die Rechnung $1 : 6 = 0 \quad R=1$; mit der eigentlichen Rechnung ist kein Zusammenhang zu sehen. Um einen solchen zu finden, müssen

wir uns darauf besinnen, was die obige Rechnung eigentlich bedeutet, nämlich:

$$523 = 34 \cdot 15 + 13$$

Ersetzen wir diese Zahlen durch ihre Neunerreste, und fragen wir, ob sich eine Kongruenz ergibt.

$$\begin{array}{l} ? \\ 1 \equiv 7 \cdot 6 + 4 \\ 1 \equiv 42 + 4 \\ 1 \equiv 46 \\ \checkmark \end{array}$$

Ja, denn 46 ist kongruent 1. Weitere Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} 476 : 12 = 39 & R=8 & 476 = 39 \cdot 12 + 8 \\ \begin{array}{r} -36 \\ 116 \\ -108 \\ \hline 8 \end{array} & & \begin{array}{l} ? \\ 8 \equiv 3 \cdot 3 + 8 \\ 8 \equiv 17 \\ 8 \equiv 8 \\ \checkmark \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 837 : 11 = 76 & R=1 & 837 = 76 \cdot 11 + 1 \\ \begin{array}{r} -77 \\ 67 \\ -66 \\ \hline 1 \end{array} & & \begin{array}{l} ? \\ 0 \equiv 4 \cdot 2 + 1 \\ 0 \equiv 9 \\ 0 \equiv 0 \\ \checkmark \end{array} \end{array}$$

Es ist gut, wenn sich die Schüler der Bedeutung einer Division bewusst sind, und sie in eine Multiplikation zurückverwandeln können. Man kann es zuerst mit kleinen Zahlen üben:

$$37 : 8 = 4 \quad R=5 \quad \text{d. h.} \quad 37 = 4 \cdot 8 + 5$$

Dass diese Zahlbeziehung stimmt, sehen wir mit einem Blick. Bei großen Zahlen sehen wir es nicht so schnell, aber bei der Neunerprobe. Noch ein Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 8327 : 23 = 362 & R=1 & 8327 = 362 \cdot 23 + 1 \\ \begin{array}{r} -69 \\ 142 \\ -138 \\ \hline 47 \\ -46 \\ \hline 1 \end{array} & & \begin{array}{l} ? \\ 2 \equiv 2 \cdot 5 + 1 \\ 2 \equiv 11 \\ \checkmark \end{array} \end{array}$$

Nach einiger Übung kommt den Schülern die Neunerprobe auch bei der Division nicht kompliziert vor.

Oft habe ich im ersten Hauptunterricht einer 9. Klasse mit der Neunerprobe begonnen. Meistens kannten sie die Schüler noch nicht, oder nur vage. Sie fühlten sich schnell von ihr angesprochen. Sie lernten etwas Neues im vertrauten Milieu der vier Grundrechenarten kennen. Es war eine Repetition von Bekanntem unter neuen Gesichtspunkten. Und außerdem stärkte die Neunerprobe ihr Selbstvertrauen; bei der Neunerprobe erleben: „Ja, ich habe richtig gerechnet“, oder wenn sie einen Fehler aufdeckte und neu gerechnet werden musste, aber es dann stimmte: „Jetzt habe ich richtig gerechnet“, solches Erleben ist jedesmal eine leise Stärkung des Selbstvertrauens. Und dadurch entsteht beim Schüler eine Vertrauensbrücke zum Lehrer: „Er hat mir zeigen können, wie ich im Rechnen sicher werden kann, sicher auf eigenen Füßen stehen kann.“ Dieses Erlebnis ist für den Neuntklässler eine Wohltat, der sich innerlich ja so unsicher fühlt.

Aber selbstverständlich könnten die Schüler schon in den Klassen der Mittelstufe diese Neunerprobe kennen lernen. Sie gäbe ihnen dort schon Sicherheit, und manche Unsicherheit, mit der die Schüler in die Oberstufe kommen, würde vielleicht gar nicht entstehen. Die Schüler brächten dann eine gute Grundlage für Weiterentwicklungen mit und auch für den von Rudolf Steiner geforderten Schritt vom Kennen zum Erkennen; denn es muss doch in den Schülern die Grundfrage entstehen: Warum funktioniert eigentlich die Neunerprobe?

Von der 9. Klasse an kann diese Frage beantwortet werden. Betrachten wir die Neunerprobe noch einmal bei einer Multiplikation:

$$\begin{array}{r} 75 \cdot 62 \\ \hline 310 \\ 434 \\ \hline 4650 \end{array} \quad \begin{array}{c} 6 \\ 3 \times 8 \\ 6 \end{array}$$

Um zu erkennen, worauf die Neunerprobe beruht, müssen wir sehen, wie die Faktoren 75 und 62 in die Neunerreihe eingebettet sind:

$$75 : 9 = 8 \quad R=3 \quad \text{d.h.} \quad 75 = 8 \cdot 9 + 3$$

$$62 : 9 = 6 \quad R=8 \quad \text{d.h.} \quad 62 = 6 \cdot 9 + 8$$

$$75 \cdot 62 = (8 \cdot 9 + 3) \cdot (6 \cdot 9 + 8)$$

$$75 \cdot 62 = 48 \cdot 9^2 + 64 \cdot 9 + 18 \cdot 9 + 3 \cdot 8$$

Diese Klammern multiplizieren wir nach der Klammerregel aus; die Bögen deuten an, wie wir multiplizieren. Die ersten drei Teilprodukte enthalten alle den Faktor 9; dieser gemeinsame Faktor kann ausgeklammert werden:

$$75 \cdot 62 = (48 \cdot 9 + 64 + 18) \cdot 9 + 3 \cdot 8$$

$3 \cdot 8 = 24$ kann auch noch in die Neunerreihe aufgenommen werden:
 $24 = 2 \cdot 9 + 6$. Also:

$$75 \cdot 62 = (48 \cdot 9 + 64 + 18 + 2) \cdot 9 + 6$$

Also ist 6 der Neunerrest von $75 \cdot 62$; woher stammt er? Von

$$3 \cdot 8 = 24 \equiv 6$$

Wir lesen ab: *Der Neunerrest des Produktes $75 \cdot 62$ ist kongruent dem Produkt $3 \cdot 8$ der Neunerreste der Faktoren.*

Darauf beruht die Neunerprobe bei der Multiplikation. Schon an diesem konkreten numerischen Beispiel können wir ablesen, dass die Regel allgemeingültig ist: ***Der Neunerrest eines Produktes ist kongruent dem Produkt der Neunerreste.***

Deutlicher wird die Allgemeingültigkeit, wenn wir die Rechnung algebraisch durchführen. Zwei Zahlen A und B sollen miteinander multipliziert werden. Wir betten sie in die Neunerreihe ein:

$$A = a \cdot 9 + \alpha$$

$$B = b \cdot 9 + \beta$$

$$\alpha = \text{Neunerrest von } A$$

$$\beta = \text{Neunerrest von } B$$

$$A \cdot B = (a \cdot 9 + \alpha) \cdot (b \cdot 9 + \beta)$$

$$A \cdot B = a \cdot b \cdot 9^2 + a \cdot \beta \cdot 9 + \alpha \cdot b \cdot 9 + \alpha \cdot \beta$$

$$A \cdot B = (a \cdot b \cdot 9 + a \cdot \beta + \alpha \cdot b) \cdot 9 + \alpha \cdot \beta$$

Also: *Der Neunerrest von $A \cdot B$ ist kongruent dem Produkt $\alpha \cdot \beta$ der Neunerreste.*

Bei den andern Rechnungsarten kann man die Gültigkeit der Neunerprobe auf die gleiche Art einsehen: die Zahlen in die Neunerreihe einbetten.

Die Division durch 11 und die Elferprobe

ARNOLD BERNHARD

Auch der Rest bei Division durch 11 kann aus den Stellen des Dividenten abgelesen werden; wir finden ihn, indem wir die Stellen *abwechselnd addieren und subtrahieren*, und zwar müssen die Einer addiert, die Zehner subtrahiert, die Hunderter wieder addiert, die Tausender subtrahiert werden ... usw. Die so errechnete Zahl nennt man die *abwechselnde oder alternierende Quersumme*, abgekürzt aQS. Sie ist kongruent zum Elferrest.

$$\text{Beispiel: } \begin{array}{r} + + + \\ \underline{5} \underline{2} \underline{4} \underline{6} \underline{3} \underline{5} \end{array} : 11 = ? \quad \text{aQS} = 5 - 3 + 6 - 4 + 2 - 5 = 1 = \text{Rest}$$

Man kann über und unter die Stellen abwechselnd ein Pluszeichen und ein Minuszeichen setzen, wobei bei den Einern mit dem Pluszeichen anzufangen ist. Prüfen wir ob die Division wirklich den Rest 1 ergibt.

$$\begin{array}{r} 524635 : 11 = 47694 \\ 84 \\ 76 \\ 103 \\ 45 \\ 1 \text{ Rest} \end{array}$$

Es kann sein, dass die aQS größer als 10 ist; dann ist der Rest der Division gleich dem Rest, der sich ergibt, wenn wir die aQS durch 11 teilen.

$$\begin{array}{r} + + + \\ \underline{9} \underline{1} \underline{8} \underline{2} \underline{7} \end{array} : 11 = ? \quad \begin{array}{l} \text{aQS} = 7 - 2 + 8 - 1 + 9 = 21 \\ 21 : 11 = 1 \text{ Rest} = 10 \end{array}$$

Läuft die Division wirklich den Rest 10?

$$\begin{array}{r} 91827 : 11 = 8347 \\ 38 \\ 52 \\ 87 \\ 10 \text{ Rest} \end{array}$$

Falls die aQS durch 11 teilbar ist, ist auch die Zahl selbst durch 11 teilbar.

$$\text{Beispiele: } \begin{array}{r} + + + \\ \underline{\underline{382734}} \end{array} : 11 = ? \quad \text{aQS} = 4-3+7-2+8-3 = 11$$

Gibt die Division keinen Rest?

$$\begin{array}{r} 382734 : 11 = 34794 \\ 52 \\ 87 \\ 103 \\ 44 \\ 0 \text{ Rest} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + + \\ \underline{\underline{8745}} \end{array} : 11 = ? \quad \text{aQS} = 5-4+7-8 = 0$$

$$\begin{array}{r} 8745 : 11 = 795 \\ 104 \\ 55 \\ 0 \text{ Rest} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + + + \\ \underline{\underline{91718}} \end{array} : 11 = ? \quad \text{aQS} = 8-1+7-1+9 = 22$$

$$\begin{array}{r} 91718 : 11 = 8338 \\ 37 \\ 41 \\ 88 \\ 0 \text{ Rest} \end{array}$$

Es kann vorkommen, dass die aQS negativ wird. Haben negative Reste einen Sinn? Ja! Wir können es am leichtesten bei kleinen Dividenten einsehen. Sollen wir 32 durch 11 teilen (oder mit 11 messen), so ist die Antwort, es gehe dreimal und der Rest sei -1 angemessener, als die Antwort, es gehe nur zweimal und der Rest sei 10.

$$\begin{array}{llll} 32 : 11 = 3 & \text{Rest}=-1 & \text{heißt} & 32 = 3 \cdot 11 - 1 \\ 32 : 11 = 2 & \text{Rest}=10 & \text{heißt} & 32 = 2 \cdot 11 + 10 \end{array}$$

Der Rest -1 ist absolut genommen viel kleiner als der Rest 10.

Weitere Beispiele:

$$\begin{array}{llll} 42 : 11 = 4 & R = -2 & \text{aQS} = 2-4 = -2 \\ 52 : 11 = 5 & R = -3 & \text{aQS} = 2-5 = -3 \\ 120 : 11 = 11 & R = -1 & \text{aQS} = 0-2+1 = -1 \end{array}$$

Kongruent modulo 11 (in bezug auf den Divisor 11) sind also die Reste -2 und 9, -3 und 8, -1 und 10. Indem wir zu den negativen Resten 11

addieren, kommen wir zu den kongruenten positiven Resten. Es ist leicht einzusehen, dass dies allgemeingültig ist.

Beispiele mit größeren Dividenden:

$$\begin{array}{r} + + + \\ 18532 : 11 = ? \end{array} \quad \text{aQS} = 2-3+5-8+1 = -3$$

Falls wir mit positivem Rest rechnen, müsste sich also der Rest $-3+11=8$ ergeben.

$$\begin{array}{r} 18532 : 11 = 1684 \\ 75 \\ 93 \\ 52 \\ 8 \text{ Rest} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + + + \\ 839263 : 11 = ? \end{array} \quad \text{aQS} = 3-6+2-9+3-8 = -15$$

Um zum kongruenten positiven Rest zu kommen, müssen wir zweimal 11 addieren: $-15 + 22 = 7$

$$\begin{array}{r} 839263 : 11 = 76296 \\ 69 \\ 32 \\ 106 \\ 73 \\ 7 \text{ Rest} \end{array}$$

Wenn sich als aQS eine negative Zahl ergibt, die durch 11 teilbar ist, so ist die ganze Zahl durch 11 teilbar.

$$\text{Beispiel: } \begin{array}{r} + + + \\ 19283 : 11 = ? \end{array} \quad \text{aQS} = 3-8+2-9+1 = -11$$

$$\begin{array}{r} 19283 : 11 = 1753 \\ 82 \\ 58 \\ 33 \\ 0 \text{ Rest} \end{array}$$

Dieses Rechnen mit negativen Resten und den entsprechenden positiven Resten kann die Beweglichkeit sehr fördern.

Worauf beruht diese Elferregel? So wie 9 ist auch 11 Nachbarzahl von 10, der Grundzahl des Zehnersystems. Und alle Potenzen von 10, die weiteren Hauptzahlen des Zehnersystems, ergeben durch 11 dividiert entweder den Rest +1 oder -1. Division der Hauptzahlen des Zehnersystems durch 11:

$10^0 = 1$	$1 : 11 = 0$	Rest=+1
$10^1 = 10$	$10 : 11 = 1$	Rest=-1
$10^2 = 100$	$100 : 11 = 9$	Rest=+1
$10^3 = 1000$	$1000 : 11 = 91$	Rest=-1
	10	
	-1	
$10^4 = 10000$	$10000 : 11 = 909$	Rest=+1
	100	
	1	

Es ist einzusehen, dass weiter abwechselnd die Reste -1 und +1 auftreten; denn bei den Divisionen treten abwechselnd die vorletzten Reste 10 und 100 auf.

$10^5 = 100000$	$100000 : 11 = 9091$	Rest=-1
	100	
	10 vorletzter Rest	
	-1	
$10^6 = 1000000$	$1000000 : 11 = 90909$	Rest=+1
	100	
	100 vorletzter Rest	
	1	

Allgemein gilt: $10^n:11$ gibt den Rest +1, wenn n *gerade* ist, und den Rest -1, wenn n *ungerade* ist. Prüfen wir die letzte Division durch Zurückmultiplizieren:

$$\begin{array}{r}
 11 \cdot 90909 \\
 \hline
 90909 \\
 90909 \\
 \hline
 999999
 \end{array}$$

Es fehlt der Rest +1 bis zu 1000000. Und die vorletzte Division als Multiplikation:

$$\begin{array}{r}
 11 \cdot 9091 \\
 \hline
 9091 \\
 9091 \\
 \hline
 100001
 \end{array}$$

Das Resultat der Multiplikation ist um 1 zu groß; also Rest -1.

Teilen wir jetzt die allgemeine Zahl mit a Einern, b Zehnern, c Hundertern, d Tausendern usw. durch 11.

$$\begin{aligned} & \dots g f e d c b a : 11 \\ & = \\ & (\dots g \cdot 1000000 + f \cdot 100000 + e \cdot 10000 + d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a \cdot 1) : 11 \end{aligned}$$

Teilen wir die Hauptzahlen des Zehnersystems, d. h. die Potenzen von 10, durch 11, so treten abwechselnd die Reste +1 und -1 auf, und zwar +1 bei gerader Anzahl von Nullen, -1 bei ungerader Anzahl Nullen. Da die Hauptzahlen mit a, b, c , usw. multipliziert sind, sind es auch die Reste +1 und -1. Also treten als Reste auf: $+a - b + c - d + e - f + g \dots$ Das ist aber genau die abwechselnde Quersumme.

Zum Schluss fassen wir als Regel zusammen: *Eine Zahl durch 11 dividiert ergibt einen Rest, der kongruent ist zur abwechselnden Quersumme der Zahl.* Abwechselnde Quersumme = Einer - Zehner + Hunderter - Tausender usw. Kongruente Reste unterscheiden sich um 11 oder ein Vielfaches von 11. Insbesondere: *Ist die aQS kongruent 0 modulo 11, d. h. ist sie durch 11 teilbar, dann ist auch die Zahl selbst durch 11 teilbar, und zwar unabhängig davon, ob die aQS positiv oder negativ ist.*

Bei Dividenten mit *ungerader* Anzahl Stellen, kann auch die vorderste Stelle mit einem Pluszeichen versehen werden; wechselt man dann von vorn nach hinten mit Additionen und Subtraktionen ab, so werden die Einer addiert, wie es sein muss. Hat hingegen der Divident eine *gerade* Anzahl Stellen, so muss bei den Einern mit dem Pluszeichen angefangen werden oder dann bei der vordersten Stelle mit dem Minuszeichen. Macht man es umgekehrt, so ist die errechnete „aQS“ nicht kongruent zum Elferrest. Beispiel:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccccccc} + & + & + & & & & \\ 5 & 3 & 8 & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & & & & & & \end{array} & \text{„aQS“} = 5 - 3 + 8 - 2 + 4 - 6 = 6 \\ 538246 : 11 = 48931 \\ \begin{array}{r} 98 \\ 102 \\ 34 \\ 16 \\ 5 \text{ wirklicher Rest} \end{array} \end{array}$$

Die richtige aQS ist $6 - 4 + 2 - 8 + 3 - 5 = -6$. Ist -6 kongruent 5? Ja, denn $-6 + 11 = 5$.

Die Elferprobe

Genau gleich wie mit den Neunerresten (und auch aus den gleichen Gründen) kann jede Rechnung mit den Elferresten geprüft werden. Weil die aQS auch negativ werden kann, erfordert dies einen sicheren Umgang mit positiven und negativen Zahlen; er kann natürlich auch mit dieser Elferprobe erübt werden.

Beispiele zur Elferprobe bei der Multiplikation

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} + & + \\ 568 & \cdot 732 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 5856 \\
 4392 \\
 3660 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 415776 \\ \hline \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 42 \\
 \hline
 \begin{array}{cc} -2 & \\ 7 & \times 6 \\ -2 & \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} + & + \\ 527 & \cdot 283 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 1981 \\
 566 \\
 1415 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 149141 \\ \hline \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 -30 \\
 \hline
 \begin{array}{cc} -8 & \\ 10 & \times -3 \\ -8 & \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} + & + \\ 382 & \cdot 273 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 546 \\
 2184 \\
 819 \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 104286 \\ \hline \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} +6 & \\ -3 & \times -2 \\ -5 & \\ +6 & \end{array}
 \end{array}$$

Beispiele zur Elferprobe bei der Division

$$\begin{array}{r}
 328 : 17 = 19 \\
 \underline{-17} \\
 158 \\
 \underline{-153} \\
 5 \text{ Rest}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + + \\
 328 = 19 \cdot 17 + 5 \\
 \underline{-} \\
 ? \\
 9 \equiv 8 \cdot 6 + 5 \\
 \underline{-} \\
 ? \\
 9 \equiv 48 + 5 = 53 \\
 \underline{-} \\
 9 \equiv -2 \\
 \checkmark
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5713 : 24 = 238 \\
 \underline{-48} \\
 91 \\
 \underline{-72} \\
 193 \\
 \underline{-192} \\
 1 \text{ Rest}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + + \quad + + \\
 5713 = 238 \cdot 24 + 1 \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \\
 ? \\
 4 \equiv 7 \cdot 2 + 1 = 15 \\
 \underline{-} \\
 4 \equiv 4 \\
 \checkmark
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 958172 : 29 = 33040 \\
 \underline{-87} \\
 88 \\
 \underline{-87} \\
 117 \\
 \underline{-116} \\
 12 \text{ Rest}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + + + \quad + + + \\
 958172 = 33040 \cdot 29 + 12 \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \quad \underline{-} \\
 ? \\
 -16 \equiv (-4) \cdot 7 + 1 = -27 \\
 \underline{-} \\
 -16 \equiv -16 \\
 \checkmark
 \end{array}$$

Die Gleichungslehre in der 9. und 10. Klasse

KLAUS LABUDDE

Einige Vorbemerkungen

1. Man kann der Gleichungslehre eine ausschließlich dienende Funktion zuschreiben, die ihr im Rahmen der Beschäftigung mit den verschiedensten mathematischen Gebieten zukommt. Dann wird man im Unterricht nahezu ausschließlich bestrebt sein, die Lösungstechniken verständlich zu machen und einzuüben. Den vorliegenden Ausführungen liegt eine weitergehende Absicht zugrunde. Die Gleichungslehre als solche soll zum Gegenstand mathematischen Denkens gemacht und pädagogisch genutzt werden, und zwar möglichst gründlich.
2. Die Art der Darstellung ist bewusst nicht rein mathematisch gehalten. Handelt es sich doch um Inhalte, die man wohl als allgemein bekannt voraussetzen darf. Außerdem hatte ich beim Schreiben immer wieder konkrete Situationen mit meinen Schülern in der Erinnerung vor mir; und diese wollte ich auch einbeziehen. Schließlich ging es mir hauptsächlich um Gesichtspunkte für die Unterrichtsgestaltung, hier im besonderen um die unterschiedliche Behandlung eines Gebietes im 9. und 10. Schuljahr.
3. Die Erfahrung hat gezeigt, dass man hierfür den Hauptunterricht nicht beanspruchen muss. Eine sinnvolle Aufgliederung in kleinere Einheiten, begleitet von reichlichem Üben, halte ich in den Fachstunden für durchführbar.
4. Der Leser findet in der Darstellung so gut wie keine Zahlenbeispiele, und erst recht keine durchgeführten Rechnungen. Das ist Absicht. Ich möchte dazu anregen, passende Beispiele selbst zu suchen.
5. Worin kann man den pädagogischen Sinn der Beschäftigung mit der Gleichungslehre sehen? Hier ließe sich manches anführen, was für andere Gebiete in gleicher Weise gilt. Hervorheben möchte ich eine für

die Waldorfpädagogik charakteristische Erziehungsaufgabe. Wir sollen im Rahmen der Schulung des Denkens dafür Sorge tragen, dass die Begriffe, die wir einführen, als sinnvoll eingesehen werden können und beweglich sind. Mit dem letzteren ist gemeint, dass neue Begriffe für eine Weiterentwicklung offen sein sollen. Sie sollen also gerade nicht etwas fixieren. Das ist über das Mathematische hinaus von großer Bedeutung. Man stelle sich einmal vor, was es für zwischenmenschliche Beziehungen oder für die Arbeit an der Lösung z. B. sozialer Probleme ausmacht, ob die beteiligten Partner sich nur mit absolut festgefügtten Begriffen gedanklich betätigen können, oder ob sie auf diesem Gebiet beweglich sind. Was die Inhalte betrifft, eignen sich die mathematischen Begriffe hierfür i.a. weniger oder gar nicht. Doch kann man innerhalb der Mathematik vielleicht besonders deutlich erfahren, was es überhaupt heißt, Begriffe so zu entwickeln, dass sie für eine weitere Ausgestaltung offen sind. Die Gleichungslehre begleitet die Schüler von der 7. Klasse bis zum Ende ihrer Schulzeit. Und so halte ich es für möglich, der genannten Erziehungsaufgabe dadurch Rechnung zu tragen, dass man den Schülern nicht nur beibringt, wie man Gleichungen löst, sondern auch mit ihnen am Begriff der Gleichung arbeitet. Die vorliegenden Ausführungen sind ein Versuch aufzuzeigen, wie dies geschehen kann. Gleichzeitig sollen sie dazu anregen, innerhalb der Mathematik nach weiteren Begriffen zu suchen, die sich für die Arbeit an diesem pädagogischen Anliegen eignen.

Einleitung

Die folgenden Ausführungen gehen davon aus, dass dieses wichtige Teilgebiet der Algebra in der Mittelstufe (Klasse 5 bis 8) anfänglich schon behandelt wurde und in der Oberstufe (Klasse 9 bis 13) unbedingt fortzusetzen ist. Schon allein deshalb, weil sonst für die Behandlung des Lehrstoffs der oberen Oberstufe wesentliche Voraussetzungen fehlen.

Was inhaltlich vorzubringen ist, darf als bekannt vorausgesetzt werden. Ziel dieser Darstellung ist es, Anregungen zur Art der schulischen Behandlung der Gleichungslehre zu geben. Dabei soll aufgezeigt werden, wie man als Oberstufenlehrer in der 9. Klasse neue Akzente setzen kann, wie man dann aber in der 10. Klasse noch einmal sehr anders mit dem gleichen Stoff umgeht, diesen natürlich auch inhaltlich vertiefend.

Die für die Mittelstufe und die untere Oberstufe in Betracht kommenden Inhalte sollte man nicht auf die verschiedenen Klassenstufen kategorisch verteilen. Der Oberstufenlehrer kann nicht darüber verfügen, was der Klassenlehrer bis zum Ende der 8. Klasse durchnehmen soll. Dieser

kennt seine Schüler am besten und weiß, was sie brauchen. Außerdem wird er sich, wenn er fachlichen Rat braucht, ohnehin an den Oberstufenlehrer wenden. Nach meiner Erfahrung behandelt die Mehrzahl der Klassenlehrer nur die linearen Gleichungen mit einer Unbekannten, einschließlich Textaufgaben. So werden in der Regel die linearen Gleichungssysteme und die quadratischen Gleichungen, die sich als nächstes anschließen, der 9. Klasse vorbehalten bleiben. Der Oberstufenlehrer besitzt im Allgemeinen ein umfassenderes mathematisches Hintergrundwissen, als es der Klassenlehrer haben kann. Dadurch dürfte er besser dafür gerüstet sein, den Schülern das Erlebnis zu vermitteln, dass nunmehr inhaltlich und hinsichtlich der Arbeitsweise ein echter Neueinschlag erfolgt und die Aufgaben nicht nur etwas schwerer werden. Es gibt im Bereich der linearen Gleichungen mit einer Unbekannten durchaus Möglichkeiten, begabte und vorwärtsdrängende Achtklässler mit schwierigeren Aufgaben zu „füttern“. Insofern sehe ich keine Notwendigkeit, quadratische Gleichungen oder lineare Gleichungssysteme bereits im 8. Schuljahr durchzunehmen.

Vom mathematischen Standpunkt aus halte ich es für wichtig, dass den Schülern im Laufe der Oberstufe immer deutlicher wird: Algebra beinhaltet mehr als das Lösen von Gleichungen. Bei der Einführung im 6. Schuljahr haben sie dies in elementarer Form zwar schon erfahren¹, doch tritt es dann meistens im Bewusstsein in den Hintergrund. Wie man konkrete (Text-) Aufgaben mit Hilfe von Gleichungen anpacken kann und dass man dazu fähig sein muss, Gleichungen zu lösen, dies erscheint als das Wesentliche an der Algebra. Das Verhältnis der meisten Neuntklässler zur Mathematik wird zunächst durch diese praxisorientierte Einstellung geprägt, und wie ich meine, zu Recht.

Da mathematische Gesichtspunkte in unserem Zusammenhang den pädagogischen unterzuordnen sind, ist zu fragen, was durch die Arbeit an der Algebra im 9. und 10. Schuljahr erzieherisch geleistet werden kann. Hinweise hierzu sollen sich aus der folgenden Darstellung ergeben.

Die Situation am Beginn der Oberstufe

Wenn ein Waldorfschüler am Ende der 8. Klasse angelangt ist, weiß er im Allgemeinen, wie man lineare Gleichungen mit einer Unbekannten löst. Es bedarf nicht so sehr einer ausgeprägten mathematischen Begabung, um solche Gleichungen tatsächlich auch lösen zu können. Wichtiger ist

¹ Literatur hierzu: A. Bernhard „Algebra für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen“ und E. Schubert „Der Mathematikunterricht in der sechsten Klasse an Waldorfschulen, Teil 1“; Verlag Freies Geistesleben –

es, im Rechnen einigermaßen sicher zu sein. Die Erfahrung zeigt, dass die nötigen Fähigkeiten sehr unterschiedlich ausgebildet sind.

Gemeinsam ist praktisch allen Schülern, dass sie eine Gleichung ausschließlich als eine Rechenaufgabe begreifen, die darin besteht, die Unbekannte zu bestimmen. Wie sie überhaupt das Fach Mathematik hauptsächlich mit „Aufgaben lösen“ identifizieren (manche Schüler haben „Mathematik“ auch in der 9. Klasse noch nicht in ihren Wortschatz aufgenommen und nennen dieses Fach immer noch „Rechnen“). Andere Aspekte einer Gleichung als den genannten kennen sie noch nicht. Ist ihnen das Rechnen im Bereich der rationalen Zahlen geläufig und haben sie sich eine sinnvolle Reihenfolge für die erforderlichen Umformungsschritte eingeprägt, dann werden sie sich auf dem Felde der Gleichungen sicher bewegen können. Dabei begleitet sie als Verständnishilfe das Bild von der Waage, die bei allen Veränderungen stets im Gleichgewicht zu halten ist.

Außer dem individuellen Können bringen viele Schüler aus der Mittelstufe eine bestimmte Prägung durch den Klassenlehrer mit, die ihr Verhältnis zum Fach Mathematik und erfahrungsgemäß ganz speziell zur Algebra beeinflusst. Da der Oberstufenlehrer auf diesem Gebiet aufzugreifen und weiterzuentwickeln hat, was vom Klassenlehrer angelegt wurde, tut er gut daran, sich möglichst frühzeitig ein gutes Bild von der Klasse zu verschaffen, zumindest im Gespräch, besser noch hospitierend. Er sollte wissen, wie die Klasse auf dem Gebiet bislang gearbeitet hat. Ganz abgesehen davon ist es nützlich, die einzelnen Schüler schon etwas zu kennen, bevor man selbst die Arbeit mit ihnen aufnimmt.

Aus dem Verständnis einer Gleichung, das die Schüler bis jetzt haben, ergibt es sich im Grunde von selbst, dass sie x ausschließlich als Unbekannte auffassen, d. h. als eine Zahl, die sie unbewusst und ganz selbstverständlich als existierend voraussetzen und eben nur noch nicht kennen. Die Frage, ob eine vorgelegte Gleichung überhaupt eine Lösung hat, stellt sich in der Mittelstufe wohl kaum. Zumindest solange nicht, wie der Klassenlehrer ausschließlich Gleichungen mit einer eindeutigen Lösung behandelt. Das gilt auch für die Textaufgaben. Hier wird ja, ausgehend von einer konkreten Situation, ein Problem so beschrieben, dass die Existenz der Lösung außer Frage steht. Wesentlich ist der Lösungsweg, der für viele Schüler bekanntlich mit erheblichen Hindernissen gepflastert ist.

An der Schwelle zur Oberstufe erlebt der Schüler zunächst einmal seinen Mathematiklehrer als das eigentlich Neue. Indem dieser die Klasse in algebraisches Neuland führt, hat er gerade am Anfang besonders darauf zu achten, dass seine Schüler, und da vor allem die schwächeren, möglichst keinen Bruch gegenüber dem bisher Gewohnten erleben. Wie

mit dem neuen Stoff auch eine neue Art, daran zu arbeiten, eingeführt werden kann, dies soll im Folgenden dargestellt werden. Es kann sich dabei nur um eine „Momentaufnahme“ handeln, die aufzeigt, was sich in mehrjähriger Erprobung und immer wieder sich abwandelnd bis jetzt ergeben hat. Sie würde in einigen Jahren möglicherweise wieder etwas anders ausfallen.

Die Gleichungslehre in der 9. Klasse

In der Frage, ob die quadratischen Gleichungen oder die linearen Gleichungssysteme zuerst eingeführt werden sollen, habe ich mich meistens für die letzteren entschieden. Sie vermitteln nach meiner Erfahrung stärker den Eindruck, dass damit ein ganz neues Thema angeschlagen wird.

Wir beschränken uns in diesem Schuljahr auf solche Systeme, bei denen die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt. Was sich als Neues ergeben wird, soll ganz aus dem Üben hervorgehen. Zunächst wiederholen wir mittels einiger Beispiele, nach zunehmendem Schwierigkeitsgrad geordnet, möglichst konzentriert die linearen Gleichungen mit einer Unbekannten. Dabei lernen wir die Klasse erstmals im gemeinsamen Tun kennen. Außerdem können wir dabei ausloten, wie weit man im Schwierigkeitsgrad gehen kann, wenn man alle Schüler – oder wenigstens die allermeisten – selbständig üben lassen will. Wenn dann der Zeitpunkt gekommen ist, dass Neues im Unterricht auftauchen darf, bringen wir unvermittelt eine Gleichung, in der außer x auch y vorkommt, und zwar in der Form

$$ax + by = c.$$

Ausdrücklich soll es nur *eine* Gleichung sein. Wir schließen damit an Gewohntes an und führen dann zu der Einsicht, dass es einer weiteren Gleichung bedarf, um zu *einer* Lösung zu kommen. Dass eine Gleichung mehrere, ja sogar beliebig viele Lösungen haben kann, ist den Schülern i.a. nicht bekannt.

Nun stellen wir die Frage, für welchen Wert von x bzw. y die Gleichung erfüllt wird. Wie die Antworten kommen, rasch, nach längerem Überlegen, selbstbewusst oder unsicher, allein schon dies kann aufschlussreich für den Lehrer sein. Die für x und y vorgeschlagenen Werte wird er, ob richtig oder falsch, an die Tafel schreiben, und zwar so, dass eine Gesetzmäßigkeit noch nicht in Erscheinung tritt. Jetzt ist zu prüfen, ob die gegebenen Antworten auch richtig sind. Das Einsetzen ist zu üben, und damit verbunden gibt es zu rechnen, möglichst im Kopf!

Tiefer geht nun die Frage an die Schüler, *wie* sie zu ihren x - und y -Werten gekommen sind. Hier zeigt sich, wer einfach irgendwie probiert hat und wer schon systematisch vorgehen kann. Vor allem wird deutlich, wer klar formulieren kann, was er sagen will; ob er sich an sein Zahlenbeispiel hält oder schon auszudrücken weiß, worauf es eigentlich ankommt. Bei solchen Gesprächen lernt man die Schüler immer besser kennen und weiß dann, wie man den einzelnen seinen Möglichkeiten gemäß anzusprechen hat und was man von ihm erwarten kann. Die Begabungen sind ja in den Klassen meistens breit gestreut, und wir müssen ständig bemüht sein, angemessen zu differenzieren.

Meistens entdeckt ein Schüler im Klassengespräch, dass die Gleichung nicht nur einige, sondern beliebig viele Lösungen besitzt und wie man sie zielgerichtet finden kann. Nun ist die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, dass der y -Wert sich in gleichen Schritten ändert, wenn das auch der x -Wert tut. Es ist nicht notwendig, den allgemeinen Funktionsbegriff, wie er später in der Analysis gebraucht wird, bei dieser Gelegenheit schon einzuführen. Es geht nicht darum, diesen Begriff den Schülern vorzuenthalten, sondern darum, ihn nur in dem Umfang anwesend sein zu lassen, wie er hier eine Rolle spielt. Wichtig ist nicht, dass das Wort „Funktion“ aus dem Klassengespräch herausgehalten wird. Der damit verbundene allgemeine Begriff soll noch nicht eingeführt werden. Seine volle Tragweite ist im Rahmen des hier zu behandelnden Themas noch nicht zu realisieren. Hier ist wesentlich, dass sich in der Klasse ein sicheres Gefühl für die Linearität der Beziehung zwischen x und y entwickelt, und auf was sie sich gründet.

An verschiedenen Beispielen lässt sich nun herausfinden, dass es zwei grundlegend verschiedene Möglichkeiten gibt. Entweder wird y mit wachsendem x auch größer, oder es nimmt ab. Wie man einer Gleichung ansehen kann, welcher der beiden Fälle vorliegt, auch dies liefert Gesprächsstoff. In solchen Unterrichtssituationen kommt es darauf an, dass der Lehrer sich soweit wie nur möglich zurückhält und lediglich mit knappen Bemerkungen oder Fragen die Schüler dazu anregt, sich zu äußern. Erfahrungsgemäß fällt ihnen dies in der Mathematik viel schwerer als z. B. in den kulturkundlichen Fächern.

Nach der Untersuchung einzelner Gleichungen ist es nun an der Zeit, auf den Kern unseres Themas zu kommen. Neben eine Gleichung, mit der wir uns vielleicht schon gründlich befasst haben, stellen wir eine zweite und vergleichen die beiden miteinander. Dies kann dadurch geschehen, dass wir x in beiden Gleichungen die gleichen Werte geben und dann in gleichen Schritten größer werden lassen. Nun muss sich zeigen, ob beide y -Werte ebenfalls wachsen, beide kleiner werden, oder ob sie

sich gegenläufig verändern. Doch kommt es auf jeden Fall zu einem Zusammentreffen der beiden, ob sie sich nun „begegnen“ oder der eine den anderen „überholt“. Natürlich muss man durch die Wahl der Beispiele dafür sorgen, dass im Falle gleichlaufender y -Werte deren Schrittweite verschieden groß ist. Sonst holt das eine y das andere nie ein. Sollte ein besonders wacher Schüler bemerken, dass die Schrittweite der beiden y -Werte auch einmal gleich sein kann, so ist ein großes Lob fällig; aber auch das Versprechen, dass auf diesen Sonderfall noch eingegangen wird. Aus diesen Überlegungen ergibt es sich zwangsläufig, dass es i.a. ein ganz bestimmtes Zahlenpaar (x, y) geben muss, welches beide Gleichungen zugleich erfüllt. Wir nennen es *die* Lösung der beiden Gleichungen.

Im Zusammenhang mit den Betrachtungen, die wir bis jetzt angestellt haben, ergibt es sich fast von selbst, dass auch das Wort „Variable“ auftaucht. Jetzt hat es einen Sinn, dass der Begriff eingeführt wird, den dieses Wort bezeichnet. Grundsätzlich sollte man genau darauf achten, dass man neue Begriffe erst dann einführt, wenn sie aktuell geworden sind und der Sinn der Begriffsbildung von den Schülern auch eingesehen werden kann. Auch ist nicht gemeint, dass das Wort „Unbekannte“ nunmehr aus dem Vokabular zu streichen sei. Je nachdem, welcher Aspekt gerade der wesentliche ist, wird man das eine oder das andere Wort gebrauchen.

Mit der bis jetzt geleisteten Vorarbeit ist der Grund gelegt für die Frage, wie man die Lösung $(x|y)$ für zwei vorgegebene Gleichungen findet. Vielleicht hat man bereits einzelne Beispiele kennengelernt, bei denen die Lösung in einer Wertetabelle auftaucht. Doch zeigen andere Beispiele, dass dies im allgemeinen nicht so ist. Dann mag man durch Probieren – wahllos oder mit Überlegung – versuchen, der Lösung näher zu kommen. Doch sehr befriedigend ist dies Vorgehen nicht. Vor allem deswegen, weil mit jedem Beispiel dessen ganz spezifische Besonderheiten eine Rolle spielen, so dass daraus für ein allgemein anwendbares Verfahren wohl kaum etwas zu gewinnen ist. Gerade Neuntklässler drängen oft nach Rezepten, die man ihnen an die Hand geben soll, damit sie Aufgaben lösen können. Darin erfüllt sich ja bereits manchen der Sinn mathematischen Tuns.

Wir sollten es aber unseren Schülern nicht zu leicht machen! Von den drei gängigen Verfahren eignet sich m. E. das Gleichsetzverfahren am besten dafür, von den Schülern gleichsam selbst entdeckt zu werden. Bei der Erstellung von Wertetabellen für einzelne Gleichungen wird meistens schon herausgefunden, dass man sich die Rechenarbeit erheblich erleichtern kann, wenn man die gegebene Gleichung erst einmal nach x oder y auflöst und dann durch Einsetzen rasch Lösungen finden kann. Von hier aus bedarf es nur weniger Anstöße, um zum Gleichsetzverfahren zu

gelangen. Wichtig ist, bei dieser Gelegenheit deutlich darauf hinzuweisen, dass gleiche Buchstaben gleiche Zahlenwerte bedeuten. Dies spielt auch später immer wieder eine Rolle. Vor allem in der Weise, dass wenn von zwei unbekannten bzw. variablen Zahlen nicht absolut sicher feststeht, dass sie gleich sind, dass sie dann auch durch zwei verschiedene Buchstaben zu kennzeichnen sind. Das Gleichsetzverfahren wird auch in den höheren Klassen immer wieder gebraucht und sollte schon deshalb gründlich eingeübt werden. Für das Einsetzverfahren gilt dies (wenigstens in meiner Unterrichtspraxis) weit weniger. Deshalb habe ich darauf auch weniger Zeit verwendet.

Im Hinblick auf die spätere Ausweitung der Aufgabenstellung auf drei oder gar mehr Unbekannte hat sich mir in der Praxis ergeben, dass das Additionsverfahren gründlich zu behandeln ist. Dazu einige Hinweise, die ich für wichtig halte. Es gibt Kollegen, die die Gleichungen grundsätzlich addieren und da, wo an sich zu subtrahieren wäre, zuvor mit -1 multiplizieren. Andere tun beides und sprechen daher, etwas genauer und umständlicher, vom Additions- bzw. Subtraktionsverfahren. Ich halte es für unergiebig, darüber zu streiten, was vorzuziehen sei. Wichtig ist vielmehr, dass möglichst alle Schüler *ein* Verfahren sicher anwenden können, während die wendigen ohnehin bald beide beherrschen. Die weniger beweglichen Schüler, nicht selten eine recht große Zahl, sind für eine klare Linie in derlei Dingen dankbar. Dazu gehört auch, und gerade bei diesem Verfahren, dass man auf der rechten Seite, hinter einem senkrechten Strich kennzeichnet, welche Umformung man gerade vornimmt. Bei zwei Unbekannten ist es an sich nicht so wichtig, aber bei dreien und mehr. Es fördert die Übersichtlichkeit des Lösungsweges, hilfreich für Schüler und Lehrer, für letzteren im Hinblick darauf, dass er viele Hausaufgaben und manche Klassenarbeit durchzusehen hat.

Bei dem Versuch, dem nachzuspüren, was für die drei Lösungsverfahren gedanklich oder bildlich charakteristisch ist, hat sich für das Gleichsetz- und das Einsetzverfahren ein gedanklicher Aspekt ergeben. Beim Gleichsetzverfahren ist es ein einziger, einfacher Denkschritt: y ist sowohl gleich der rechten Seite der ersten Gleichung als auch gleich der rechten Seite der zweiten. Also sind die beiden rechten Seiten gleich und dürfen daher gleichgesetzt werden. – Beim Einsetzverfahren spielt sich so etwas wie eine Ineinander-Schachtelung ab. Sie setzt voraus, dass die eine Gleichung (1) in der z.B. nach y aufgelösten Form vorliegt, während die andere Gleichung (2) in beliebiger Form gegeben sein darf. Dann muss man sich bewusst machen, dass das unbekannte y in Gleichung (2) mit dem in Gleichung (1) für das dortige y gegebenen Ausdruck übereinstimmt. Also darf dieser für y in die Gleichung (2) eingesetzt werden.

(Man beachte: Den hier dargestellten Gedankenweg in Worte zu fassen, macht mehr Mühe als der doch einfachere Weg beim Gleichsetzverfahren.)

Zum Additionsverfahren findet man leichter einen Zugang über das Bild von der Waage, welches den Schülern i.a. von der Mittelstufe her geläufig ist. Es bedarf lediglich einer weiteren Ausgestaltung. Für jede Gleichung steht das Bild einer im Gleichgewicht befindlichen Waage. Die Füllung der Waagschalen auf Waage (1) kann ein anderes Gewicht haben als die Füllung der Schalen auf Waage (2). Dem Addieren entspricht nun das Zusammenschütten der Füllungen beider linken bzw. beider rechten Waagschalen. Die neuen, schwereren Füllungen sind wieder im Gleichgewicht. Entsprechend lässt sich die Subtraktion durch das Wegnehmen gleicher Mengen auf beiden Seiten ins Bild bringen, ebenso die eventuelle vorher erforderliche Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl, sofern man mit der Verbildlichung so weit gehen will.

Ein weiterer Hinweis gilt dem Begriff der Äquivalenzumformung. An ihm sei grundsätzlich erläutert, worauf wir beim Umgang mit Begriffen achten sollen. Für die Mittelstufe gilt ja, dass sämtliche Umformungen zur Auflösung einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten Äquivalenzumformungen sind. Anders ausgedrückt: Es ist die Gewähr gegeben, dass der x -Wert, den man am Ende herausbekommen hat, auch tatsächlich die Lösung der ursprünglich vorgegebenen Gleichung ist, Rechenfehler selbstverständlich ausgeschlossen. Ebenso ist es zunächst auch in der 9. Klasse, zumindest solange wir nur solche linearen Gleichungssysteme behandeln, die eine eindeutige Lösung haben. Interessant wird es in dieser Hinsicht erst, wenn die Frage nach der Äquivalenzeigenschaft der Umformung wirklich aktuell wird, und zwar für den Schüler einsehbar. Das ist dann z.B. der Fall, wenn nach einigen Umformungen eines linearen Gleichungssystems plötzlich alle Unbekannten verschwunden sind und wir genötigt sind, uns zu fragen, was es mit „ $4 = 0$ “ oder „ $0 = 0$ “ eigentlich auf sich hat. Jetzt müssen wir uns über die Lösungsmenge Gedanken machen! Mit anderen Worten: Wir haben die Umformung als solche genauer zu betrachten. Hat sich *durch sie* vielleicht an der Lösung etwas geändert? Ist die Lösung gar „verschwunden“? Was ist eigentlich los?

Grundsätzlich ist wichtig, dass eine Begriffsbildung als solche erst dann ins Bewusstsein gehoben werden soll, wenn die sachliche Arbeit zu einem gewissen Punkt gekommen ist. Das ist einem Ausreifungsprozess vergleichbar. Dies „ins Bewusstsein heben“ kann nun dadurch geschehen, dass man einen neuen Fachausdruck prägt: Äquivalenzumformung.

Für den Fortgang der Arbeit stellt sich jetzt die Frage, ob man bei

eindeutig lösbaren Gleichungssystemen bleiben und damit die Zahl der Unbekannten bzw. Gleichungen erhöhen soll, oder ob jetzt Gleichungen mit zwei Unbekannten untersucht werden sollen, die keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben. Die Entscheidung ist im Hinblick auf die jeweilige Klasse zu treffen. Die eindeutig lösbaren Gleichungssysteme mit drei oder mehr Unbekannten stellen gedanklich kaum neue Anforderungen. Sie erfordern rechnerisch mehr Aufwand, und es ist noch größere Sorgfalt auf die Darstellung des Lösungsweges zu verwenden, wenn er übersichtlich sein soll. Gerade aus diesem Grund ist hier dem Additionsverfahren im allgemeinen der Vorzug zu geben. Wie man in günstigen Einzelfällen eines der beiden anderen Verfahren oder ein Mischverfahren vorteilhaft anwendet, dies entdecken die wendigeren Schüler nach einiger Zeit vielleicht selbst. Jedenfalls kommen solche Gleichungssysteme in Betracht, wenn die Klasse noch eine „echte Neunte“ ist, wenn also z. B. das Schuljahr noch nicht so weit fortgeschritten ist und die Schüler der praktischen Seite der Mathematik noch mehr zugetan sind als der gedanklichen. Letzteres ist bis zu einem gewissen Grad erforderlich, wenn man einigermaßen durchschauen will, was es damit auf sich hat, wenn nach einigen Umformungen plötzlich „ $4 = 0$ “ oder „ $0 = 0$ “ dasteht. Dies sind Merkzeichen für bestimmte Tatbestände, aber keine Erklärungen für diese.

Versucht man, der Sache auf den Grund zu gehen, so kann man im Falle der Unlösbarkeit bekanntlich darauf kommen, dass die beiden gegebenen Gleichungen unverträglich sind. Man sieht dies im allgemeinen nicht sofort, aber nach wenigen Umformungen kann sich herausstellen, dass die linken Seiten ($ax + by$) identisch sind, d. h. für jeden Wert von x und y den gleichen Zahlenwert annehmen, während die rechten Seiten ganz bestimmte, verschiedene Zahlen sind. Dann ist offenkundig, dass immer höchstens eine Gleichung erfüllt sein kann, dass das ganze Gleichungssystem also keine Lösung hat. Ein besonders wacher Schüler kann jetzt entdecken, dass hier gerade der Fall vorliegt, auf den er schon vorher aufmerksam wurde, nämlich, dass die Schrittweite der beiden y -Werte gleich ist.²

Wieder anders verhält es sich, wenn das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Hier stimmen, nach entsprechenden Umformungen, nicht nur die linken Seiten überein, sondern auch die Absolutglieder auf der rechten Seite. Dann ist eine Lösung der einen Gleichung auch eine Lösung der anderen. Eine zweite Gleichung bringt in diesem Fall gegenüber der ersten nichts Neues. Da aber eine Gleichung beliebig viele Lösungen

² siehe Seite 187

hat, gilt dies auch für das Gleichungssystem. Es ist nun auch kein Wunder, dass nach Subtraktion beider Gleichungen „ $0 = 0$ “ dasteht. Es wäre eine falsche Vereinfachung, wenn man sagte: „Weil $0 = 0$ herauskommt, gibt es unendlich viele Lösungen. x und y kann man beliebig wählen, und dann hat man eine mögliche Lösung.“ Hier kommt es also sehr genau auf die logische Denkrichtung an.

Mit dieser Darstellung der beiden Sonderfälle soll nicht zuletzt ein deutlicher Hinweis darauf gegeben werden, dass die Qualität der Gedankenbildung hier eine andere ist als bisher. Es ist eben ein Unterschied, ob man sich mit Aufgaben beschäftigt, die zwar rechnerisch einige Anforderungen stellen mögen, aber eine eindeutige Lösung haben, deren Existenz von vornherein gesichert ist; oder ob man sich mit Fragen wie den eben erörterten befasst. Hier klingt schon an, was dann in der 10. Klasse vollends zur Entfaltung kommen soll.

Bevor wir das Gebiet der linearen Gleichungssysteme in der 9. Klasse verlassen, soll noch auf Fragen eingegangen werden, die sich vielleicht aufdrängen. – Wie steht es mit den Textaufgaben, die doch auch ein wichtiges Schulungselement darstellen? Dass sie bislang nur kurz erwähnt wurden, soll nicht heißen, dass sie keine große Rolle spielen. Ganz im Gegenteil! Sie sind m. E. gerade in der 9. Klasse gründlich zu üben. Indem wir zu neuen Gleichungsarten übergegangen sind, können wir auch die Textaufgaben entsprechend ausweiten. An der spezifischen Anforderung, nämlich konkrete Situationen in Form von Gleichungen darzustellen, ändert sich beim Übergang von der 8. zur 9. Klasse nichts wesentlich. Daher diese wenigen Bemerkungen hierzu.

Eine andere Frage ergibt sich, wenn man Textaufgaben, die man in gedruckten Aufgabensammlungen oder Lehrbüchern finden kann, auf ihre Aktualität überprüft. Die so genannten Zahlenrätsel stellen eine Art Brücke von den reinen Gleichungen zu den echten Textaufgaben dar. Ihr Wert liegt m. E. gerade in dieser Brückenfunktion. Auch die Aufgaben, die aus ferner oder fernster Vergangenheit meistens als Rätselfragen überliefert sind, sind zweifellos geeignet. Doch hat man damit noch nicht genügend Übungsmaterial. So bleibt die große Menge der Aufgaben „aus dem praktischen Leben“, die uns zur Verfügung stehen bzw. von uns selbst erstellt wurden. Sind sie tatsächlich – und jetzt ohne Anführungszeichen! – aus dem praktischen Leben? Und zwar aus dem praktischen Leben unserer Tage! Ich nehme an, dass die meisten von uns Lehrern zu wenig in anderen Berufen gestanden haben, als dass sie aus eigener Erfahrung wirklich Aktuelles beisteuern könnten. Darüber hinaus müsste dies Aktuelle so beschaffen sein, dass sich daraus Gleichungssysteme für Neuntklässler ergeben. Hier eröffnet sich ein weites Aufgabenfeld für

solche Kollegen, die aus eigener Erfahrung in anderen Berufen wirklich Aktuelles beitragen könnten. Es gibt nicht wenige durchaus gutwillige Schüler, die ein echtes Interesse für Mathematik nur entwickeln, wenn sie einsehen können, dass man damit Probleme lösen kann, die im praktischen Leben wirklich auftreten. Diese gerade bei Neuntklässlern anzutreffende Einstellung zur Mathematik sollten wir ernst nehmen! Wenn ich Aufgaben benützt habe, von deren „praktischer Bedeutung“ ich selbst nicht ganz überzeugt war, dann habe ich es vorgezogen, auf entsprechende Schülerfragen ehrlich zu reagieren, verbunden mit dem Hinweis, dass man an der Aufgabe vielleicht dennoch etwas lernen kann. Ein Gespräch hierüber kann unter Umständen bei einem Schüler neue Einsichten über den Wert mathematischen Übens wecken. Jedenfalls sollte man sich den Schülerfragen wirklich stellen und nicht versuchen zu überzeugen, wo es nichts zu überzeugen gibt.

Bekanntlich lassen sich die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten dadurch veranschaulichen, dass man sie mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems als die möglichen Lagen zweier Geraden in einer Ebene interpretiert. Dem allgemeinen Fall entspricht, dass sie sich schneiden. Existiert keine Lösung, so entspricht dem die Parallellage zweier verschiedener Geraden. Schließlich sind die Geraden identisch, wenn unendlich viele Lösungen existieren. Es spricht dafür, diese Art der Veranschaulichung in die Arbeit einzubeziehen, dass sich viele Schüler einfach sicherer fühlen, wenn sie mit Anschaulichem zu tun haben. Es gibt sicher Klassen, bei denen es angebracht ist, diese Hilfe in Anspruch zu nehmen. Ich rate jedoch dazu, es nicht auf jeden Fall zu tun. Nach Möglichkeit würde ich es sogar vermeiden. Algebraische Gleichungen bzw. Gleichungssysteme sind sachlich eine Angelegenheit von Zahlen und nicht von geometrischen Figuren. Hier ist die Geometrie Interpretation der Algebra, aber nicht sachliche Erklärung. Diesen feinen, aber doch wesentlichen Unterschied durchschauen Neuntklässler im allgemeinen noch nicht.

Einen weiteren Grund, Geometrisches in diesem Zusammenhang wegzulassen, kann man darin sehen, dass Grundelemente der analytischen Geometrie damit vorweggenommen werden. Natürlich hat man in diesem Gebiet noch längst nicht wirklich Fuß gefasst, wenn man lineare Gleichungen in einem Koordinatensystem veranschaulicht und es dann dabei bewenden lässt, die Lage zweier Geraden zueinander zu betrachten. Doch nähert man sich der analytischen Geometrie eben doch schon ein wenig, aber gerade nicht in der Weise, wie es später ausdrücklich geschehen soll, nämlich als algebraisierte Geometrie. In unserem Zusammenhang handelt es sich um geometrisierte Algebra. Und dies können

Schüler in der 9. Klasse gedanklich noch nicht auseinanderhalten. Wenn man das Anliegen hat, die analytische Geometrie im 11. Schuljahr so einzuführen, dass sie als etwas völlig Neues Geometrie und Algebra verbindet, indem sie lehrt, wie man geometrische Probleme mit algebraischen Mitteln lösen kann, dann wird man vermeiden, sich schon vorher in die Nähe dieses Gebietes zu begeben. Letzten Endes muss der Lehrer entscheiden, ob er seinen Neuntklässlern dadurch entgegenkommt, dass er den algebraischen Sachverhalt ins geometrische Bild bringt.

Die quadratischen Gleichungen stellen für die Neuntklässler weniger als die linearen Gleichungssysteme etwas grundlegend Neues dar, verglichen mit dem, was sie bis zum Ende der 8. Klasse bei ihrem Klassenlehrer in der Algebra gelernt haben. Die binomischen Formeln sind ihnen im allgemeinen bekannt, aber nicht unbedingt geläufig. Doch ist auch damit schon ein Stück Vorarbeit geleistet, um den Lösungsweg für quadratische Gleichungen verstehen zu können. Wichtig ist für den Anfang, dass man nicht zu rasch zu einer der bekannten Lösungsformeln übergeht. Zum einen ist es im Hinblick auf die obere Oberstufe wichtig, das Thema „quadratische Ergänzung“ zu beherrschen, zum anderen sollten wir verhindern, dass unsere Schüler die quadratischen Gleichungen schon so früh schematisch lösen. Dies gilt grundsätzlich so lange diese Gleichungen das eigentliche Thema sind. Später, wenn sie als Werkzeug zur Lösung von Aufgaben aus der höheren Mathematik gebraucht werden, mag man dies anders sehen. Jedenfalls kann ich aus meiner Erfahrung nur raten, die Herleitung und Anwendung einer der Lösungsformeln mindestens bis gegen das Ende des 9. Schuljahres hinauszuschieben. Wenn es dann soweit ist, sollte man versuchen, den Schülern einen deutlichen Eindruck davon zu vermitteln, was man mit solch einer Formel eigentlich gewonnen hat. Handelt es sich doch darum, dass man für einen bestimmten Aufgabentypus ein für allemal die Lösung bestimmt hat und sich damit beim konkreten Beispiel die einzelnen Schritte des Lösungsweges ersparen kann. Zwar haben die Schüler auch schon früher Formeln kennengelernt. Doch kann es gut sein, dass ihnen dieser Nützlichkeitsaspekt dabei noch gar nicht bewusst geworden ist. Das ist m. E. auch gut so; denn bei der ersten Einführung von Formeln in der Algebra kommt es darauf gerade nicht an.

Soll nun das Thema „quadratische Gleichungen“ behandelt werden, so kann man, wie schon bei den Gleichungen mit zwei Unbekannten, Beispiele unvermittelt als Aufgabe stellen. Es sollten Beispiele sein, bei denen die Klasse auch die Chance hat, die Lösungen probierend zu finden. Manche Schüler suchen dann auf diesem Weg ihr Heil. Andere versuchen, in Anlehnung an Bekanntes, durch Umformungen ihr Ziel zu erreichen.

In der Regel finden sich unter den Lösungsvorschlägen auch solche, die brauchbare Ansätze enthalten. Ich erinnere mich nicht, dass ein Schüler völlig selbständig und systematisch bis zur vollständigen Lösung vorgeht. Was die Klasse im Gespräch zusammenträgt, bietet dem Lehrer die Möglichkeit, nur geringe Anstöße geben zu müssen, damit die Schüler die Lösung vollends finden.

Man kann natürlich vor Beginn der eigentlichen Arbeit an den quadratischen Gleichungen vorbereitend üben, wie man einen Ausdruck von der Form

$$x^2 + px$$

zu einem vollständigen Quadrat ergänzt. Worauf es dabei ankommt, lässt sich an vielfältigen Beispielen vertiefen, nicht nur in der Form

$$x^2 + px + \dots = (x + \dots)^2.$$

Hier seien zur Anregung einige andere Beispiele genannt:

$$x^2 - \dots + 36 = (\dots)^2$$

$$\dots 16x \dots = (2x \dots)^2$$

$$(\dots \frac{1}{2}x)^2 = 9x^2 \dots$$

Solche Beispiele bieten außerdem vielfältige Gelegenheit zum Kopfrechnen. Darüber hinaus kann man diese Übungen so anlegen, dass auch die Möglichkeit für zwei richtige Lösungen gegeben ist, was ja auch dem Zweck der Sache dient.

Auf eine heikle Stelle bei der Lösung einer quadratischen Gleichung sei besonders hingewiesen. Lautet beispielsweise eine Gleichung nach ersten Umformungen

$$(x - 5)^2 = 49,$$

so liegt auf der Hand, dass nun zu radizieren ist. In der Regel gibt es auch keine Probleme damit, dass wegen der zwei Lösungen, die sich nun ankündigen, an das doppelte Vorzeichen zu denken ist. Doch schließen die Schüler dann oft ahnungslos über das Ziel hinaus und wollen dieser Tatsache dadurch Rechnung tragen, dass sie in der folgenden Zeile

$$\pm(x - 5) = \pm 7$$

schreiben. Hier hat man sehr sorgfältig zu formulieren, um verständlich zu begründen, dass das doppelte Vorzeichen nur auf einer Seite zu stehen hat. „Wir haben doch gelernt, dass man auf beiden Seiten der Gleichung

das gleiche tun muss, wenn es richtig sein soll.“ So wird dann verständlicherweise argumentiert, aber eben doch falsch. Hier ergibt sich ein guter Anlass, um diese bekannte Umformungsvorschrift genauer zu beleuchten. Bekanntlich gilt sie in der allgemeinen Form nicht, wie sie von Schülern meistens zitiert wird. Im vorliegenden Fall kann man die Klasse z. B. fragen (hier kommt es genau auf den Wortlaut an!): „Wenn das Quadrat von $(x - 5)$ den Wert 49 hat, wie groß kann dann $(x - 5)$ sein?“ Dann ist zusätzlich zu fragen, wie man die richtige Antwort „entweder 7 oder -7“ unmissverständlich in eine schriftliche Form bringt.

Natürlich muss man bei der Auswahl der Aufgaben darauf achten, dass die Lösungen zunächst ganzzahlig sind, später dann rational. Da die Irrationalzahlen ein gesondertes Thema der 9. Klasse sind, sollte man sich darauf einstellen und irrationale Lösungen dementsprechend einbeziehen. Gleichungen, die keine reelle Lösung besitzen, würde ich im 9. Schuljahr nur zur Sprache bringen, wenn aus der Klasse eine entsprechende Frage kommt. Wie man dann reagiert, ist von der konkreten Situation abhängig. Am einfachsten und zunächst einmal auch nicht falsch wäre es zu sagen: „In der Tat gibt es hier keine Lösung“. Für besser halte ich es, so zu reagieren, dass die Schüler ein neues Thema erahnen können, das im Moment wohl noch zu schwierig ist. Es geht hier nicht darum, dass man sich auf billige Weise ein Hintertürchen offen lässt. Im Grunde ist doch das Thema der Erweiterung des Zahlbegriffs angeschlagen, auf das man in den obersten Klassen unbedingt noch einmal eingehen sollte. Das kann, muss aber nicht bedeuten, dass später die komplexen Zahlen ausführlich behandelt werden. Ein erster Einblick in diese neue Zahlenwelt, durchaus verbunden mit offen bleibenden Fragen, ist vor dem Abschluss der Schulzeit jedoch fällig.

Was über das Dargestellte hinaus an dem Thema „quadratische Gleichungen“ vertiefend gearbeitet werden kann und schließlich auch zu seiner Ausweitung in den Bereich der Gleichungen höheren Grades führt, kann nach meiner Erfahrung dem 10. Schuljahr vorbehalten bleiben. Jetzt kam es darauf an, den Schülern Neuland zu erschließen, dass sie jetzt Probleme lösen können, die für sie bislang zu schwierig waren. Dies entspricht im 9. Schuljahr noch weitgehend ihrer Auffassung von Mathematik und damit auch einer der Aufgaben unseres Unterrichts in diesem Fach. Eine andere besteht darin, dass wir unsere Schüler der Oberstufe gemäß in das mathematische Denken einführen, anspruchsvoll und zugleich ganz elementar. Fragestellungen, welche eine 9. Klasse erfassen und als sinnvoll akzeptieren kann, sollen zunächst ins Üben führen. Hieraus ergeben sich dann die Ansätze für die gedankliche Arbeit. Das gleiche Ziel wird in der Kombinatorik verfolgt, nur dass auf diesem Gebiet die Fra-

gestellungen ganz andere sind und der Lehrer nahezu voraussetzungslos arbeiten kann, während er in der Gleichungslehre aufgreifen muss, was die Klasse auf diesem Gebiet schon gearbeitet hat.

Die Gleichungslehre in der 10. Klasse

Auch beim Übergang in die 10. Klasse ist in der Behandlung der Gleichungslehre ein neuer Einschlag fällig. Will man einen Neuntklässler an das mathematische Denken heranzuführen, so wird man von möglichst konkreten Fragestellungen ausgehen. Was an allgemeiner Gesetzmäßigkeit ins Bewusstsein treten soll, wird man von Beispielen ausgehend entwickeln. Diese sind so zu behandeln, dass an ihnen aufleuchten kann, was über sie hinausweist. Diese Art vorzugehen muss keineswegs schlagartig aufhören. Doch sollten, etwa ab der 10. Klasse, jetzt auch solche Überlegungen angestellt werden, die vom „allgemeinen Fall“ ausgehen und dadurch weitergehende Anforderungen an das Abstraktionsvermögen stellen als bisher geschehen. Wann dieser Schritt hin zu solchen Anforderungen im Einzelfall angebracht ist, muss der Lehrer aus der Kenntnis seiner Klasse entscheiden. Sowohl deren Entwicklung im Ganzen als auch die Streuung der Begabungen sind dabei zu berücksichtigen. In diesem Sinne ist das Folgende auch nicht gemeint als etwas, das auf keinen Fall schon im 9. Schuljahr behandelt werden darf. Außerdem kommt es nicht so sehr auf die Inhalte selbst an, mit denen wir uns beschäftigen, als vielmehr auf die Art und Weise, *wie* wir daran arbeiten.

Ausgehend von den quadratischen Gleichungen können nun verschiedene weiterführende Wege eingeschlagen werden. Ein solcher Weg führt zu den Wurzelgleichungen. Dabei wird man sich i.a. auf Gleichungen beschränken, in denen Quadratwurzeln vorkommen. Bekanntlich tritt hier zu den bereits geläufigen Umformungen das Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung hinzu. Und das kann Folgen haben! Wer sich auf seine Rechenfähigkeiten einigermaßen verlassen kann, hat sich in der Oberstufe abgewöhnt, nach der Lösung einer Gleichung die Probe zu machen. Nun stellt sich aber eine neue Erfahrung ein. Es kann bekanntlich vorkommen, dass man bei einer Wurzelgleichung einen Wert herausbekommt, der gar keine Lösung darstellt. Dass dies so ist, wird erst durch die Probe deutlich. Hier erweist sie sich aus der Sache heraus als notwendig; und zwar nicht deswegen, weil man den eigenen Rechenkünsten doch nicht so ganz traut. Die Frage stellt sich: Wie kann es zu einem Ergebnis kommen, das in Wirklichkeit gar keines ist? Irgendwo bei der Umformung der Gleichung muss etwas geschehen sein, was bislang nicht vorkam. Dies Neue gilt es zu entdecken. Hier wird es notwendig, sich über die Qualität der

einzelnen Umformungsschritte tiefergehende Gedanken als bisher zu machen. Versucht man, ausgehend von der nach x aufgelösten Gleichung, die einzelnen Umformungsschritte in umgekehrter Reihenfolge rückgängig zu machen, so kann man an eine „Weggabelung“ kommen. Der eine Weg führt zu der ursprünglich gegebenen, der andere zu einer anderen Gleichung. Beide unterscheiden sich äußerlich geringfügig, aber hinsichtlich der Lösung doch wesentlich. Hier ergibt sich die Möglichkeit, den Begriff der Äquivalenzumformung neu zu entdecken.

Wir haben hier ein charakteristisches Beispiel dafür, wie man den Sinn einer mathematischen Begriffsbildung einsehen kann. Indem man nämlich gewahr wird, dass auch der Gegensatz existiert. Gäbe es nämlich ausschließlich Äquivalenzumformungen, so würden wir etwas als selbstverständlich Empfundenes mit einem Etikett versehen und damit allenfalls ins Bewusstsein heben. Darin erschöpft sich aber eine Begriffsbildung nicht.

Nicht wenige Schüler haben ein Gespür für den Sinn einer Sache und wollen diesen Sinn auch einsehen. Können sie dies nicht, so äußern sie ihren Unmut u. U. mit solchen Worten wie „Wozu dies?“ „Ist doch klar!“ – Was sie suchen, können sie meistens noch nicht in Worte fassen. Deutlich wird aber, dass sie etwas vermissen. Und da meine ich, es ist die Einsicht in den Sinn der neuen Sache.

Ein anderer Weg führt von den quadratischen Gleichungen zu den Gleichungen höheren Grades. Da man sie später in der Analysis manchmal braucht, ist es angebracht, dass man sich mit ihnen anfänglich beschäftigt. Eine Brücke zu diesen Gleichungen stellt die Darstellung einer quadratischen Gleichung in der Linearfaktorform (LFF) dar. Bekanntlich kann man sie durch die Umkehrung des Lösungswegs erhalten, d. h. dass man mit den gefundenen Lösungen x_1 und x_2 die Linearfaktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ bildet, und daraus die Gleichung

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0.$$

Diese entpuppt sich dann nach dem Ausmultiplizieren der Klammern als die ursprüngliche Gleichung, diese natürlich in der normierten Polynomform

$$x^2 + px + q = 0$$

vorausgesetzt. Die bekannten Beziehungen $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ sind jedoch nicht das einzige, was man hieraus gewinnen kann. Die LFF ebnet auch den Weg zu den Gleichungen höheren Grades, verbunden mit Ansätzen für deren Lösung, jedenfalls in günstigen Sonderfällen. Dazu brauchen wir nur die Anzahl der Linearfaktoren zu vergrößern, und schon

haben wir eine Gleichung höheren Grades – mitsamt ihren Lösungen. Leider tun uns solche Gleichungen nicht den Gefallen, in der LFF aufzutreten. Die Polynomform ist uns vertrauter. Doch verrät sie nicht die Lösungen. Sie kann jedoch Hinweise geben. So muss z.B. jede Lösung ein Teiler des Absolutgliedes sein. Dies ergibt sich dadurch, dass man alle Klammern der LFF ausmultipliziert und das so entstandene Absolutglied mit dem Absolutglied der Polynomform identifiziert. Auch die Vorzeichen der Koeffizienten in der Polynomform und der Grad der Gleichung erlauben Rückschlüsse auf Lösungen. So führt die Beschäftigung mit Gleichungen höheren Grades weg von dem schematischen Vorgehen, wie es sich beim Lösen quadratischer Gleichungen mittels einer der bekannten Formeln früher oder später fast zwangsläufig einstellt. Man taucht ein in ein durch die Gleichung vorgegebenes Zahlengefüge und begibt sich, unterschiedliche Aspekte beachtend und miteinander kombinierend, auf die Suche nach Lösungen. Wird man dabei fündig oder ist durch die Art der Aufgabenstellung eine Lösung bereits vorgegeben, so führt die Abspaltung des entsprechenden Linearfaktors u. U. sogar zu sämtlichen Lösungen der Gleichung. Hierdurch erhält die Polynomdivision ihren Sinn, und daher ist es jetzt auch an der Zeit, sie einzuführen.

Seit mehreren Jahren ist die vektorielle analytische Geometrie fester Bestandteil des Stoffplans für die obere Oberstufe an vielen Waldorfschulen. Viele Kollegen halten die Behandlung dieser Form der analytischen Geometrie für wertvoller als die klassische Koordinatengeometrie. Auch die veränderten Prüfungsanforderungen für das Abitur spätestens seit den achtziger Jahren spielen dabei eine Rolle. Jedenfalls macht diese Situation notwendig, dass die linearen Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen bzw. Variablen im Unterricht behandelt werden. Wurde im 9. Schuljahr im Bereich der einfachsten Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen gründlich vorgearbeitet, so kann man sich bei den komplizierten Systemen kürzer fassen, soweit es die Technik des Auflöses betrifft. Dies gilt vor allem für solche Systeme, bei denen die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der Variablen übereinstimmt und eine eindeutige Lösung existiert. Dieser Fall soll hier in den Einzelheiten nicht weiter verfolgt werden, weil gegenüber den einfacheren Systemen nichts wesentlich Neues hinzukommt. Es sei lediglich darauf hingewiesen, dass es mit steigender Anzahl der Gleichungen bzw. Variablen immer wichtiger wird, den Lösungsweg übersichtlich geordnet darzustellen. Das bedeutet auch, dass die einzelnen Umformungsschritte deutlich zu kennzeichnen sind, wie man es einst beim Klassenlehrer gelernt hat. Mir hat es sich in der Unterrichtspraxis ergeben, dass es bei der Anwendung des Additions- bzw. Subtraktionsverfahrens am leichtesten

ist, klare Übersicht zu bewahren. Wie kann man nun für die Arbeit an linearen Gleichungssystemen neue Akzente setzen, die der Arbeitsweise im 10. Schuljahr angemessen sind? Eine Möglichkeit sehe ich z. B. darin, dass man sich auch einmal mit der Determinantenmethode beschäftigt (nur für Systeme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten). Nicht in der Absicht, dass man den drei gängigen Lösungsmethoden noch eine vierte hinzufügt, sondern um neuartige Fragestellungen kennenzulernen. Hat man für das System

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

die Lösung $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ gefunden, so kann die Frage stutzig machen, wie es sich verhält, wenn die Nennerdeterminante einmal gleich null sein sollte, (und die Zählerdeterminante vorerst ungleich null). Nun ist bis zum Anfang zurückzuverfolgen, wie sich diese Besonderheit dort äußert. Da stellt sich heraus, dass die linken Seiten der beiden Gleichungen (in ihrer ursprünglichen Form) entweder identisch sind oder durch Multiplikation einer der beiden Gleichungen mit einer geeigneten Zahl identisch gemacht werden können. Die rechten Seiten sind jedoch verschieden. So ist es unmöglich, dass eine Lösung der einen Gleichung zugleich eine Lösung der anderen ist. Das System ist also unlösbar. Sind jedoch die rechten Seiten auch gleich, so ist die Sachlage völlig anders. Jede Lösung der einen Gleichung – deren gibt es bekanntlich beliebig viele – ist auch eine Lösung der anderen. Das System hat also unendlich viele Lösungen. Äußert sich dies auch in der allgemeinen Lösung, die bereits berechnet wurde? Wenn ja, wie? Hier schließt sich der Kreis, indem wir zu dem zurückkehren, was wir im vorigen Kapitel im Zusammenhang mit „ $4 = 0$ “ und „ $0 = 0$ “ gesagt haben.

Die Schüler können jetzt aber verstehen, dass die Frage, ob ein Gleichungssystem überhaupt lösbar ist, der Frage nach der (eventuellen) Lösung übergeordnet ist. Wenn bei der Besprechung einer solchen Thematik die Einsicht wächst, dass es darauf ankommt zu lernen, Fragen überhaupt richtig zu stellen und verschiedene Gesichtspunkte zum gleichen Problemkreis sachgemäß einordnen zu können, dann ist über die Mathematik hinaus für die allgemeine Bildung einiges erreicht.

Mit ähnlichen Fragen kann man sich gedanklich auseinandersetzen, wenn man Gleichungssysteme mit drei Gleichungen untersucht, bei denen die Anzahl der Variablen von der Anzahl der Gleichungen abweicht. Solche Gleichungssysteme spielen nach meiner Erfahrung im 10. Schuljahr noch keine Rolle. Dies ist erst der Fall bei der Bearbeitung bestimm-

ter Fragen in der vektoriellen analytischen Geometrie (dreidimensional), also nicht vor dem 11. Schuljahr. Daher habe ich dieses Thema im 10. Schuljahr noch nicht aufgegriffen. Aber nicht nur aus diesem Grund. Bietet sich hier doch die Gelegenheit, später noch einmal in neuer Weise und grundsätzlich auf Gleichungen und Gleichungssysteme zurückzukommen.

Ein weiteres Gebiet, welches man schon im 10. Schuljahr aufgreifen kann, betrifft die Exponentialgleichungen. Es spricht aber auch manches dafür, diese Gleichungen dem 11. Schuljahr vorzubehalten. Sie schließen sich aus der Sache heraus an die Logarithmenepoche an, die ja in der 10. Klasse ihren Platz hat. Gerade weil man in dieser Epoche gegenüber früher die Akzente wahrscheinlich anders setzen wird, könnte man die Exponentialgleichungen schon in dieser Epoche behandeln, erfordern sie doch eine gedankliche Auseinandersetzung mit dem allgemeinen Potenzbegriff und mit dem Logarithmusbegriff.

Alle bisher behandelten Gleichungen bzw. Gleichungssysteme lassen sich leicht nach bestimmten Typen ordnen (Grad der Gleichung, Anzahl der Unbekannten und Gleichungen). Dies erleichtert das systematische Vorgehen beim Aufsuchen der Lösung, bis hin zur Anwendung von Formeln. Bei den Exponentialgleichungen ist fast alles anders. Ein systematischer Überblick ist im Grunde nicht mehr möglich. Allenfalls kann man bestimmte, einfache Gleichungstypen systematisch lösen, etwa solche wie z. B. $a^x = b$ oder eventuell $a^{y(x)} = b$. Es gibt aber auch andere, durchaus einfach gestaltete Gleichungen, die durch eine endliche Zahl von Umformungen überhaupt nicht auflösbar sind. Dennoch kann man durch geeignete Überlegungen rein zahlenmäßiger Art zu der Überzeugung gelangen, dass es eine oder einige Lösungen geben muss. Man betrachte z. B. die Gleichung $2^x = x + 1$.

An solchen Überlegungen kann klar werden, dass man zu unterscheiden hat zwischen der Frage nach einer Existenz einer Lösung überhaupt und der Frage nach dem Weg zu dieser Lösung. Oder anders gesprochen: Man gelangt zu der Einsicht, dass man sich der Existenz einer Sache absolut sicher sein kann, aber noch keine Möglichkeit sieht, die Sache selbst „beim Schopf zu packen“. Bleibt man innerhalb der Mathematik, so kann man die Ansicht vertreten, derartiges sei nicht mehr Sache des Schulunterrichts. Aber ist dies nicht eine Frage, der man im Leben bei Erkenntnisbemühungen außerhalb der Mathematik immer wieder begegnet? Insofern mag die Beschäftigung damit gerade in der Schule sinnvoll sein. Vielleicht aber eher im 11. als im 10. Schuljahr.

In der Unterrichtspraxis wird es zunächst darum gehen, Methoden zu finden, mit denen man einer Lösung schrittweise näher kommt. Einfach und dem Bedürfnis vieler Schüler nach anschaulicher Unterstützung ih-

rer mathematischen Bemühungen entgegenkommend ist die graphische Methode. Sie setzt allerdings Vertrautheit mit dem Koordinatensystem und den Grundlagen der analytischen Geometrie voraus. Dies spricht für die Beschäftigung mit Exponentialgleichungen im 11. Schuljahr. Das durch die graphische Methode unterstützte Vorgehen ist überwiegend eine Sache des Willens. Sorgfältiges Zeichnen und Ausdauer im Rechnen (mit Verwendung des Taschenrechners), weil jeder Schritt (z.B. bei einem Iterationsverfahren) eben doch nur näher an die Lösung heranhöhrt, das steht gegenüber den verhältnismäßig einfachen gedanklichen Grundlagen im Vordergrund. Will man dagegen den mühsameren und anfangs vielleicht nicht einmal erfolgversprechenden Weg gehen, indem man versucht, sich in das zahlenmäßige Beziehungsgefüge der vorgelegten Gleichung einzuföhlen, so wird man gedanklich weit mehr gefordert. Beide Tätigkeiten haben ihren spezifischen Wert. Und beide bieten gute Möglichkeiten, die Schüler zur Eigenaktivität anzuregen. Schließlich wird geföhlsmäßig der Funktionsbegriff vorbereitet, wie er später in der Analysis gebraucht wird.

Unabhängig davon, ob man nun die Exponentialgleichungen schon im 10. oder erst im 11. Schuljahr behandelt, erweist sich auf jeden Fall die Welt der Gleichungen als etwas viel Umfangreicheres, als man bis dahin ahnen konnte. Dass sich der Begriff der Gleichung noch weiterfassen lässt, kann sich dann im 12. Schuljahr zeigen.

Eine Anregung zur Einführung von Gleichungssystemen

UWE HANSEN

Auch in der Gleichungslehre kann dem Schüler gezeigt werden, wie seine eigenen Ideen und sein unmittelbares Verständnis zu einer umfangreichen Theorie geführt werden können. So wird ein Schüler z.B. ein einfaches System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ohne jede Anleitung sofort lösen können:

1. Beispiel: Gesucht sind zwei Zahlen mit der Summe 20 und dem Unterschied 6. Der Schüler wird überlegen: Wären die Zahlen gleich, so hätte man 10 und 10. Vergrößert sich eine um 1, so verkleinert sich die andere um 1, so dass also der Unterschied doppelt so schnell wächst wie die Vergrößerung. Da der Unterschied 6 beträgt, müssen die Zahlen $10 + 3 = 13$ und $10 - 3 = 7$ sein.

Für den Schüler ist es eine Befriedigung, diese Aufgabe besser dadurch zu verstehen, dass man sich von den konkreten Zahlen löst: Die Summe der beiden Zahlen sei a , ihr Unterschied b . Der oben durchgeführte Gedankengang kommt dann zu dem Ergebnis, dass

die eine Zahl $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, und die andre Zahl $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ ist.

Die Angabe der Lösung mit Buchstaben lässt den Gedankengang erkennen: Addiere zur halben Summe die halbe Differenz; usw. Schreibt man anschließend die Gleichungen in der Form auf

$$x + y = a$$

$$x - y = b$$

so ergibt Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen $2x = a + b$, $2y = a - b$ und damit die bereits gefundene Lösung. Auch die Gleichung $2x = a + b$ folgt unmittelbar aus einer begrifflichen Überlegung. Addiert man zur Summe zweier Zahlen ihren Unterschied, entsteht die verdoppelte größere Zahl, vorausgesetzt, dass x die größere Zahl ist. Subtrahiert man dagegen von der Summe der beiden Zahlen ihren Unterschied,

so verkleinert man den größeren Summanden so, dass er zum kleineren Summanden wird, und man erhält die verdoppelte kleinere Zahl.

Dieses Beispiel lässt sich in der folgenden Weise verallgemeinern: Die zweite Gleichung wird verändert, die erste Gleichung bleibt bestehen; die innere Beweglichkeit des Schülers wird dadurch gefördert.

2. Beispiel: Die Summe zweier Zahlen ist 30. Wie heißen sie, wenn

- a) die Zahlen gleich sind?
- b) die eine um 8 größer als die andere ist?
- c) die eine das Doppelte der anderen ist?
- d) die eine das Vierfache der anderen ist?
- e) die eine um 2 größer als das Dreifache der anderen ist?
- f) das Doppelte der größeren um die kleinere vermehrt 46 ergibt?

Zu b) Zieht man von 30 die 8 wieder ab, so erhält man das Doppelte der kleineren Zahl, diese ist also 11. Oder (vergleiche Beispiel 1) man verringert bzw. vergrößert 15 um 4.

Zu c) Die Summe muss das Dreifache der kleineren sein. Verallgemeinerung: Die größere Zahl ist das n -fache der kleineren Zahl. Dies Beispiel ist eine Vorbereitung des Einsetzungsverfahrens.

Zu d) 30 muss dann das Fünffache der kleineren Zahl sein. Ergebnis: 6 und 24.

Zu e) Zieht man von 30 die 2 ab, so erhält man das Vierfache der kleineren Zahl; diese ist 7.

Zu f) der Unterschied von 46 und 30 muss die größere Zahl sein, da die Summe 46 die größere Zahl zweimal, die Summe 30 die größere Zahl aber nur einmal enthält.

Es gibt viele Möglichkeiten, den Übergang von intuitiver Einsicht zum formalen Rechnen mit Gleichungen an einfachen Beispielen zu üben. Die Zeilen sollen der Anregung dienen. Diese Beispiele sollen vor allem zeigen, dass erlebnisvolles Einsehen und Herausarbeiten eines Formalismus sich gegenseitig befruchtende Tätigkeiten sind. So ist es sehr wichtig, im Anschluss an die unmittelbar gefundenen Lösungen, diese auch mit Gleichungen zu bestimmen. Bereits das Aufschreiben von Gleichungen führt zu einer Klärung, da die erlebten Gedankengänge deutlicher werden. Es seien noch einige Beispiele genannt:

3. Beispiel: Vergrößert man eine Zahl um das Dreifache einer zweiten Zahl, erhält man 18. Das Doppelte der zweiten vermehrt um 3 ergibt die erste.

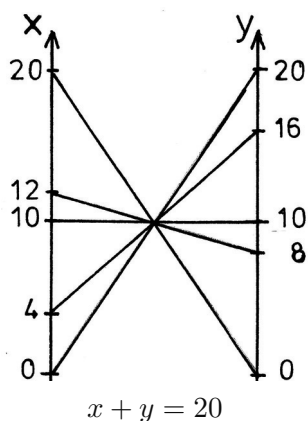
Verringert man die 18 um 3, so muss man das 5-fache der 2. Zahl

erhalten; diese ist also 3 und die erste Zahl 9. Auch diese Aufgabe bereitet das Einsetzungsverfahren vor. Eine ähnliche Aufgabe:

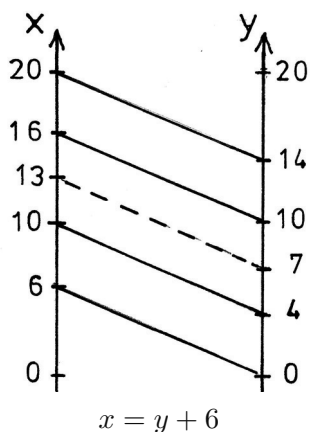
4. Beispiel: Vergrößert man das Doppelte der größeren von zwei Zahlen um die kleinere, erhält man 24. Die größere übertrifft die kleinere um 9.

Die Summe von 24 und 9, also 33 ist das Dreifache der größeren, da durch die Addition von 9 die kleinere zur größeren Zahl wird. Die Lösung ist also 11 und 2.

Das Bedürfnis, erlebte Zusammenhänge in aller Deutlichkeit vor sich zu haben, wird auch durch graphische Darstellungen befriedigt. Der Schüler empfindet es als naheliegend, zwei Zahlenachsen nebeneinander zu legen.



Die erste Gleichung von Beispiel 1 $x + y = 20$ kann dargestellt werden durch ein Strahlenbündel: x - und y -Werte mit der Summe 20 werden verbunden.



Die Gleichung $x = y + 6$ erscheint als Bündel paralleler Geraden. Die gestrichelte Gerade stellt die Lösung von Beispiel 1 dar. Sie gehört beiden „Bündeln“ an.

Diese Darstellung einer einzelnen Gleichung zeigt den Zusammenhang der Variablen recht gut. Er wird deutlicher als bei der üblichen Geradendarstellung. Im Allgemeinen wird jede lineare Gleichung mit 2 Un-

bekannten durch ein Strahlenbündel dargestellt, dessen Träger auch im Unendlichen liegen kann. Das Lösen eines Gleichungssystems mit 2 Gleichungen bedeutet dann die gemeinsame Gerade bestimmen. Noch ein abschließendes

5. Beispiel: Vergrößert man eine Zahl um das Doppelte einer zweiten, erhält man 60. Wie heißen die Zahlen, wenn

- a) die Zahlen gleich sind?
- b) die eine Zahl doppelt so groß wie die andere ist?
- c) die eine Zahl um 12 größer als die andere ist?
- d) die eine Zahl um 20 größer als die doppelte andere ist?

Zu b) entweder gleicht sich das Verhältnis 1:2 an zu 2:2, dann wird 60 zweimal halbiert – Lösung 30; 15, oder es verstärkt sich zu 1:4 – Lösung 12;24.

Zu c) geht man von der Gleichheit 20; 20 aus, so wird ein Drittel von 12, also 4 entweder von der 20 ab- oder dazugezogen. Lösung: $20 - 4 = 16$ und $20 + 8 = 28$ oder $20 + 4 = 24$ und $20 - 8 = 12$.

Zu d) hier ist die Lösung 40 und 10 bzw. 28 und 4. In diesem Fall auf Gleichungen zu verzichten erscheint nicht einfach.

Kombinatorik-Epoche 9. Klasse

KARL-FRIEDRICH GEORG

Der Menschenkunde Rudolf Steiners folgend ist grundsätzlich festzuhalten, dass der sich entwickelnde junge Mensch in allen Phasen seiner Entwicklung die jeweils vorhergehenden Stufen der Geschichte der gesamten westlichen Menschheit durchläuft. Dem muss der Unterricht nach Inhalt und Methodik Rechnung tragen.

Die 9. Klasse steht unter dem Zeichen des Aufbruchs zu allem Neuen, wo die äußere Welt als objektive Tatsache kennengelernt werden soll. Vergleichbar mit der Geschichte ist der Schüler nun in der Phase der Entdeckungen und Erfindungen, in denen sich seine neu erwachten Gedanken- und Kombinationskräfte ausleben. Daher kann in der Mathematik am Anfang der 9. Klasse eine Epoche über Kombinatorik stehen, die weiterführend mit den Grundgedanken der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung verbunden werden kann. Im Umgang mit den verschiedenen denkbaren Möglichkeiten von Anordnungen kann der Schüler verschiedene Erfahrungen machen: Er erlebt, dass sein folgerichtiges Denken ihn in Bereiche führt, die über die Begrenzungen der erlebten Welt hinausgehen, er kommt in eine Scheinwelt. Er kann sich alles überlegen, kann mit seinen Gedanken sich spielerisch in dieser Scheinwelt bewegen und bleibt dabei doch in den Bahnen des grundsätzlich Erkannten. Er kann sich alles überlegen, doch die Realität muss auch wieder gefunden werden.

Die Kombinatorik gibt die Möglichkeit für die Schüler, ohne größere algebraische Voraussetzungen aus der Mittelstufe, am Beginn der Oberstufe voll einzusteigen.

Die folgenden Ausführungen geben im Wesentlichen den Text des Epochenheftes meiner letzten Kombinatorikepoche wieder, ergänzt durch Aufgaben, an denen der Umgang mit den neuen Inhalten gemeinsam oder selbständig geübt wurde.

I. Permutationen

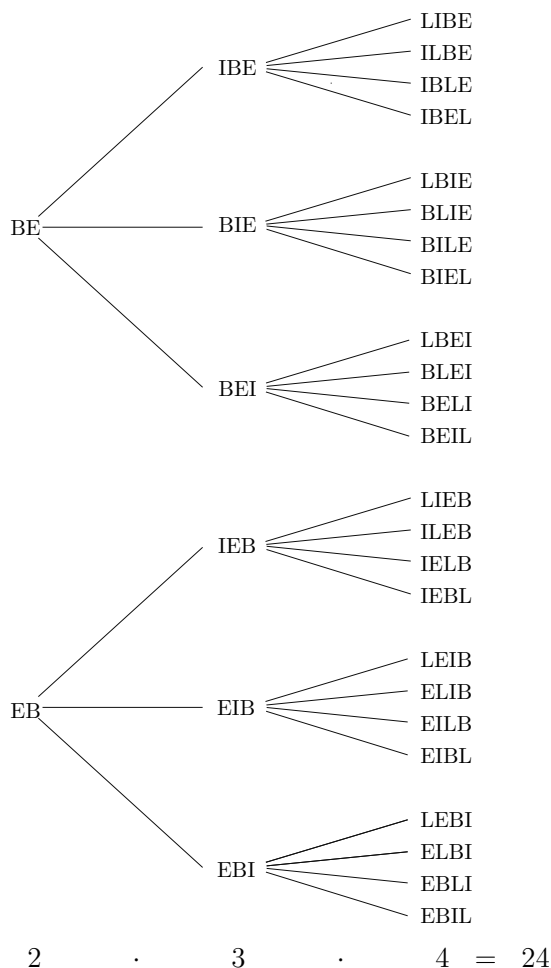
Die Epoche beginnt mit der Fragestellung: Ihr seid 38 Schülerinnen und Schüler in eurer Klasse. Euer Klassenzimmer habe genau 38 Plätze. Was

meint ihr, wie viele verschiedene Sitzordnungen sind möglich?

Je nach Temperament der Klasse gibt es die unterschiedlichsten Antworten. Z.B.: $2 \cdot 38$; 38^2 ; 38^3 ; 38^4 ; über 1 Million; 38^{38} (was Gelächter hervorruft) u.s.w.

Um eine geordnete Übersicht zu bekommen, vereinfachen wir die Fragestellung und untersuchen die Anzahl der Sitzordnungen mit jeweils gleicher Anzahl an Plätzen für 2, 3 und 4 Personen. Für 2 und 3 Personen haben die Schüler das Ergebnis schnell, für 4 Personen gibt es meist verschiedene Antworten. Also, man muss eine Systematik finden!

Wir denken uns 4 Personen: Berta, Emil, Inge und Ludwig, beginnen mit 2 von ihnen, untersuchen wo jedesmal ein dritter sitzen kann: Es ergeben sich 6 Fälle. In jedem dieser Fälle kann eine 4. Person 4 verschiedene Plätze einnehmen. Das machen wir uns mit einem Baumdiagramm deutlich:



Aufgabe: Gegeben sind die vier Elemente: B, E, I, L. Es sollen die 24 möglichen „*Permutationen*“ aufgeschrieben werden, ohne dass man vorher die Permutationen für 2 und 3 Elemente aufscheibt.

Lösung:

<u>BEIL</u>	EBIL	IBEL	LBEI
BELI	EBLI	IBLE	LBIE
<u>BIEL</u>	EIBL	IEBL	LEBI
BILE	EILB	IELB	<u>LEIB</u>
<u>BLEI</u>	ELBI	ILBE	<u>LIBE</u>
BLIE	ELIB	ILEB	<u>LIEB</u>

Bemerkung: Beim Baumdiagramm sind die Permutationen von 4 Elementen durch „Einschiebung“ angeordnet; bei dieser Aufgabe sind sie „lexikographisch“ geordnet.

Eine weitere Möglichkeit zur Gesamtzahl 24 aller Anordnungen zu kommen, ist die folgende: Wir stellen uns vier Plätze vor. Sie sind alle leer. Es kommt die Person A, sie hat vier Möglichkeiten, sich zu setzen. Nun tritt Person B ein, sie hat in jedem dieser vier Fälle nur noch drei Möglichkeiten. Wenn A und B so oft wie möglich verschieden sitzen, entstehen also $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten. Es bleiben aber immer zwei Plätze leer. Nun kommt die Person C. Sie hat nur 2 Plätze zur Auswahl, dies aber 12 mal. So können nun die Personen A, B und C auf 24-fache Art Plätze einnehmen, und wenn D kommt, findet D jeweils nur noch einen Platz. Durch D ergibt sich keine Vergrößerung der Anzahl der Möglichkeiten mehr.

Somit finden wir die Anzahl der Sitzordnungen in unserem Klassenzimmer: Für den 1. Schüler stehen 38 Plätze zur Verfügung. Bei all diesen Möglichkeiten sind für den 2. Schüler immer 37 Plätze frei, beide zusammen haben also $38 \cdot 37$ Möglichkeiten, für den 3. Schüler sind stets 36 Plätze frei, die ersten drei haben also $38 \cdot 37 \cdot 36$ Möglichkeiten, die ersten vier $38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35$ Möglichkeiten, usw. Der letzte, d. h. der 38. Schüler hat stets nur eine Möglichkeit. Die Anzahl der Sitzordnungen ist demnach: $38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Ausgerechnet ergibt sich für diese Anzahl die ungewöhnlich große Zahl:

523 022 617 466 601 111 760 007 224 100 074 291 200 000 000

(Das Anschreiben dieser Zahl an die Tafel verfehlt nie seine Wirkung! Und nun versuchen wir sie zu lesen.)

Definition: Irgendwelche n verschiedene Dinge lassen sich auf verschiedene Weise in einer Reihenfolge anordnen. Jede dieser Anordnungen bezeichnet man als eine „*Permutation von n verschiedenen Elementen*“.

Satz: Die Anzahl $P(n)$ der möglichen Permutationen von n verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n :

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ kürzt man ab durch das Symbol „ $n!$ “ (gelesen: „ n Fakultät“)

Einige Fakultätszahlen

$1! = 1$	$= 1$
$2! = 1 \cdot 2$	$= 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$	$= 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$	$= 24$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$	$= 120$
$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	$= 720$
$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$	$= 5040$
$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$	$= 40320$
$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$	$= 362880$
$10! =$	$= 3628800$
$11! =$	$= 39916800$
$12! =$	$= 479001600$
$13! =$	$= 6227020800$
$14! =$	$= 87178291200$
$15! =$	$= 1307674368000$
$16! =$	$= 20922789888000$
$17! =$	$= 355687428096000$
$18! =$	$= 6402373705728000$
$19! =$	$= 121645100408832000$
$20! =$	$= 2432902008176640000$

Aufgabe: Das wievielte Wort ist das Wort OZEAN in der Reihe der lexikographisch geordneten Permutationen seiner Buchstaben A, E, N, O, Z ?

Lösung:	Mit	A	beginnen genau 4!	= 24 Wörter
	mit	E	beginnen genau 4!	= 24 Wörter
	mit	N	beginnen genau 4!	= 24 Wörter
	mit	OA	beginnen genau 3!	= 6 Wörter
	mit	OE	beginnen genau 3!	= 6 Wörter
	mit	ON	beginnen genau 3!	= 6 Wörter
	mit	OZA	beginnen genau 2!	= 2 Wörter
		OZEAN		= 1 Wort
				<u>Summe: 93 Wörter</u>

Ergebnis: OZEAN ist das 93. Wort in der Folge der lexikographisch geordneten Permutationen seiner Buchstaben.

Aufgabe: Wie heißt die 639. Permutation der sechs Elemente a,h,m,o,s,t?

Lösung		Summe	Rest
Mit a	beginnen 5! = 120 Wörter	120	519
mit h	beginnen 5! = 120 Wörter	240	399
mit m	beginnen 5! = 120 Wörter	360	279
mit o	beginnen 5! = 120 Wörter	480	159
mit s	beginnen 5! = 120 Wörter	600	39
mit ta	beginnen 4! = 24 Wörter	624	15
mit tha	beginnen 3! = 6 Wörter	630	9
mit thm	beginnen 3! = 6 Wörter	636	3
mit thoa	beginnen 2! = 2 Wörter	638	1
thomas	= 1 Wort	639	0

Ergebnis: thomas ist das 639. Wort in der lexikographischen Anordnung seiner Buchstaben.

Übungsaufgaben

- Wie viele Permutationen der Elemente 1,2,3,4,5,6,7,8 beginnen
 - a) mit 5,
 - b) mit 123,
 - c) mit 8642?

Ergebnis:

- Da außer dem Element 5 noch weitere sieben Elemente vorhanden sind, müssen $7! = 5040$ Permutationen mit 5 beginnen.

- b) Da 1,2,3, am Anfang festgehalten werden, bleiben noch fünf Elemente frei beweglich. Mit 123 beginnen daher $5! = 120$ Permutationen.
- c) Entsprechend müssen $4! = 24$ Permutationen mit 8642 beginnen.
2. In wie vielen Permutationen der acht Elemente 1,2,3,4,5,6,7,8 stehen die Elemente 2,4,5,6 nebeneinander, und zwar
- a) in der angegebenen Reihenfolge?
- b) in beliebiger Reihenfolge?
- Ergebnis:
- a) Es permutieren die fünf Elemente 1,2,4,5,6,3,7,8: $P(5) = 5! = 120$
- b) In jeder soeben gefundenen 120 Anordnungen können die Elemente des Blocks unter sich auf $4! = 24$ Arten permutiert werden
Ergebnis: 2880 Permutationen.
3. Wie viele Permutationen sämtlicher 26 Buchstaben des Alphabets beginnen
- a) mit f, b) mit sch, c) mit aber?
- Ergebnis: a) $P(25)$, b) $P(23)$, c) $P(22)$.
4. Wie viele 8-stellige Zahlen gibt es, in denen die Ziffernblöcke 16, 26, 36 und 46 vorkommen?
- Ergebnis: $P(4) = 4! = 24$
5. An welchen Stellen stehen die Worte „armut“ und „traum“, wenn man sie als Permutatione ihrer Buchstaben ansieht und die Permutationen in lexikographischer Reihenfolge aufschreibt.
- Ergebnis: armut steht an 8. Stelle, traum steht an 86. Stelle
6. Die wievielte Permutation der Buchstaben „aeemnx“ ist das Wort „Examen“?

Lösung:

Mit a	beginnen	$P(5) : 2 = 60$	Permutationen,
mit ea	beginnen weitere	$P(4) = 24$	Perm., zus. 84 P.
mit ee	beginnen weitere	$P(4) = 24$	Perm., zus. 108 P.
mit em	beginnen weitere	$P(4) = 24$	Perm., zus. 132 P.
mit en	beginnen weitere	$P(4) = 24$	Perm., zus. 156 P.
mit exae	beginnen weitere	$P(2) = 2$	Perm., zus. 158 P.
examen	ist eine weitere		Perm., zus. 159 P.

Examen ist da 159. Wort in der lexikographischen Anordnung seiner Buchstaben.

II. Permutationen mit zum Teil gleichen Elementen

Es kann, wie in der letzten Aufgabe, vorkommen, dass nicht alle Elemente voneinander verschieden sind, sondern dass ein oder mehrere Elemente mehrfach vorhanden sind.

Aufgabe: Schreibe die Permutationen der Elemente 1, 1, 1, 2, 3 in lexikographischer Anordnung!

Lösung:

11123	21113	31112
11132	21131	31121
11213	21311	31211
11231	23111	32111
11312		
11321	Die Anzahl der Permutationen von 5	
12113	Elementen, unter denen eine Gruppe von 3	
12131	gleiches ist, bezeichnet man mit $P_3(5)$.	
12311	Offenbar ist $P_3(5)=20$.	
13112		
13121		
13211		

Sind unter 5 Elementen abcde drei gleiche, z. B.: $c=d=e$, so fallen von den $5!$ Permutationen der 5 Elemente alle diejenigen in eine zusammen, die sich nur durch eine Permutation von $c=d=e$ unterscheiden. Also z. B.:

aus

a	b	c	d	e
a	b	c	e	d
a	b	d	c	e
a	b	d	e	c
a	b	e	c	d
a	b	e	d	c

wird abccc

oder aus

a	c	b	d	e
a	c	b	e	d
a	d	b	c	e
a	d	b	e	c
a	e	b	c	d
a	e	b	d	c

wird acbcc

Es fallen je $6=3!$ Permutationen in einer Permutation zusammen. Und es bleiben dann nur $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ (statt 120) Permutationen übrig.

Allgemein: Sind unter n Elementen α Elemente einander gleich, so fallen ihre $\alpha!$ Permutationen in *eine* zusammen. Um die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen (bei α gleichen) $P_\alpha(n)$ zu erhalten, muss die Gesamtzahl $P(n) = n!$ durch $\alpha!$ geteilt werden:

Satz: Sind unter n Elementen α gleiche einer Sorte, β gleiche einer anderen Art, γ gleiche einer dritten, so ist die Anzahl der möglichen Permutationen:

$$P_{\alpha,\beta,\gamma}(n) = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

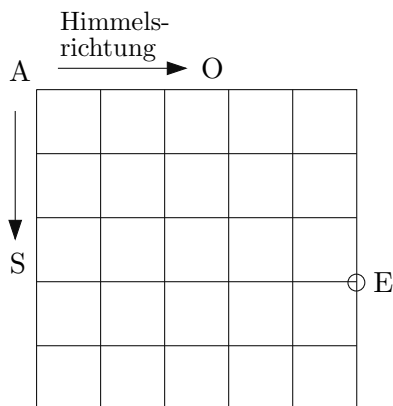
(Von den Schülern wurden 2 Beispiele aus den Übungen gewählt und ins Heft eingetragen.)

1. Beispiel: Vor der Kasse eines Hallenbades stehen 12 Personen in der Schlange, und zwar 6 Kinder, 2 Frauen, 4 Männer. Wie viele verschiedene Warteschlangen sind möglich, wenn nur auf die Merkmale „Kind“, „Frau“ oder „Mann“ geachtet wird?

$$\text{Lösung: } P_{6,2,4}(12) = \frac{12!}{6! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13860$$

13860 verschiedene Warteschlangen sind denkbar.

2. Beispiel: Im rechteckigen Straßennetz einer größeren Stadt will man auf kürzestem Wege vom Punkt A zum Punkt E gelangen. Auf wieviel verschiedenen Routen ist das möglich?



Jeder kürzeste Weg besteht aus 8 Straßenabschnitten, 5 nach Osten und 3 nach Süden. Welchen Weg man auch von A nach E zurücklegen mag, man hat immer 5 Straßenabschnitte nach O und 3 nach S zu durchlaufen, die in jeder denkbaren, ganz beliebigen Ordnung aufeinander folgen können. Die Gesamtzahl der voneinander verschiedenen Wege ist daher die Anzahl der Permutationen von 8 Elementen, unter denen sich eine Gruppe von 5 und eine Gruppe von 3 untereinander gleichen Elementen befinden:

$$P_{5,3}(8) = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2} = 56$$

Auf 56 verschiedenen Routen kann man auf dem kürzesten Weg von A nach E gelangen.

Ein Hinweis: Aus dieser Aufgabenstellung lässt sich das Pascal'sche Zahlendreieck gewinnen. (Siehe: Bengt Ulin „Der Lösung auf der Spur“ 1987, Verlag Freies Geistesleben)

Übungsaufgaben

1. Wie viele 5-stellige Zahlen kann man mit den Ziffern 1,1,1,3 und 4 schreiben?

Ergebnis: $P_{3,1,1}(5) = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 20$

2. Wie viele gerade 6-stellige Zahlen kann man mit den Ziffern 1,1,1,2,2,4 bilden?

Ergebnis: $P_{3,2}(5) + P_{3,1,1}(5) = 10 + 20 = 30$

3. Wie viele 7-stellige Zahlen können aus den Ziffern 1,2,3,3,0,0,0 gebildet werden?

Ergebnis: $P_{2,3}(7) - P_{2,2}(6) = 420 - 180 = 240$

4. Wie viele Permutationen von a^5b^2c beginnen mit a, mit b und mit c? Lösung: Das Element a kann so oft an erster Stelle stehen, wie es verschiedene Permutationen der Elemente a^4b^2c gibt, also

$$P_{4,2}(7) = \frac{7!}{4! \cdot 2!} = 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105 \text{ mal.}$$

Entsprechend ist $P_5(7) = \frac{7!}{5!} = 42$

Und $P_{5,2}(7) = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$

Ergebnis: 105 Permutationen beginnen mit a, 42 mit b und 21 mit c.

5. Wie viele Permutationen der Elemente a,b,b,b,c,c,c,d,d,d beginnen mit bb, mit cac und mit abcd?

Lösung: Stehen die Elemente bb am Anfang, so bleiben die Elemente abccccddd zu permutieren. Entsprechend die beiden anderen Fälle.

Mit bb: $P_{4,3}(9) = \frac{9!}{4! \cdot 3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$

Mit cac: $P_{3,2,3}(8) = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$

Mit abcd: $P_{2,3,2}(7) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 210$

D.h. 2520 Permutationen beginnen mit bb, 560 Permutationen mit cac und 210 Permutationen mit abcd.

6. Wie heißt die 116. Permutation der Buchstaben AAABBBRR?

Lösung				Summe	Rest
Mit A	beginnen	$P_{2,2,2}(6) = 90$	Wörter	90	26
Mit B	beginnen	$P_{3,2}(6) = 60$	Wörter	zu viel!	
Mit BA	beginnen	$P_{2,2}(5) = 30$	Wörter	zu viel!	
Mit BAA	beginnen	$P_2(4) = 12$	Wörter	102	14
Mit BAB	beginnen	$P_{2,2}(4) = 6$	Wörter	108	8
Mit BAR	beginnen	$P_2(4) = 12$	Wörter	zu viel!	
Mit BARA	beginnen	$P(3) = 6$	Wörter	114	2
BARBAAR	ist	1	Wort	115	1
BARBARA	ist	1	Wort	116	0

III. Variationen (ohne Wiederholungen)

Aufgabe: Wie viele verschiedene zweifarbige Flaggen lassen sich aus vier Farben herstellen?

Die Farben seien a, b, c, d. Damit:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Ergebnis: $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene zweifarbige Flaggen.

Wir haben bei dieser Aufgabe aus 4 Elementen (Farben) jeweils 2 verschiedene zu einem Block (Flagge) zusammengestellt. Wir nennen das eine *Variation 2. Klasse der 4 Elemente*. Kurz: $V_2(4)$.

Aufgabe: Bilde verschiedene 3-farbige Flaggen aus den 4 vorgegebenen Farben a,b,c,d!

abc	bac	cab	dab	Diese Variation 3. Klasse der 4 Elemente ergibt $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Anordnungsmöglichkeiten.
abd	bad	cad	dac	
acb	bca	cba	dba	
acd	bcd	cbd	dbc	
adb	bda	cda	dca	
adc	bdc	cdb	dcb	

Allgemein: Hat man n verschiedene Elemente gegeben und nimmt man aus diesen k verschiedene zu einem Block, so nennt man diese Zusammenstellung eine *Variation zur k -ten Klasse der n Elemente*. Symbol: $V_k(n)$.

Aufgabe: Mit 9 Tafeln, welche die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tragen, kann man bilden:

9	einst. Zahlen	(Var. 1. Kl. der 9 El. = $V_1(9)$)
$9 \cdot 8$	zweist. Zahlen	(Var. 2. Kl. der 9 El. = $V_2(9)$)
$9 \cdot 8 \cdot 7$	dreist. Zahlen	(Var. 3. Kl. der 9 El. = $V_3(9)$)
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$	vierst. Zahlen	(Var. 4. Kl. der 9 El. = $V_4(9)$)
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$	fünfst. Zahlen	(Var. 5. Kl. der 9 El. = $V_5(9)$)
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$	sechsst. Zahlen	(Var. 6. Kl. der 9 El. = $V_6(9)$)
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$	siebenst. Zahlen	(Var. 7. Kl. der 9 El. = $V_7(9)$)
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$	achtst. Zahlen	(Var. 8. Kl. der 9 El. = $V_8(9)$)
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	neunst. Zahlen	(Var. 9. Kl. der 9 El. = $V_9(9)$)

Wir erkennen aus dieser Aufgabe das Bildungsgesetz der Variationen:

$$\text{Aus z. B.: } V_4(9) = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{4 \text{ Faktoren}} = \frac{9!}{5!} = \frac{9!}{(9-4)!}$$

$$V_6(9) = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{6 \text{ Faktoren}} = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$$

folgt allgemein:

$$V_k(n) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}_{k \text{ Faktoren}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Satz: Die Anzahl der Variationen zur Klasse k von n verschiedenen Elementen ist:

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Merke: Das Produkt hat so viele Faktoren wie die Klassenzahl angibt. Wird $k = n$, so erhält man die Anzahl der Permutationen der n Elemente.

Übungsaufgaben

1. Auf wie viele verschiedene Arten kann man mit einer Gruppe von 18 Schülern einen Sechsstern in der Eurythmie besetzen, wenn alle Schüler nach „vorne“ zum Lehrer blicken?

Es sind $n = 18$ und $k = 6$, so dass

$$\begin{aligned} V_6(18) &= \frac{18!}{(18-6)!} \\ &= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ V_6(18) &= 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 13.366.080 \end{aligned}$$

2. 36 Schüler und Schülerinnen der 9. Klasse schreiben sich gegenseitig, d. h. jede/r an jede/m eine Neujahrskarte. Wie viele Karten werden geschrieben?

Lösung: $V_2(36) = 36 \cdot 35 = 1260$

3. Ein firmeneigener Parkplatz hat für 10 PKWs Platz. Auf wie viele Arten können die Plätze belegt werden, wenn 6 Kunden ihre Autos parken wollen?

Lösung: $V_6(10) = 151.200$

4. Auf wie viele Arten kann man 6 verschiedene Blumenstöcke zu je dreien angeordnet in ein Fenster stellen, so dass jedes Mal eine anderer Anblick entsteht?

Ergebnis: $V_3(6) = 120$

5. An einem Platz münden 5 Straßen ein. Wie viele Fahrbahnen führen über diesen Platz, wenn alle Straßen zweispurig sind?

Ergebnis: $V_2(5) = 20$

6. Ein neuer Staat möchte als Nationalfahne eine Trikolore mit einem farbigem Kreis in der Mitte gestalten, also insgesamt 4 Farben verwenden. Es stehen 10 Farben zur Auswahl. Wie viele Fahnen sind möglich, wenn jede Farbe nur einmal vorkommen soll?

Lösung: $V_4(10) = 5040$.

7. Wie viele 3-stellige Zahlen gibt es mit ungleichen Ziffern.

a) ohne Null, b) mit Null

Lösung: a) $V_3(9) = 504$ b) $V_3(10) - V_2(9) = 648$.

8. Zeige, dass man jeweils mit allen Buchstaben des Wortes BIRNE ebenso viele „Wörter“ bilden kann wie mit jeweils 3 verschiedenen Buchstaben des Wortes ORANGE!

$$\text{BIRNE: } P(5) = 5! = 120$$

$$\text{ORANGE: } V_3(6) = 120$$

9. Das wievielte Wort in der lexikographisch angeordneten Folge der Permutation seiner Buchstaben ist OSTERN?

E, N, O, R, S, T

Mit E und N beginnen je $5!$ Wörter = 240 Wörter

Mit OE, ON und OR beginnen je $4!$ Wörter = 72 Wörter

Mit OSE, OSN und OSR beginnen je $3!$ Wörter = 18 Wörter

OSTENR = 1 Wort

OSTERN = 1 Wort

Summe = 332 Wörter

OSTERN ist das 332. Wort in der lexikographisch angeordneten Folge der Permutation seiner Buchstaben.

IV. Die Produktregel

Aufgabe: Karin besitzt 2 Mäntel, 4 Hosen, 7 T-Shirts und 5 Paar Schuhe. – Auf wie viele verschiedene Arten kann sie sich kleiden?

Antwort: Es gibt $A = 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ Anordnungsmöglichkeiten. Karin kann sich also 280-mal verschieden kleiden.

Aufgabe: Auf wie viele Arten können sich 6 Damen und 5 Herren zu einem Gruppenfoto aufstellen, wenn die Damen in der 1. Reihe sitzen und die Herren in der 2. Reihe stehen?

Lösung: Für jede der $P(5) = 5!$ möglichen Aufstellung der Herren gibt es $P(6) = 6!$ Anordnungen für die Damen. Insgesamt gibt es

$$A = 5! \cdot 6! = 120 \cdot 720 = 86400$$

Anordnungsmöglichkeiten.

Produktsatz: Bilden wir die Gesamtzahl der Möglichkeiten aus verschiedenen Gruppen, wobei die einzelnen Gruppen jeweils $A_1, A_2, A_3, \dots$ Möglichkeiten haben, so ist diese Gesamtzahl das Produkt der Möglichkeiten der einzelnen Gruppen:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots$$

Beispiel: Ein Autohändler möchte alle möglichen Ausstattungstypen eines Modells auf Lager halten. Es gibt 8 verschiedene Lackierungen, 6 verschiedene Polsterungen, 3 verschiedene Motoren, ferner kann man zusätzlich wählen: Schiebedach, Radio, Automatikgetriebe, ABS (= Anti-Blockier-System). – Wie viele verschiedene Wagen müssten dann mindestens in seinem Lager stehen?

Lösung: $A = 8 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2304$ verschiedene Wagen.

Übungsaufgaben:

1. Ein Auto hat das Kennzeichen MR-AD 941. Wie viele Marburger Autos können die Buchstaben A und D und die Ziffern der Zahl 941 haben?

Lösung: $P(2) \cdot P(3) = 12$.

2. Aus der 9. Klasse besuchen 13 Mädchen und 8 Jungen einen-Tanzkurs. Wie viele Tanzpaare lassen sich bilden?

Lösung: $13 \cdot 8 = 104$ Paare.

3. Eine kleine Fluggesellschaft hat 5 Chefpiloten, 7 Copiloten, 6 Flugingenieure und 18 Stewardessen. Auf wie viele Arten kann man eine Crew (1 Chefpilot, 1 Copilot, 1 Flugingenieur und 2 Stewardessen) bilden?

Lösung: $5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}V_2(18) = 34020$ Crews.

V. Kombinationen

Aufgabe: Zu einer Arbeit stehen zwar 6 Personen zur Verfügung, es werden aber nur 3 von ihnen benötigt. Wie viele verschiedene Arbeitsteams zu 3 Personen lassen sich aus den insgesamt 6 Personen bilden?

Lösung: Die 6 Personen seien A, B, C, D, E und F. Eine lexikographische Anordnung hilft uns, alle Möglichkeiten aufzuschreiben (Beachte: Für ein Team kommt es auf die Reihenfolge in der Anordnung nicht an!)

ABC BCD CDE DEF
 ABD BCE CDF
 ABE BCF CEF
 ABF BDE
 ACD BDF
 ACE BEF
 ACF
 ADE
 ADF
 AEF

Es ergeben sich 20 Möglichkeiten.

Aufgabe: Aus einer Schachtel mit sieben von 1 bis 7 nummerierten Kugeln nehme man (ohne hinzuschauen) fünf Kugeln heraus. Wieviel verschiedene Ergebnisse können erzielt werden?

Lösung: Auch hier hilft eine lexikographische Notierung, die Anzahl der möglichen Ergebnisse zu finden.

12345 23456 34567
 12346 23457
 12347 23467
 12356 23567
 12357 24567
 12367
 12456
 12457
 12467
 12567
 13456
 13457
 13467
 13567
 14567

Es ergeben sich 21 Möglichkeiten. Wir können das Gemeinsame dieser beiden Aufgaben verallgemeinern:

Greift man aus der Gesamtmenge der n Elemente eine Teilmenge von k Elementen heraus und setzt man sie dann in einer Anordnung nebeneinander, ohne dass es auf die Reihenfolge ankommt, so nennt man jede solche Zusammenstellung eine *Kombination zur k -ten Klasse der n Elemente*.

Für die 1. Aufgabe ergibt sich somit: Die Anzahl der Kombinationen von 6 Elementen zur 3. Klasse $K_3(6) = 20$.

Für die 2. Aufgabe fanden wir: Die Kombinationen von 7 Elementen zur 5. Klasse haben die Anzahl $K_5(7) = 21$.

Die Anzahl der Kombinationen ist in den meisten Fällen viel geringer als die der Variationen. Schreibt man z. B. die 6 Anordnungen 123, 132, 213, 231, 312 und 321, so enthalten alle die gleichen Elemente 1, 2 und 3. Da es aber bei den Kombinationen nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, sind alle 6 Anordnungen gleichbedeutend mit einer von ihnen, z. B. 123. Es fallen also alle Variationen, welche die gleichen Elemente in verschiedener Anordnung haben, in *eine* Kombination zusammen. Da nun k verschiedene Elemente $k!$ Permutationen erlauben, erhält man daher die Anzahl der Kombinationen, wenn man die Anzahl der Variationen durch $k!$ dividiert:

$$K_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Abkürzend für den Quotienten schreibt man das EULER'sche Symbol $\binom{n}{k}$, (sprich „ n über k “).

Satz: Die Anzahl der *Kombinationen von n Elementen zur k -ten Klasse* ist:

$$K_k(n) = \binom{n}{k}$$

Merke: Im Zähler und Nenner stehen gleich viele Faktoren. Im Zähler beginnen sie mit n und nehmen jeweils um 1 ab, im Nenner beginnen sie mit 1 und nehmen jeweils um 1 zu.

Beispiele zum EULER-Symbol:

$$\left. \begin{aligned} \binom{12}{3} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220 \\ \binom{12}{9} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9}} \\ &= 220 \end{aligned} \right\} \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \binom{12}{12-9}$$

$$\left. \begin{aligned} \binom{8}{2} &= \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28 \\ \binom{8}{6} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6}} = 28 \end{aligned} \right\} \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \binom{8}{8-6}$$

Wir erkennen die Gesetzmäßigkeit:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ist k größer als n ($k > n$), z. B.: $k = 7$, $n = 3$, so folgt

$$\binom{3}{7} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 0$$

und wir erkennen, dass zwangsläufig immer, wenn $k > n$ ist, das EULER-Symbol $\binom{n}{k} = 0$ sein muss.

Mit der Gesetzmäßigkeit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ können wir spezielle EULER-Symbole bestimmen, z. B.: $\binom{4}{0}$. Denn es muss gelten $\binom{4}{0} = \binom{4}{4-0} = \binom{4}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$.

Daraus folgt allgemein: $\binom{n}{0} = 1$

Man hat ferner festgelegt: $\binom{0}{0} = 1$ und $0! = 1$.

Die Blindenschrift

••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	
••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	u.s.w.
••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	••	
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	

Lange Zeit konnte man Blinden nur durch Vorlesen Literatur vermitteln. Erst der Franzose *Louis Braille* (1809 – 52), der mit 3 Jahren erblindete, entwickelte eine Schrift, die von den Blinden „gelesen“ (abgetastet) und geschrieben werden kann. Die einzelnen Buchstaben und Zeichen bestehen aus Punkten, die in dickes Papier geprägt sind. Braille fand diese Schrift nach vielen Versuchen, indem er von den 6 Augen des Würfels ausging, die, verschieden kombiniert, als Buchstaben betrachtet wurden. Mit diesem System können 63 Symbole gebildet werden. Denn mit $n = 6$ folgen $K_1(6) = 6$, $K_2(6) = 15$, $K_3(6) = 20$, $K_4(6) = 15$, $K_5(6) = 6$, $K_6(6) = 1$.

Übungsaufgaben:

1. Bilden 5 Punkte ein Fünfeck, so kann man je zwei von ihnen verbinden. Wie viele Verbindungen gibt es?

Lösung: Es handelt sich um eine Kombination 2. Klasse der 5 Elemente, also $K_2(5) = 10$

2. Wie viele Kombinationen der 3. Klasse von den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 enthalten nicht 2, 4, 6?

Lösung: $K_3(5) = 10$

3. Wie viele Kombinationen der 3. Klasse von den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 enthalten wenigstens eine gerade Ziffer?

Lösung: $K_3(9) - K_3(5) = 74$

4. In einem regelmäßigen Zehneck kann man durch Verbinden von Eckpunkten Dreiecke, Vierecke usw. erhalten. Wie viele verschiedene Lagen können a) Dreiecke, b) Vierecke, c) Siebenecke in diesem Zehneck haben?

Lösung: a) $K_3(10) = 120$, b) $K_4(10) = 210$, c) $K_7(10) = 120$.

5. a) Wie viele Verbindungslinien zwischen den Eckpunkten eines 12-Ecks sind möglich?

b) Wie viele Diagonalen gibt es?

Lösung. a) 66; b) 54.

6. Ein Bauer kauft 2 Kühe, 3 Schweine und 4 Legehennen von einem Viehhändler, der 7 Kühe, 5 Schweine und 10 Legehennen anbietet. Auf wie viele Arten kann der Bauer jeweils auswählen?

7. In einem Dorf gibt es 201 Telefonanschlüsse. Wie viele Verbindungen innerhalb des Dorfes können dadurch zustande kommen?

8. In einer Klasse mit 13 Mädchen und 16 Jungen werden jede Woche 2 Personen für den Tafeldienst und 2 Personen für den Kehrdienst ausgelost.

a) Wie viele mögliche 4-er Teams gibt es, wenn den Kehrdienst nur Jungen und den Tafeldienst nur Mädchen haben?

b) Wie viele mögliche Teams gibt es jeweils, wenn nur Jungen beide Dienste ausüben?

Lösung: a) $K_2(16) \cdot K_2(13)$; b) $K_2(16) \cdot K_2(14)$

9. Auf einem Tennisplatz erscheinen an einem Nachmittag 5 Herren und 7 Damen. Wie viele Spielpaarungen sind möglich, bei denen 2 Herren gegen 2 Damen antreten?

Lösung: $K_2(5) \cdot K_2(7) = 210$.

VI. Der allgemeine Binomische Lehrsatz

Wir kennen die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (lat.: bis = zweimal, nomen = Ausdruck).

Aufgabe: Berechne die Potenzen des Binoms $(a + b)^n$ für $n = 1, 2, 3, \dots, 6$.

Ergebnis:

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

$$(a + b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$$

Die an erster und letzter Stelle stehenden Ausdrücke sind immer Potenzen von a bzw. b . Die dazwischen stehenden Ausdrücke sind, von der davorstehenden Zahl abgesehen, Potenzprodukte. Die davorstehenden Zahlen heißen *Koeffizienten* (=Beizahlen). Wie sie miteinander zusammenhängen wird deutlich, wenn man sie alleine in der Form eines gleichschenkligen Dreiecks anordnet:

1. Zeile				1		1			
2. Zeile				1	2		1		
3. Zeile			1	3		3		1	
4. Zeile			1	4	6		4		1
5. Zeile		1	5	10		10		5	1
6. Zeile	1	6	15		20		15	6	1

Man nennt dieses Dreieck nach seinem Entdecker das PASCAL'sche Zahlendreieck (BLAISE PASCAL, 1623 – 62, französischer Philosoph, Mathematiker und Physiker). Die Zahlen im Innern des Dreiecks erhält man, indem man die beiden in der Zeile darüber stehenden Glieder addiert.

Die Zahlen lassen sich auch in Form von EULER-Symbolen schreiben und für die letzte (sechste) Zeile gilt somit:

$$6 = \binom{6}{1}; \quad 15 = \binom{6}{2}; \quad 20 = \binom{6}{3}; \quad 15 = \binom{6}{4}; \quad 6 = \binom{6}{5}$$

Und für die Einsen am Rande: $1 = \binom{6}{0}$ bzw. $1 = \binom{6}{6}$. So lautet das PASCAL'sche Dreieck, wenn an der Spitze ergänzt wird $1 = \binom{0}{0}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
 \end{array}$$

Nun können wir die Potenzen eines Binoms mit Hilfe der EULER'schen Symbole schreiben:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= \binom{0}{0} \\
 (a+b)^1 &= \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b \\
 (a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 \\
 (a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 \\
 (a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \\
 (a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 \\
 (a+b)^6 &= \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6
 \end{aligned}$$

Wir können erkennen, dass in einer Zeile bei jedem Summanden die Summe der Hochzahlen von a und b stets den gleichen Wert hat, z. B.

4. Zeile bei $(a+b)^4$ a^4 , dann a^3b , dann a^2b^2 , dann a^1b^3 , dann b^4

Alles, was wir nun erkannt haben, können wir zusammenfassen für die Potenzentwicklung der n -ten Potenz des Binoms:

$$\left\| \begin{aligned} (a+b)^n &= \\ \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots \\ \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n; \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\|$$

Dies ist der allgemeine Binomische Lehrsatz.

Aufgabe: Schreibe das Ergebnis von $(a + b)^8$ auf:

$$\begin{aligned}(a + b)^8 &= \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 + \binom{8}{5}a^3b^5 \\ &\quad + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8 \\ &= 1a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 \\ &\quad + 28a^2b^6 + 8ab^7 + 1b^8\end{aligned}$$

Aufgabe: Wie heißt das 4. Glied in der Entwicklung von $(2x - \frac{y}{2})^9$?

Lösung: $\binom{9}{3}(2x)^6(-\frac{y}{2})^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^6 x^6 (-\frac{y^3}{2^3}) = -672x^6y^3$

Aufgabe: Ein massiver Eisenwürfel hat die Kantenlänge $l = 5,00$ cm bei 0°C . Er wird bis zu $\vartheta = 40^\circ\text{C}$ erwärmt und dehnt sich dabei aus, so dass jede Kante die Länge $5\text{ cm} + h$ erhält, wobei h nach der Wärmelehre den sehr kleinen Wert $h = l \cdot \vartheta \cdot 0,000012/^\circ\text{C}$ hat. Der Dezimalbruch ist der sogenannte „Längenausdehnungsquotient“. Wir bekommen $h = 5 \cdot 40 \cdot 0,000012\text{ cm} = 0,0024\text{ cm}$. Wie groß ist das neue Volumen?

Lösung: Das Würfelvolumen berechnet sich nach der Formel $V = a^3$. Hier also $V = (5 + h)^3$. Wir müssen daher $(5 + h)^3$ entwickeln und bekommen:

$$\begin{aligned}(5 + h)^3 &= 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot h + 3 \cdot 5 \cdot h^2 + h^3 \\ &= 125 + 75h + 15h^2 + h^3 \\ &= 125 + 75 \cdot 0,0024 + 15 \cdot (0,0024)^2 + (0,0024)^3\end{aligned}$$

Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned}75 \cdot 0,0024 &= 0,18 \\ 15 \cdot (0,0024)^2 &= 15 \cdot \left(\frac{24}{10000}\right)^2 = 15 \cdot \frac{576}{100000000} = \frac{8640}{100000000} \\ &= 0,0000864.\end{aligned}$$

Dieser Wert ist so klein, dass wir ihn vernachlässigen können. $(0,0024)^3$ ist noch viel kleiner, also erst recht vernachlässigbar.

Das neue Volumen des erwärmten Würfels beträgt also bei 40°C mit guter Genauigkeit: $V = (125 + 0,18)\text{ cm}^3 = 125,18\text{ cm}^3$

Als **kürzere Alternative** könnte nach „II. Permutationen mit zum Teil gleichen Elementen“ sich gleich „III. Kombinationen“ anschließen, allerdings in geänderter Fassung, da die Gesetzmäßigkeit auf anderem Wege hergeleitet werden muss:

Aufgabe 1: Auf wie viel verschiedene Arten kann man aus 7 Schülern fünf auswählen?

Lösung: Auch hier hilft eine lexikographische Notierung, die Anzahl der möglichen Ergebnisse zu finden.

12345	23456	34567	Es gibt 21 verschiedene Möglichkeiten aus 7 Schülern fünf auszuwählen. Wir nennen dies eine <i>Kombination 5. Klasse von 7 Elementen</i> und schreiben: $K_5(7) = 21$.
12346	23457		
12347	23467		
12356	23567		
12357	24567		
12367			
12456			
12457			
12467			
12567			
13456			
13457			
13467			
13567			
14567			

Aufgabe 2: Von 5 Polizisten sollen abwechselnd je drei Streifendienst machen. Wie viele Dreier-Gruppen können sie bilden und wie oft kommt jeder Polizist an die Reihe?

Lösung: Wir schreiben zunächst die Dreierauswahlen aus 5 Elementen in lexikographischer Anordnung auf. Dann schreiben wir daneben durch die Abkürzungen „a“ und „n“ welche der Elemente wir ausgewählt bzw. nicht ausgewählt haben.

123	$\longleftrightarrow$	aaann	Es gibt offenbar so viele Dreier-Kombinationen von 5 Elementen, wie es Permutationen von 5 Elementen gibt, unter denen sich eine Sorte von 3 gleichen und eine Sorte von 2 gleichen Elementen befindet. Wir können also rechnen in Symbolen:
124	$\longleftrightarrow$	aanan	
125	$\longleftrightarrow$	aanna	
134	$\longleftrightarrow$	anaan	
135	$\longleftrightarrow$	anana	
145	$\longleftrightarrow$	annaa	
234	$\longleftrightarrow$	naaan	
235	$\longleftrightarrow$	naana	
245	$\longleftrightarrow$	nanan	
345	$\longleftrightarrow$	nnaaa	
$K_3(5)$		$P_{3,2}(5)$	

$$K_3(5) = P_{3,2}(5) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Für den allgemeinen Fall von *Kombinationen k-ter Klasse von n Elementen* gilt die folgende Formel:

$$K_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Den Quotienten $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ kürzt man ab durch das von LEONHARD EULER (1707 - 1783) eingeführte Symbol $\binom{n}{k}$, das man „n über k“ liest. Somit gilt:

$$K_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ergebnis der Aufgabe 2: Es gibt $K_3(5) = 10$ Dreier-Gruppen von Polizisten. Jeder Polizist kommt so oft an die Reihe, wie man neben ihm eine Zweier-Kombination der vier anderen Polizisten stellen kann; das heißt: $K_2(4) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$, also sechsmal.

Beispiele zum EULER-Symbol:

$$\begin{aligned} \binom{12}{3} &= \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220 \\ \binom{12}{9} &= \frac{12!}{9! \cdot (12-9)!} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3!} = 220 \end{aligned}$$

Wir erkennen die Gesetzmäßigkeit: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Außerdem erkennen wir für das praktische Rechnen, dass man ein EULER-Symbol schnell zur Berechnung aufschreiben kann, da die Anzahl der Faktoren im Zähler und im Nenner jeweils die Anzahl k hat.

Die Blindenschrift (Wie oben)

Übungsaufgaben (Wie in der ausführlichen Fassung)

Anschließend „**IV. Der allgemeine Binomische Lehrsatz**“ (wie gehabt)

Ein Beitrag zur Kombinatorikepoche in der 9. Klasse

Im Hinblick auf die Kombinationen und das PASCAL'sche
Zahlendreieck

K. LABUDDE

Eine in der Kombinatorik wichtige Fragestellung ist die folgende: Auf wieviele verschiedene Arten kann man aus einer Menge von n Elementen Teilmengen von k Elementen auswählen? ($k \leq n$) Jede mögliche Auswahl nennt man eine Kombination. Die Anzahl der möglichen Kombinationen ist bekanntlich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Im ersten Geometrieunterricht in der 6. Klasse lassen viele Klassenlehrer ihre Schüler eine Figur zeichnen, die von 24 in einem Kreis regelmäßig angeordneten Punkten ausgeht. Jeder dieser Punkte wird mit jedem anderen verbunden. Es entsteht eine wunderbare Figur, an der vor allem Kreise als Hüllgebilde ihrer Tangenten und regelmäßig geformte Vieleck- bzw. Sternstrukturen auffallen. (Siehe nächste Seite.) Der Neuntklässler kann in dieser Figur ein Beispiel für Kombinationen erkennen, nämlich die Gesamtheit aller Kombinationen von zwei aus 24 Elementen, jede von ihnen dargestellt durch die Verbindungsstrecke von je zwei der 24 Punkte, also

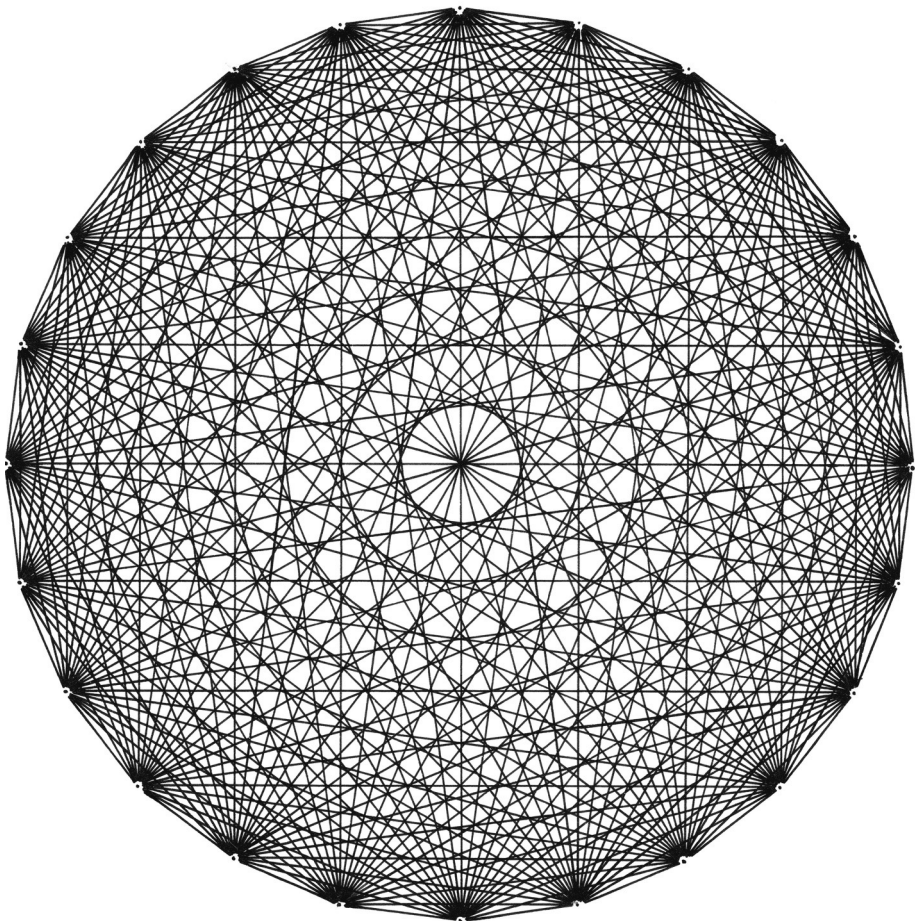
$$\binom{24}{2} = \frac{24!}{2! \cdot 22!} = 276 \text{ Strecken}$$

Systematisches Abzählen und Addieren führt zum gleichen Ergebnis:

1. Punkt, verbunden mit den 23 anderen 23 Strecken
2. Punkt, verbunden mit nur noch 22 anderen 22 Strecken
3. Punkt, verbunden mit nur noch 21 anderen 21 Strecken

.....

22. Punkt, verbunden mit nur noch 2 anderen 2 Strecken
 23. Punkt, verbunden mit nur noch einem anderen 1 Strecken
-
- 276 Strecken



Man kann es im Rahmen der Kombinatorikepoche dabei bewenden lassen und zu anderen Beispielen übergehen. Bei eingehenderem Anschauen erweist sich diese Figur jedoch als eine Quelle vielfältiger Entdeckungen und Betätigungen für die Schüler, wobei der Lehrer nur geringe Anstöße dazu geben muss. Eine erste Stufe der Vertiefung ergibt sich, wenn der suchende Blick gewisse Linien zu regelmäßigen Vielecken zusammenfasst:

8 Dreiecke,
6 Quadrate,
4 Sechsecke,
3 Achtecke,
2 Zwölfecke

und das eine 24-Eck, welches die ganze Figur einschließt.¹ So weit mag auch der Klassenlehrer mit seinen Schülern kommen, wenn er dem praktischen Tun die Betrachtung folgen lässt, natürlich ohne damit Kombinatorisches zu verbinden.

Für den Mathematiklehrer bietet sich nun in der 9. Klasse die Gelegenheit, das in der Mittelstufe Begonnene aufzugreifen und für die Behandlung kombinatorischer Fragen fruchtbar zu machen.

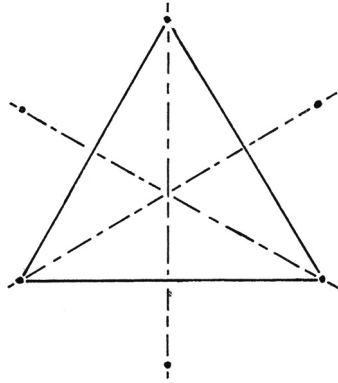
Im Folgenden kommt es nicht nur darauf an, regelmäßige Vielecke zu entdecken, sondern gerade auch unregelmäßige. Selbst ein in der anschaulichen Geometrie Geübter wird erhebliche Schwierigkeiten bekommen, in dem regelmäßigen 24-Eck mit seinen sämtlichen Diagonalen die vielfältigen Formen unregelmäßiger Vielecke auch nur einigermaßen vollständig auszumachen.

So bietet es sich an, zunächst ein regelmäßiges Vieleck mit wesentlich geringerer Eckenzahl zu wählen. Wir nennen es von nun an das Rahmen-vieleck. Die Suche nach allen einbeschriebenen Vielecken sollte durchaus einige Anstrengung kosten, aber doch nicht so schwierig sein, dass die Kräfte daran erlahmen. Von da aus kann man dann zu schwierigeren Vielecken mit größerer Eckenzahl und zu den einfacheren mit kleinerer Eckenzahl übergehen.

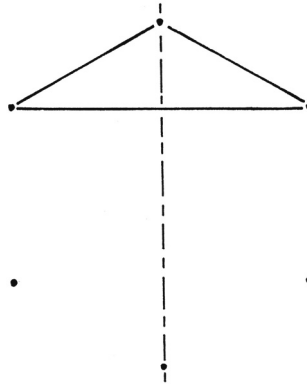
¹ Auf „Zweiecke“ (=Durchmesser bzw. Diagonalen) und „Eineck“ (=Eckpunkte) wird in dieser frühen Phase bewusst verzichtet, obwohl dies – zahlenmäßig gesehen – nahe läge.

Beginnen wir mit dem Sechseck! Da gibt es zunächst drei verschiedene Dreiecksformen:

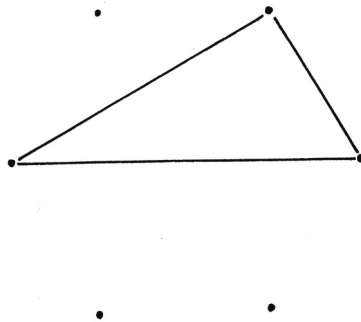
2 gleichseitige,



6 gleichschenklige,



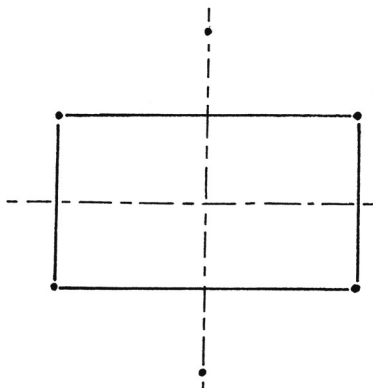
12 unsymmetrische,



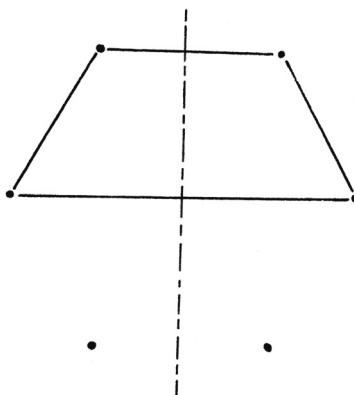
also insgesamt 20 Dreiecke.

Nun die Vierecke:

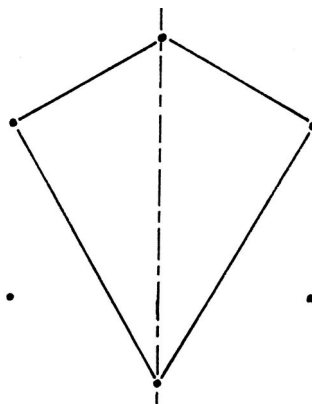
3 Rechtecke,



6 Trapeze,



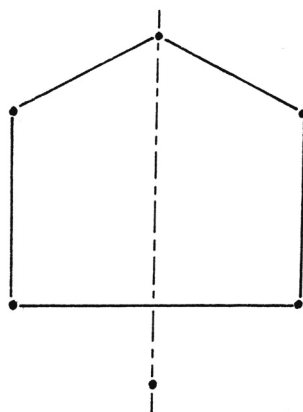
6 Drachen,



15 Vierecke also insgesamt.

Fünfecke gibt es nur von einer Form. Man kann sie dadurch erhalten, dass man jeweils eine der sechs Ecken des Sechsecks weglässt, und dies ist auf sechs verschiedene Arten möglich.

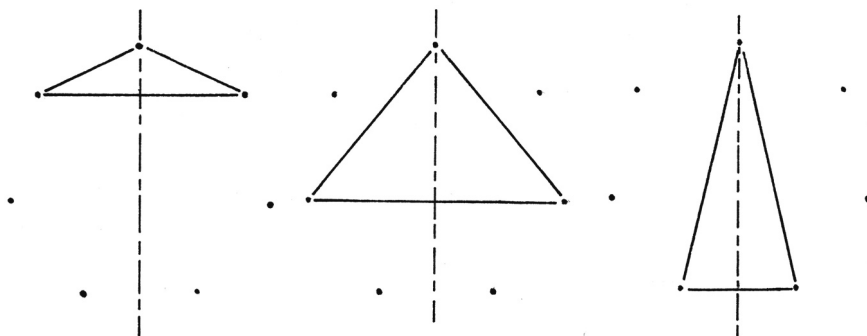
Also insgesamt 6 Fünfecke. Das Sechseck selbst gibt es schließlich auch. Einmal!



Es hat wenig Sinn, schon hier auf die Frage der Sehnen („Zweiecke“) und Einzelpunkte („Einecke“) einzugeben; erst recht nicht auf das eine „Nulleck“. Die vollständige Erfassung aller denkbaren Einzelfälle ist im Hinblick auf das mathematische Ziel – das Pascaldreieck in seiner kombinatorischen Bedeutung – zwar wichtig. Doch gilt es zunächst, weitere Entdeckungen zu machen.

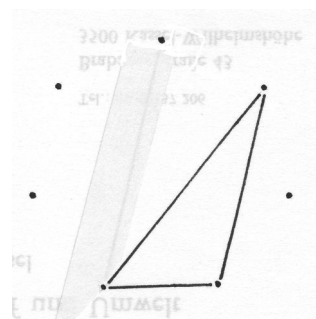
Nehmen wir als nächstes das Siebeneck!

Unter den einbeschriebenen Dreiecken befinden sich dreimal je 7 gleichschenklige.



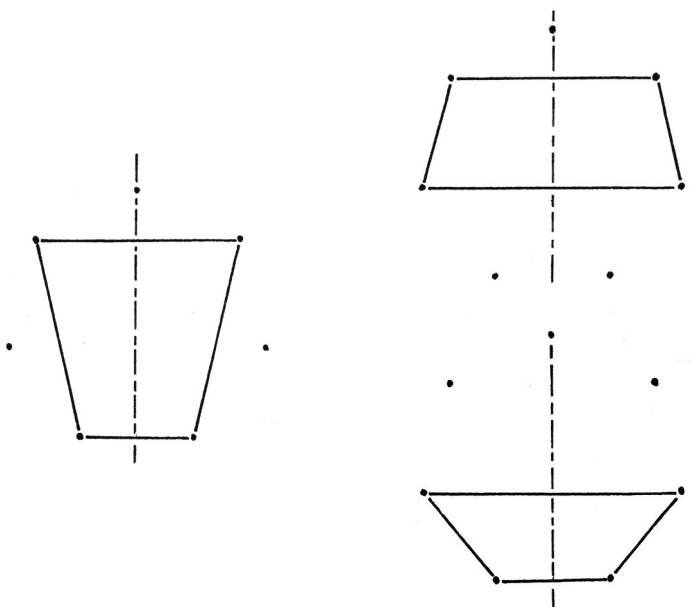
Hinzu kommen 14 unregelmäßige Dreiecke, 7 zueinander gleichsinnig kongruente und 7 dazu gegensinnig kongruente.

So ergeben sich insgesamt 35 Dreiecke.

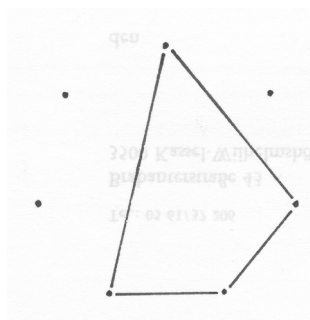


Es ist gar nicht so leicht, sich zu vergewissern, dass man damit alle möglichen Dreiecke erfasst hat. Es kann durchaus passieren, dass man etwas übersieht oder doppelt erfasst, ohne es zu bemerken. Diese Schwierigkeit steigert sich natürlich, wenn das Rahmenvieleck noch mehr Ecken hat.

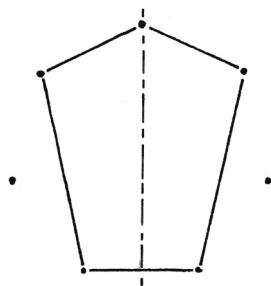
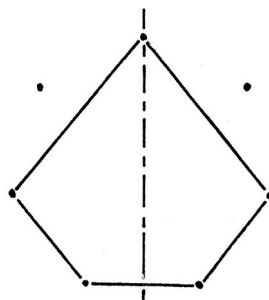
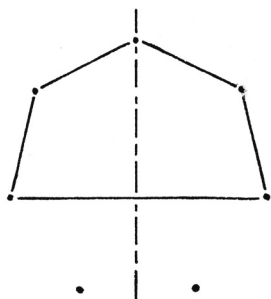
Nun die eingeschriebenen Vierecke! Darunter befinden sich dreimal je 7 gleichschenklige Trapeze.



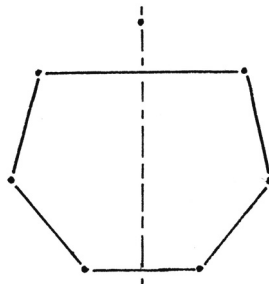
Außerdem gibt es 14 unregelmäßige Vierecke, 7 gleichsinnig kongruente und 7 dazu gegensinnig kongruente. Dies ergibt insgesamt 35 Vierecke. Ebenso viel Vierecke wie Dreiecke!



Fünfecke gibt es dreimal je 7 achsensymmetrische, und das sind sie auch schon alle. Insgesamt 21 Fünfecke.



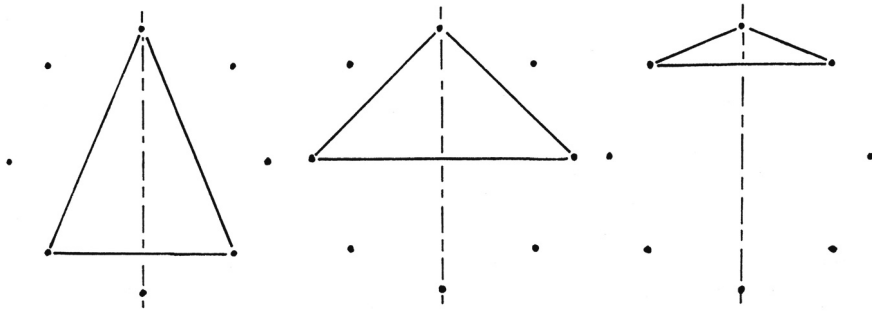
Sechsecke gibt es im Siebeneck nur in einer Form. (Wie Fünfecke im Sechseck.) Insgesamt also 7 Sechsecke.



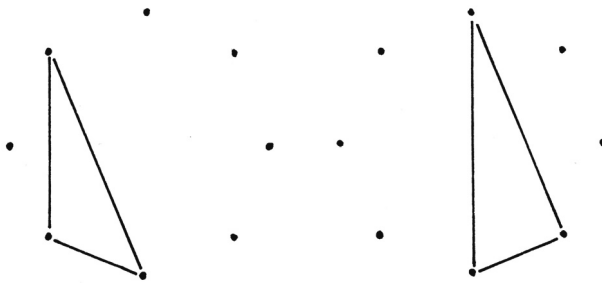
Das Siebeneck gibt es dann auch noch, selbstverständlich einmal.

Ob man nun zum Achteck oder zum Fünfeck übergeht, das ist auch eine Frage des Zeitaufwands und der Fähigkeit, das ganze Thema spannend zu gestalten, die Arbeit unter den Schülern aufzuteilen, einiges zu Hause weiterführen zu lassen usw. Jedenfalls gibt es reichlich Gelegenheit, die Schüler ihren Fähigkeiten entsprechend einzusetzen: langsame und schnelle, anschaulich „drauf los Suchende“ und übersichtlich Ord nende, systematisch Abzählende usw.

Erweitern wir unsere Erfahrungen an weiteren Vielecken!

Das Achteck:

Es enthält dreimal je 8 gleichschenklige Dreiecke

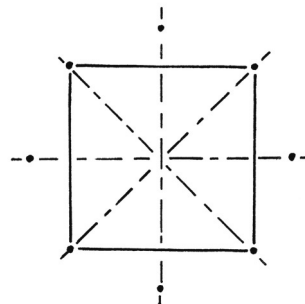


und zweimal
je 16
unregelmäßige
Dreiecke.

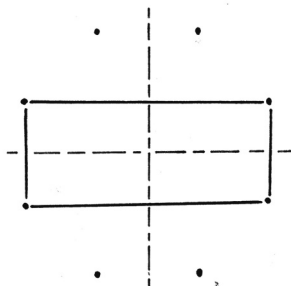
Dies ergibt insgesamt 56 Dreiecke.

Vierecke gibt es in großer Zahl und in vielfältigen Formen.

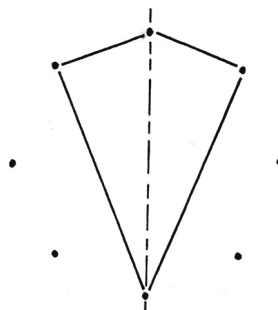
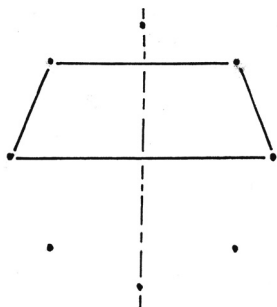
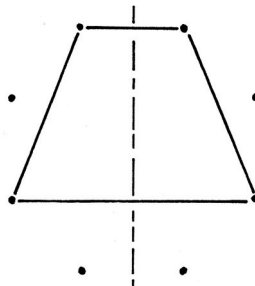
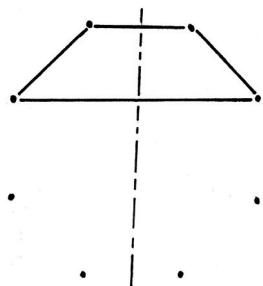
Darunter befinden sich
2 Quadrate,
vierfach achsensymmetrisch



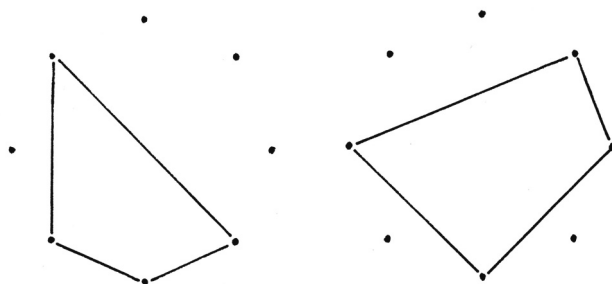
4 Rechtecke
zweifach achsensymmetrisch



viermal je 8 einfach achsensymmetrische
Trapeze bzw. Drachen

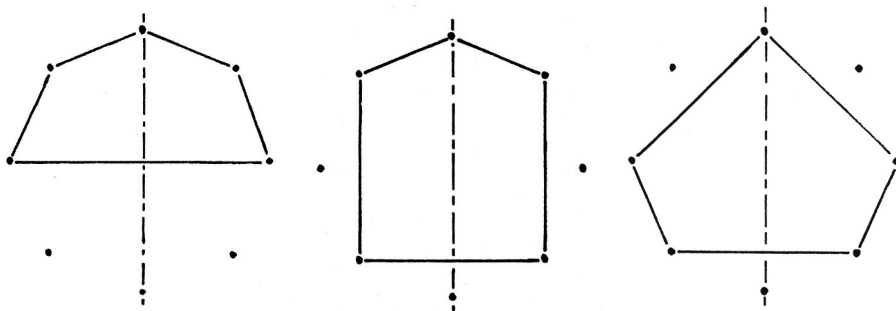


und zweimal
je 16
unregelmäßige
Vierecke.

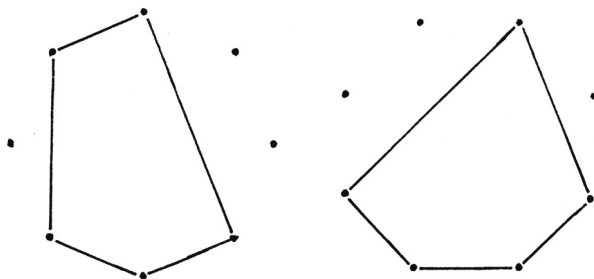


Das sind insgesamt 70 Vierecke.

Fünfecke gibt es wieder insgesamt weniger und in weniger Formen.



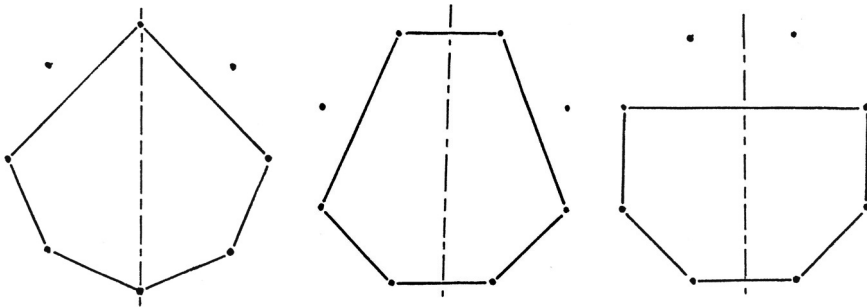
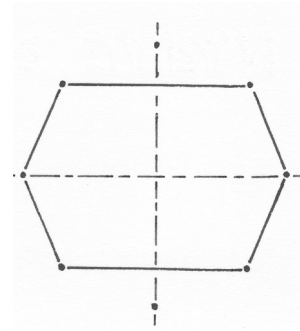
Darunter befinden sich, wie bei den Dreiecken, dreimal je 8 einfach achsensymmetrische Fünfecke.



Hinzukommen
zweimal je 16
unregelmäßige
Fünfecke.

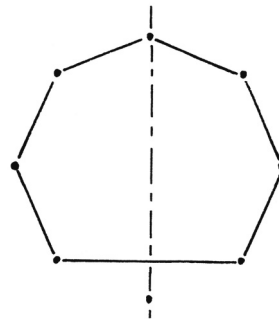
Also insgesamt 56 Fünfecke.

Sechsecke sind es noch weniger,
nämlich 4 doppelt achsensymmetrische



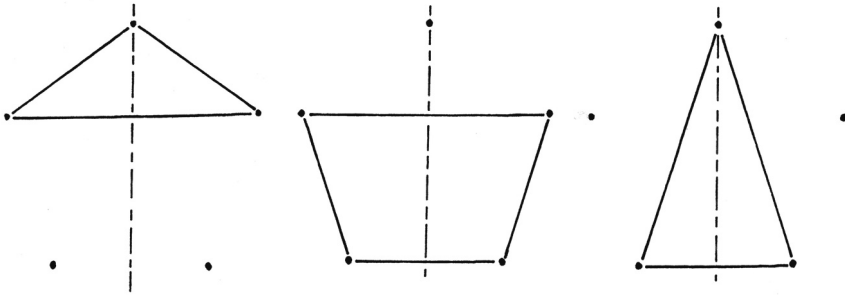
und dreimal je 8 einfach achsensymmetrische, insgesamt also 28 Sechsecke.

Außerdem gibt es 8 Siebenecke
und das eine Achteck selbst.



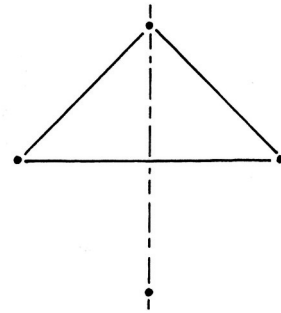
Wesentlich einfacher wird es nun, wenn wir zu den Rahmenvielecken mit geringerer Eckenzahl übergehen. Da ist der Anteil der einbeschriebenen „echten“ Vielecke im Verhältnis zu den „unechten“ geringer. Was sich als Zahlengesetzmäßigkeit herauschälen soll, tritt deshalb hier nicht so deutlich in Erscheinung.

Dem Fünfeck kann man nur zweimal je 5 Dreiecke und 5 Vierecke



einbeschreiben, also insgesamt 10 Dreiecke und 5 Vierecke.
Hinzu kommt das eine Fünfeck.

Dem Quadrat schließlich kann man insgesamt nur 4 Dreiecke einbeschreiben. Und das eine Quadrat selbst gehört auch dazu.



Jetzt dürften genügend gesättigte Erfahrungen vorliegen, um einsehen zu können, dass es einen Sinn hat, Diagonalen (d.h. Punktpaare) als „Zweiecke“ und Einzelpunkte als „Einecke“ in die Betrachtung einzubeziehen, auch wenn es sich nicht um Flächen handelt. Schließlich ist es wohl plausibel, dass es eine *eindeutige* Sache ist, überhaupt keinen Punkt heranzuziehen. Im Unterricht von einem „Nicht-Gebilde“ zu reden und dann noch das Wort „Nulleck“ zu gebrauchen, verbietet sich in einer 9. Klasse.

An diesem Benennungsproblem wird deutlich, dass es die Flächen und ihre Formen gar nicht sind, auf die es letzten Endes ankommt, sondern auf die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von jeweils soundsovielen Punkten aus einer umfassenderen Menge heraus. Allerdings unterstützen die Formen das ordnende Denken, um das es in der Kombinatorik im wesentlichen geht.

Auch die Tatsache, dass wir die Punkte regelmäßig (auf einem unsichtbaren Kreis) angeordnet haben, ist an sich unwesentlich. Doch hat sie geholfen, den gesamten Fragenkomplex so anzugehen, dass man die Übersicht nicht verliert – wenn auch mit einiger Mühe. So betrachtet kann das gesamte Vorgehen auch als ein behutsames Hinführen zur Abstrak-

tion aufgefasst werden; in dem Sinne, dass der Schüler lernen kann, von Unwesentlichem (wenn auch sehr Konkretem) abzusehen. Geometrische Formen werden ja um so mehr als anschaulich-konkret erlebt, je regelmäßiger sie sind. So ist es z. B. anregend, herausfinden zu lassen, wie die Anzahl der verschiedenen Typen von Dreiecken, Vierecken usw. zur Zahl ihrer Symmetrieachsen korrespondiert. Unsymmetrische Formen gibt es jeweils am meisten, mehrfach symmetrische nur in geringer Zahl.

Fassen wir nun die Ergebnisse unserer Betrachtungen zusammen! Dabei sollen jetzt als Rahmenvielecke auch das Dreieck, das „Zweieck“, das „Ei-neck“, ja sogar jenes Ungebilde „Nulleck“ einbezogen werden, und erst recht auch als einbeschriebene Vielecke. Unterlässt man dies, so fehlt dem nun entstehenden Pascal-Dreieck seine Spitze. Das könnte man als Schönheitsfehler ansehen.

Eckenzahl des Rahmenvierecks	Anzahl der eingezeichneten Vierecke							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1		1						
2			1					
3				1				
4					1			
5						1		
6							1	
7								1
8								

„Nullecke“

„Einecke“

„Zweiecke“

„Dreiecke“

„Vierecke“

„Fünfecke“

„Sechsecke“

„Siebenecke“

„Achtecke“

Betrachtet man die Zahlen in einer Zeile des so entstandenen Pascaldreiecks, so fällt zweierlei auf.

1. Die Symmetrie der Zahlen bezüglich der Mittelachse. Sie kann unmittelbar einleuchten, weil es zu jedem einbeschriebenen Vieleck ein komplementäres gibt. Dessen Eckenzahl ergänzt die des erstgenannten Vielecks zur Eckenzahl des Rahmenvielecks. Zu jedem einbeschriebenen Vieleck findet man das komplementäre dadurch, dass man die für das erste Vieleck nicht benötigten Punkte des Rahmenvielecks zur Bildung des komplementären Vielecks heranzieht. So kann die Formel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ unmittelbar als gültig erkannt werden.
2. Ist die Eckenzahl des Rahmenvielecks eine Primzahl, so ist diese ein Teiler von sämtlichen Zahlen der betreffenden Zeile des Pascaldreiecks, ausgenommen die Einsen am Anfang und am Ende. Ist die Eckenzahl keine Primzahl, so ist sie auch nicht Teiler von allen Zahlen der betreffenden Zeile. Solches an Betrachtungen geometrischer Formen zu entdecken, mag überraschen. Im Rahmen des Unterrichts in der 9. Klasse geht es nicht unbedingt darum, ein vermutetes Gesetz lückenlos zu beweisen. Wohl aber können wir unsere Betrachtungen an den einbeschriebenen Vielecken dazu verwenden, in die zahlenmäßigen Zusammenhänge tiefer hineinzuleuchten.

Dazu ist es notwendig, die Entstehung der inneren Zahlen des Pascaldreiecks genauer anzuschauen. Sie sind Summen von Zahlen, deren jede einzelne einer bestimmten Form des betreffenden einbeschriebenen Vielecks zuzuordnen ist. Nehmen wir als Beispiele das Siebeneck und das Achteck als Rahmenvielecke.

Das Siebeneck:

Dass man ihm je 7 „Einecke“ und Sechsecke einbeschreiben kann, ist unmittelbar klar. Betrachten wir nun die 21 „Zweiecke“ bzw. Fünfecke, so sind es in beiden Fällen dreimal je sieben. Und zwar deswegen, weil jedes mögliche „Zweieck“ bzw. Fünfeck *eine* Symmetrieachse hat. So entsteht mit 21 zwangsläufig eine Siebenerzahl.

Von den Dreiecken und Vierecken gibt es zunächst je dreimal sieben mit jeweils einer Symmetrieachse, also wieder die Siebenerzahl 21. Hinzu kommen die unsymmetrischen Dreiecke bzw. Vierecke. Eine erste Gruppe von sieben entsteht dadurch, dass man ein Exemplar „im Kreis herumlaufend“ alle sieben Positionen der Reihe nach einnehmen lässt. Dann wiederholt man dies mit einem gegenseitig symmetrischen Exemplar. So kommen zweimal sieben Positionen der einzigen Dreiecks- bzw. Vierecksform zustande, die keine Symmetrie aufweist. So setzt sich die Gesamtzahl aller möglichen einbeschriebenen Dreiecke bzw. Vierecke ausschließ-

lich aus Siebenerzahlen zusammen und ist somit selbst eine Siebenerzahl:
 $35 = 7 + 7 + 7 + 2 \cdot 7$.

Das Achteck:

Wieder ist es unmittelbar klar, dass man acht „Einecke“ bzw. Siebenecke einbeschreiben kann. Dann gibt es je 28 „Zweiecke“ und Sechsecke. 28 ist keine Achterzahl. Wie kommt sie zustande? Da gibt es zunächst dreimal je acht einfach achsensymmetrische Zweiecke bzw. Sechsecke, also $24 = 3 \cdot 8$. Nun kommen aber vier doppelt achsensymmetrische Exemplare hinzu. Also insgesamt $28 = 8 + 8 + 8 + 4$. Der Summand vier zerstört die Teilbarkeit durch acht. Es ist die doppelte Achsensymmetrie, die verhindert, dass es von dieser Sorte acht Exemplare gibt. Von den Dreiecken und Fünfecken gibt es je 56, also wieder eine durch acht teilbare Zahl. Dies hängt damit zusammen, dass es von diesen Vielecken ausschließlich solche gibt, die eine oder keine Symmetrieachse besitzen: dreimal je acht mit einer Symmetrieachse und zweimal je 16 ohne Symmetrieachse. Hier ist also die Gesamtzahl $56 = 8 + 8 + 8 + 16 + 16$ wieder zwangsläufig eine Achterzahl.

Schauen wir zuletzt die Vierecke an. Da gibt es zwei vierfach achsensymmetrische Quadrate, vier zweifach achsensymmetrische Rechtecke, viermal je acht einfach achsensymmetrische Trapeze bzw. Drachen und zweimal je 16 nicht symmetrische Vierecke. Das ergibt $2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 16 + 16 = 70$ Vierecke. Die Teilbarkeit dieser Zahl durch 8 wird durch die mehrfach achsensymmetrischen Quadrate und Rechtecke $(2+4)$ zunichte gemacht.

Was wir am Siebeneck und am Achteck feststellen konnten, deutet auf Allgemeingültiges hin.

1. Besitzt das einbeschriebene Vieleck keinerlei Symmetrie, so ist die Anzahl der Vielecke doppelt so groß wie die Zahl der Ecken des Rahmenvielecks.
2. Hat das einbeschriebene Vieleck nur *eine* Symmetrieachse, so ist die Anzahl aller dieser Vielecke gleich der Eckenzahl des Rahmenvielecks.
3. Lässt man ein Vieleck „im Kreis herumlaufen“, so kann es vorkommen, dass es mit seiner Ausgangsposition schon zur Deckung kommt, *bevor* es alle möglichen Positionen durchlaufen hat. – Die Eckenzahl des Rahmenvielecks ist dann sicher keine Primzahl. – Weiteres Drehen liefert dann keine neuen Vielecke mehr. Eventuell bekommt man aber durch Spiegeln weitere. Dies ist nämlich dann der Fall, wenn das Vieleck *nicht* achsensymmetrisch ist. Man erhält dann nach dem Spiegeln doppelt so viele, wie man vorher hatte. Besitzt dagegen das

Vieleck wenigstens eine Symmetrieachse, dann hat man durch Drehen des Vielecks bereits alle möglichen Vielecke erhalten, wenn es zum erstenmal mit seiner Ausgangsposition zur Deckung kommt.

In den folgenden Fällen ist daher die Anzahl der einbeschriebenen Vielecke kleiner als die Eckenzahl des Rahmenvielecks:

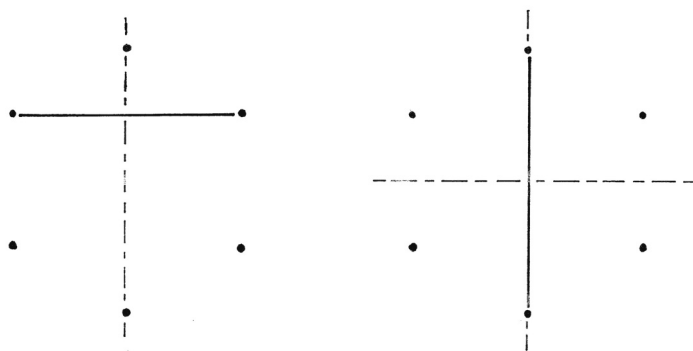
- a) Bis zum Auftreten der ersten Deckung sind weniger Vielecke entstanden als die Hälfte der Eckenzahl des Rahmenvielecks.
- b) Bis zum Auftreten der ersten Deckung sind halb so viele Vielecke entstanden wie die Eckenzahl des Rahmenvielecks angibt. Und das Vieleck besitzt eine Symmetrieachse.

An der Zahl solcher Vielecke liegt es, wenn die Eckenzahl des Rahmenvielecks kein Teiler der Gesamtzahl *aller* einbeschriebenen Vielecke mit gleicher Eckenzahl ist.

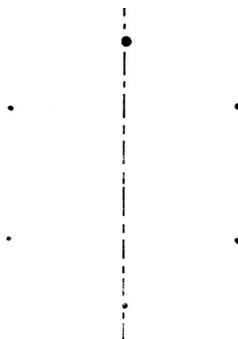
4. Ist die Anzahl der Ecken des Rahmenvielecks eine Primzahl, so haben die einbeschriebenen Vielecke höchstens eine Symmetrieachse. Nach 1. und 2. ist somit die Gesamtzahl einbeschriebener Vielecke gleicher Eckenzahl durch die Eckenzahl des Rahmenvielecks teilbar.

Schließlich noch eine Anmerkung zur Symmetrie der „Zweiecke“ und „Einecke“. Ein „Zweieck“, also eine Strecke, hat für sich allein betrachtet, stets zwei Symmetrieachsen: die Mittelsenkrechte und die Strecke selbst. Das „Eineck“, also der Einzelpunkt, hat in diesem Sinne unendlich viele Symmetrieachsen, nämlich alle Geraden, die durch den Punkt gehen. Betrachtet man diese Gebilde im Zusammenhang mit dem Rahmenvieleck, so ergibt sich anderes.:

Eine Seite oder eine Diagonale des Rahmenvielecks, die nicht zugleich ein Durchmesser ist, hat mit ihrem Rahmenvieleck zusammen nur eine Symmetrieachse, ihre Mittelsenkrechte. Nur der Durchmesser hat darüber hinaus auch sich selbst als Symmetrieachse.



Das „Eineck“ hat zusammen mit seinem Rahmenvieleck nur eine einzige Symmetrieachse, den zugehörigen Durchmesser.



Das Rahmenvieleck in die Symmetriebetrachtung einzubeziehen ist sachgemäß, weil sich alles, was wir hier untersuchen, auf dies Rahmen-vieleck bezieht.

So gesehen ordnen sich die Symmetrien der „Einecke“ und „Zweiecke“ sinnvoll ein. Insbesondere korrespondieren sie dann exakt mit den Sym-metrien der zu ihnen komplementären Vielecke.

Rückblickend auf die dargestellten Beispiele und die dabei angestellten Überlegungen stellt sich die Frage, wie man bei weiter wachsender Ecken-zahl des Rahmenvielecks wirklich alle einbeschreibbaren Vielecke erfassen kann. Wie weit die Schüler bei solch einer Betätigung Phantasie entfal-ten, Systematik entwickeln und Durchhaltekraft aufbringen können, das wird bei den Einzelnen sehr unterschiedlich ausfallen. Auch die Fähigsten kommen bei diesem Vorgehen einmal an ihre Grenzen. Das mathemati-sche Gesetz von der Anzahl der Kombinationen von k aus n Elementen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

wird man durch das bei den einzelnen Beispielen angedeutete Vorgehen kaum finden. Der Mathematiker mag darin einen Mangel sehen. Für den Pädagogen macht aber eine Betätigung wie die hier beschriebene nach meiner Überzeugung dennoch einen Sinn. Wird doch hierdurch ein Ordnung schaffendes Denken geschult, wie es gerade für das Lebensalter der Neuntklässler so wichtig ist.

Wenn schließlich auf ganz anderen Wegen das Gesetz in Gestalt der bekannten Formel doch gefunden wird (Siehe z.B. den Aufsatz von K.-Fr. Georg, insbesondere das Kapitel „Kombinationen“ ab Seite 221 und, darauf vorbereitend, das Kapitel „Variationen(ohne Wiederholungen)“ ab Seite 216) und sich die Übereinstimmung mit den hier erarbeiteten Er-gebnissen herausstellt, dann kann dies bei den Schülern ein Gefühl der

Befriedigung auslösen. Ist es doch im Hinblick auf das spätere Leben wertvoll, immer wieder die Erfahrung machen zu können, dass es möglich ist, auf höchst unterschiedlichen Wegen zum gleichen Ziel zu gelangen.

Einige Gesichtspunkte, die den Anstoß zu dieser Darstellung gegeben haben, sollen hier abschließend genannt werden.

Seit Jahren verändert sich die Lernbereitschaft unserer Schüler auffällig. Sie tendiert immer mehr hin zum praktischen Tun, und immer weniger zur unmittelbaren Erkenntnisbemühung im gedanklichen Prozess. Für den Lehrer folgt daraus, dass er sich mehr als früher bemühen muss, die Schüler zu vielfältigem Üben anzuregen. Sie wollen soviel wie möglich selbst entdecken.

Eine ständige Aufgabe des Lehrers ist es, seinen Unterricht so zu führen, dass ein gesunder Wechsel zwischen mehr belebenden und mehr gestaltenden Phasen stattfindet, vergleichbar einem gesunden Atemvorgang.

In dem beschriebenen Beispiel zur Kombinatorik kann sich der Schüler im Reich der vielfältigen Formen regelmäßiger und unregelmäßiger Vielecke als Entdecker betätigen. Phantasie und Beweglichkeit sind gefordert. Außerdem ist mit dem Zeichnen reichlich Gelegenheit zu praktischem Tun gegeben. Die Betrachtung des Geschaffenen und seine Durchdringung mit Zahlenmäßigem wirkt hingegen gestaltend.

Nicht zuletzt ist die Wiederholung von Elementarem in der Oberstufe unerlässlich. Diese Wiederholung soll sich jedoch nicht genauso abspielen wie bei den entsprechenden Übungen in der Mittelstufe, sondern in einem neuen Zusammenhang, gleichsam auf höherer Ebene; damit auch das Gelernte vertiefend.

In unserem Falle handelt es sich z. B. um geometrische Grundkonstruktionen, um die Kenntnis der verschiedensten speziellen Vielecksformen, um verschiedene Arten von Symmetrien, aber auch um elementares Rechnen, um Primzahlen und um die Teilbarkeit zusammengesetzter Zahlen. Dies alles jedoch im Zusammenhang mit der Kombinatorik, dem neuen Stoff des 9. Schuljahres.

Die vorliegende Darstellung soll an einem Beispiel auch zeigen, wie man den Anforderungen der gegenwärtigen pädagogischen Situation unter den obengenannten Gesichtspunkten Rechnung tragen kann. Das Thema „Kombinationen und das Pascal'sche Zahlendreieck“ ist ein mögliches, das durch andere ersetzt werden könnte. Wesentlich ist hier in erster Linie die Art und Weise, *wie* man mit dem mathematischen Inhalt pädagogisch arbeitet, nicht so sehr der Inhalt selbst. Hierzu sollen diese Ausführungen eine Anregung geben.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik

UWE HANSEN

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann als Einleitung einer Kombinatorikepoche benutzt werden. Die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten können von den Schülern selbständig gefunden werden. Beginnen kann man z. B. mit dem folgenden

1. Beispiel: Um seine wirtschaftliche Lage zu verbessern, gibt Herr A demjenigen, der eine „6“ würfelt, € 1,-, demjenigen, der eine „3“ € 0,50 und dem, der eine „1“ würfelt, € 0,30. Welchen Einsatz wird er für ein dreimaliges Würfeln nehmen, wenn er bei häufigem Würfeln etwa 10 % des Einsatzes verdienen will?

Ereignis	Gewinn
„6“	€ 1,-
„3“	€ 0,50
„1“	€ 0,30

Von Schülern kommt die folgende Überlegung: Im Durchschnitt kommen auf 6 Würfe alle Zahlen einmal vor. Daher muss Herr A für 6 Würfe voraussichtlich

$$€ 1,- + 0,50 + 0,30 = € 1,80 \quad \text{ausgeben.}$$

Bei drei Würfeln wird er also voraussichtlich € 0,90 ausgeben. Nimmt er als Einsatz für dreimaliges Würfeln € 1,-, so wird er voraussichtlich 10% vom Einsatz gewinnen.

Lässt man jeden Schüler dreimal würfeln, so ist die Anzahl der Würfe bereits so groß, dass die Ergebnisse in dem Bereich der Vorhersagen liegen.

Setzt man fest:

Ereignis	Gewinn
„6“	€ 0,60
„5“	€ 0,50
„4“	€ 0,40

und:

Ereignis	Gewinn
„3“	€ 0,30
„2“	€ 0,20
„1“	€ 0,10

dreimaliges Würfeln kostet € 1,- so wird die Kasse voraussichtlich bei 6 Würfeln € 2,10 ausgeben aber nur € 2,- einnehmen, so dass dieses Spiel für die Kasse nicht sinnvoll ist.

Nimmt man als Einsatz € 0,20 pro Wurf und gibt für eine „6“ € 0,60 aus, für eine „4“ € 0,40 und für eine „1“ oder „2“ € 0,10, so werden die Einnahmen so groß sein wie die Ausgaben, so dass dieses Spiel für eine Kasse uninteressant ist.

Es wurde dann in der Klasse 4500 mal gewürfelt (Hausaufgabe, jeder 100 oder 200 mal). Im Idealfall kommt jede Zahl 750 mal vor. Es ist im allgemeinen so, dass eine Zahl an diesen Idealfall so nah herankommt, dass die Abweichung unter 1 % liegt. Manchmal liegt die Abweichung bei einem halben oder einem viertel Prozent! Das ist für alle ein verblüffendes Ergebnis.

2. Beispiel: In einem Gefäß befinden sich 1 gelbe, 1 rote, 2 grüne und 4 blaue Kugeln. Eine Kugel wird herausgenommen.

Ereignis	Gewinn
gelb	€ 1,-
rot	€ 0,50
grün	€ 0,10

Nach achtmaligem Herausgreifen muss die Kasse voraussichtlich € 1,- + 0,50 + 2·0,10 = 1,70 bezahlen. Beträgt der Einsatz von € 0,25 pro Wahl, so hat man bei achtmaligem Wählen € 2,- eingenommen; also € 0,30 verdient, d. h. 15 % vom Einsatz.

Auch bei diesem Spiel traten die erwarteten Ergebnisse durchaus ein, falls nur häufig genug gespielt wurde.

Es lassen sich leicht ähnliche Aufgaben stellen: In einem Gefäß sind 1 weiße, 1 rote, 3 schwarze sonst gleiche Kugeln. Welchen Gewinn wird die Kasse nach 100-maligem Herausnehmen einer Kugel voraussichtlich machen, wenn eine Wahl € 0,25 kostet und der Gewinn € 0,70 für die weiße Kugel, und € 0,30 für die rote Kugel beträgt?

3. Beispiel: Aus einem Kartenspiel von 32 Karten wird eine Karte gezogen.

Ereignis	Gewinn	Ereignis	Gewinn
Herzkönig	€ 1,-	Herz Ass	€ 1,-
Herzdame	€ 1,-	Kreuzkarte	€ 0,30
Herzbube	€ 1,-	Piquekarte	€ 0,10

Der Einsatz für das Ziehen einer Karte beträgt € 0,25. Nach 32-maligem Ziehen wird jede Karte durchschnittlich einmal gezogen. Die Kasse gibt dann aus

$$4 \cdot € 1,- + 8 \cdot € 0,30 + 8 \cdot € 0,10 = € 7,20$$

Da die Einnahmen dann $32 \cdot 0,25 = € 8,-$ sind, ist der Gewinn für die Kasse voraussichtlich 10% vom Einsatz.

Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren. Der Würfel kann durch einen Oktaeder oder Ikosaeder, Pentagondodekaeder ersetzt werden. Statt einen Würfel kann man mehrere nehmen; man kann mehrere Gefäße nehmen oder mehrere Kugeln – „mit“ oder „ohne“ Zurücklegen nehmen bzw. mehrere Karten aus einem Spiel ziehen. Es tritt dann die wichtige Frage auf: „Welche Ereignisse sind gleichwahrscheinlich?“.

So vermuten die Schüler zunächst, dass es beim Werfen zweier Münzen drei Fälle gibt: beidesmal Ziffer, beidesmal Bild, einmal Ziffer - einmal Bild. Da aber der 2. Wurf unabhängig vom ersten ist, gibt es die vier gleichwertigen Ereignisse:

$$\begin{array}{cc} ZZ & BZ \\ ZB & BB \end{array}$$

In der Hälfte der Fälle zeigen also die Münzen etwas Verschiedenes; aber in einem Viertel der Fälle beidesmal die Ziffer. Hier zeigt sich schon das allgemeine Gesetz für unabhängige Ereignisse. Tritt Ereignis E_1 z. B. in der Hälfte der möglichen Fälle auf, Ereignis E_2 z. B. in einem Drittel der möglichen Fälle, so tritt das Ereignis „ E_1 und E_2 “ in dem Drittel der Hälfte der Fälle auf – also in einem Sechstel der Fälle.

Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine ungerade Zahl zu werfen ist größer als eine durch 3 teilbare Zahl zu werfen, diese größer als eine „6“ zu werfen. Man sieht: man vergleicht die Verhältnisse von günstigen zu möglichen Fällen. Dies führt zu der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit (für gleichwahrscheinliche Fälle): Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses E ist das Verhältnis der günstigen zu den möglichen Fällen abgekürzt:

$$W(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Beispiele: Mit einem Würfel wird einmal geworfen:

$$W(\text{eine „6“ zu werfen}) = \frac{1}{6}$$

$$W(\text{eine gerade Zahl zu werfen}) = \frac{1}{2}$$

$$W(\text{eine Primzahl zu werfen}) = \frac{1}{2}$$

$$W(\text{eine nicht durch 3 teilbare Zahl zu werfen}) = \frac{2}{3}$$

$$W(\text{nicht „4“ zu werfen}) = \frac{5}{6}$$

$$W(\text{eine „7“ zu werfen}) = 0$$

Mit zwei Würfeln wird geworfen:

$$W(\text{zweimal „3“ zu werfen}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$W(\text{eine „1“, eine „2“ zu werfen}) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$W(\text{zwei gerade Zahlen zu werfen}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$W(\text{mindestens eine „6“}) = \frac{11}{36}$$

$$W(\text{Augensumme 4}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$W(\text{zwei verschiedene Zahlen}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

In einem Gefäß befinden sich 1 weiße, 2 rote, 3 schwarze Kugeln.

a) eine Kugel wird genommen:

$$W(\text{weiß}) = \frac{1}{6} \quad W(\text{rot}) = \frac{1}{3} \quad W(\text{schwarz}) = \frac{1}{2}$$

$$W(\text{weiß oder schwarz}) = \frac{2}{3} \quad W(\text{nicht weiß}) = \frac{5}{6}$$

b) zwei Kugeln werden genommen – ohne zurücklegen:

$$W(\text{rot, rot}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \quad W(\text{eine rot, eine weiß}) = 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$W(\text{schwarz, schwarz}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$W(\text{zwei gleiche}) = \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{4}{15}$$

Bei den letzten Aufgaben ist zu beachten, dass durch das Herausnehmen einer Kugel die Bedingungen geändert wurden: Man berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von E_2 falls E_1 eingetroffen ist.

An diesen Beispielen sind die folgenden Beziehungen zu erkennen

$$0 \leq W(E) \leq 1$$

$$W(E) + W(\text{nicht } E) = 1$$

$$W(\text{sicheres Ereignis}) = 1$$

$$W(\text{unmögliches Ereignis}) = 0$$

$W(E_1 \text{ und } E_2) = W(E_1) \cdot W(E_2)$ falls E_1 und E_2 unabhängig sind.

$W(E_1 \text{ oder } E_2) = W(E_1) + W(E_2)$ für Ereignisse die nicht gleichzeitig auftreten können.

Das Typische der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird an folgendem Beispiel deutlich: Aus 2 Gefäßen wird je eine Kugel genommen. Im ersten Gefäß befinden sich eine weiße und zwei schwarze, sonst gleiche Kugeln, im zweiten Gefäß eine weiße und drei schwarze, sonst gleiche Kugeln. Berechne:

$$W(\text{weiß, weiß}) = W(\text{weiß}) \cdot W(\text{weiß}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$W(\text{schwarz, schwarz}) = W(\text{schwarz}) \cdot W(\text{schwarz}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$W(\text{eine weiße, eine schwarze})$$

$$= W(1. \text{ weiß, } 2. \text{ schwarz oder } 1. \text{ schwarz, } 2. \text{ weiß})$$

$$= W(1. \text{ weiß}) \cdot W(2. \text{ schwarz}) + W(1. \text{ schwarz}) \cdot W(2. \text{ weiß})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

Eine große Befriedigung für den Schüler stellt die Summe dar:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} = 1$$

Diese Summe muss sich ergeben, da alle Möglichkeiten erfasst sind. Der Schüler findet auch den Zusammenhang der Beziehungen „und“ und „oder“ mit den Rechenoperationen „Multiplikation“ bzw. „Addition“ bestätigt. Außerdem erlebt er wiederholt, wie sich ein Ganzes in die Teile gliedert, z. B.:

$$W(\text{irgend zwei Kugeln}) = W(\text{zwei gleiche oder zwei verschiedene Kugeln})$$

$$W(\text{zwei gleiche Kugeln}) = W(\text{zwei weiße oder zwei schwarze Kugeln})$$

$$W(\text{zwei weiße Kugeln}) = W(\text{erste weiß und zweite weiß})$$

Es sei betont, dass die Gesetzmäßigkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht aus der Erfahrung stammen. Denn würde man z. B. bei einem Würfel finden, dass er bei sehr häufigem Werfen in einem Drittel der Fälle die „6“ zeigt, so wird man nicht seine Überlegungen korrigieren, sondern das beobachtete Ergebnis der Unregelmäßigkeit dieses besonderen Würfels zuschreiben: Die dargestellten Gesetze ergeben sich völlig aus dem Inhalt der benutzten Begriffe.

Diese Überlegung spricht für die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 9. Klasse. Der Schüler erfährt die Kraft seines eigenen Denkens, er erfährt, dass die Gesetze, die er in seinem Denken erkennt, auch in der Welt Gültigkeit haben, so dass er sich dadurch in der Welt heimisch fühlt. Es ist daher wichtig, dass auch der Schüler die Geset-

ze seines Denkens erfährt, wobei die Wahrscheinlichkeitsrechnung viele Anregungen geben kann.

Noch einige Beispiele:

In einem Kasten befinden sich 3 Karten mit den Buchstaben AIK. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim dreimaligen Herausgreifen der Name KAI erscheint? Es ist $W(KAI) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Ähnliche Aufgaben kann man mit Wörtern von mehreren Buchstaben machen, wobei auch gleiche Buchstaben vorkommen können. Man könnte hier das Produkt $n!$ einführen.

Eine weitere Aufgabe

Antje bzw. Johanna legen die Buchstaben ihres Namens auf Karten in je einen Kasten. Sie nehmen dann drei Karten wieder heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass „JAN“ erscheint?

a) bei Antje $W(JAN) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$

b) bei Johanna $W(JAN) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{105}$

Diese Aufgabe kann in eine humorvolle Geschichte eingebettet werden. Man kann auch aus den Nachnamen von Mädchen der Klasse Vornamen von Jungen herausholen (und umgekehrt).

Aufgabe: In einem Klassenraum befinden sich 16 Mädchen und 12 Jungen. 2 Schüler verlassen den Raum. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Junge und ein Mädchen ist?

Lösung: $W = 2 \cdot \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} = \frac{32}{63}$

Ergänzung: $W(2 \text{ Mädchen}) = \frac{20}{63} \quad W(2 \text{ Jungen}) = \frac{11}{63}$

Aufgabe: vereinfachtes Lotto:

In einem Gefäß befinden sich 3 weiße und 5 schwarze Kugeln. Drei Kugeln werden genommen.

$$W(\text{drei weiße Kugeln}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

$$W(\text{genau zwei weiße Kugeln}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{15}{56}$$

$$W(\text{genau eine weiße Kugel}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot 3 = \frac{30}{56}$$

$$W(\text{keine weiße Kugel}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{56}$$

Probe: $\frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = 1$.

Aufgabe: Aus einem Spiel von 32 Karten wird eine Karte gezogen. Es ist $W(7 \text{ oder Herzkarte}) = W(7) + W(\text{Herzkarte}) - W(7 \text{ und Herz})$.

Für Ereignisse, die gleichzeitig auftreten können gilt:

$$W(E_1 \text{ oder } E_2) = W(E_1) + W(E_2) - W(E_1 \text{ und } E_2).$$

Dies ist einleuchtend, da man die Fälle, in denen beide Eigenschaften erfüllt sind, sonst doppelt zählen würde.

Aufgabe: Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt; man gelangt zu einer Höhle, in der ein kostbarer Schatz verborgen ist, auf zwei Wegen, die je durch 3 Tore führen. Beim 1. Tor wird mit einem Würfel geworfen. Beim 2. Tor wird aus einer Schale mit einer weißen, zwei roten, vier blauen Kugeln, eine gezogen; beim 3. Tor schließlich zieht man aus einem Spiel von 32 Karten eine Karte.

Linker Weg: man gelangt zur Höhle, wenn man eine gerade Zahl würfelt, dann eine weiße Kugel zieht und schließlich eine schwarze Karte zieht.

Rechter Weg: man gelangt zur Höhle, falls man eine ungerade Primzahl wirft, dann eine rote Kugel wählt und schließlich eine Bildkarte (König, Dame oder Bube) zieht. – Welcher Weg führt mit der größeren Wahrscheinlichkeit zum Schatz in der Höhle?

Aufgabe Drei Schützen schießen gemeinsam auf ein Ziel. In der Regel trifft jeder einmal auf 3 Schüsse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } W(\text{Ziel wird getroffen}) &= 1 - W(\text{Ziel wird nicht getroffen}) \\ &= 1 - W(\text{jeder Schütze trifft nicht}) \\ &= 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe zeigt den Zusammenhang von Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr deutlich:

Aufgabe: In sieben Gefäßen befindet sich je eine weiße und eine schwarze Kugel. Aus jedem Gefäß wird eine Kugel genommen.

$$W(\text{alle weiß}) = \frac{1}{2^7} \quad W(\text{genau eine schwarz}) = 7 \cdot \frac{1}{2^7}$$

denn es kann die schwarze Kugel aus 7 Gefäßen genommen werden.

$$W(\text{genau zwei schwarze}) = \binom{7}{2} \cdot \frac{1}{2^7}$$

Es gibt nämlich $\binom{7}{2}$ Möglichkeiten von den 7 Gefäßen zwei herauszugrei-

fen. Man erkennt: Diese Überlegungen stimmen völlig überein mit denen, die zur Berechnung von $(a+b)^7$ bzw. $(a+b)^n$ führen.

Auch beim so genannten Dreieck der Wahrscheinlichkeiten führen die gleichen Gedanken zum Ergebnis:

Aufgabe

Eine Figur steht auf der Marke „0“ einer Skala. Mit einer Münze wird geworfen. Erscheint die Ziffer, so wird die Figur um eine Einheit nach rechts verschoben. Erscheint „Bild“, so wird die Figur um eine Einheit nach links verschoben. Es wird die Münze n -mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur bei einer bestimmten Marke steht?

	-3	-2	-1	0	1	2	3
$n = 1$			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		
$n = 2$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{1}{4}$	
$n = 3$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$

Offensichtlich erscheinen in der n -ten Zeile die Werte:

$$\frac{1}{2^n} \binom{n}{0}, \frac{1}{2^n} \binom{n}{1}, \frac{1}{2^n} \binom{n}{2}, \dots, \frac{1}{2^n} \binom{n}{n}$$

Das Auftreten der Binomialkoeffizienten ist durchaus verständlich: Betrachten wir z. B. die Stelle $+3$ für $n=7$. Diese Stelle kann nur erreicht werden, wenn die Figur fünfmal nach rechts und zweimal nach links verschoben wird. Jeder Weg zu dieser Stelle kann also dargestellt werden als eine Folge von 7 Buchstaben und zwar fünfmal R und zweimal L, z. B. RRRLRLR. Daher entsteht die Frage: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 7 Elementen 2 Elemente herauszugreifen? Das ist aber gerade $\binom{7}{2}$.

Literaturverzeichnis

- ARCHIMEDES Werke, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972
- BARAVALLE H. v.: Geometrie als Sprache der Formen, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1980³
- BERLOQUIN P.: Mathematische Kopfspiele, München, 1988
- BERNHARD A.: Geometrie für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1996
- BERNHARD A.: Algebra für die 7. und 8. Klasse an Waldorfschulen, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1996
- BERNHARD A.: Vom Formenzeichnen zur Geometrie der Mittelstufe, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1996
- BINDEL E.: Die Arithmetik, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1967
- BINDEL E.: Die Kegelschnitte, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1963
- COLERUS E.: Vom Punkt zu vierten Dimension – Geometrie für Jedermann, Paulzsolnay Verlag, 1984
- EIGENMANN P.: Geometrische Denkaufgaben, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1993
- FLADT K.: Mathematik Bd. I, Verlag Moritz Diesterweg, 1962²
- HERTERICH K.: Die Konstruktion von Dreiecken, Klett Verlag, 1999
- KUSCH: Mathematik Bd. 2, Geometrie, Cornelsen Verlag, Essen, 1974
- LAMBACHER-SCHWEIZER: (Schulbücher, insbesondere ältere Ausgaben), Klett Verlag Stuttgart
- LOCHER-ERNST L.: Arithmetik und Algebra, Dornach, 1984
- OTT G.: Geometrie für Klassenlehrer der 6., 7. und 8. Klassen
- PERRON O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Stuttgart, 1954³
- REIDT-WOLFF: (Schulbücher), Schrödel-Schöning Verlag
- SCHNEIDER I. (Hrsg.): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933, Einführungen und Texte, Darmstadt, 1988
- SCHUBERTH E.: Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2001
- SCHUBERTH E.: Wirtschaftskunde und Algebra in der 7. und 8. Klasse, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2007
- STEINER R.: Menschenerkenntnis und Unterrichtsgestaltung, GA 302, Dornach 1993⁴
- STREHL S.: Fröhliche Wissenschaft, Nürnberg 1999
- ULIN B.: Der Lösung auf der Spur, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1987

