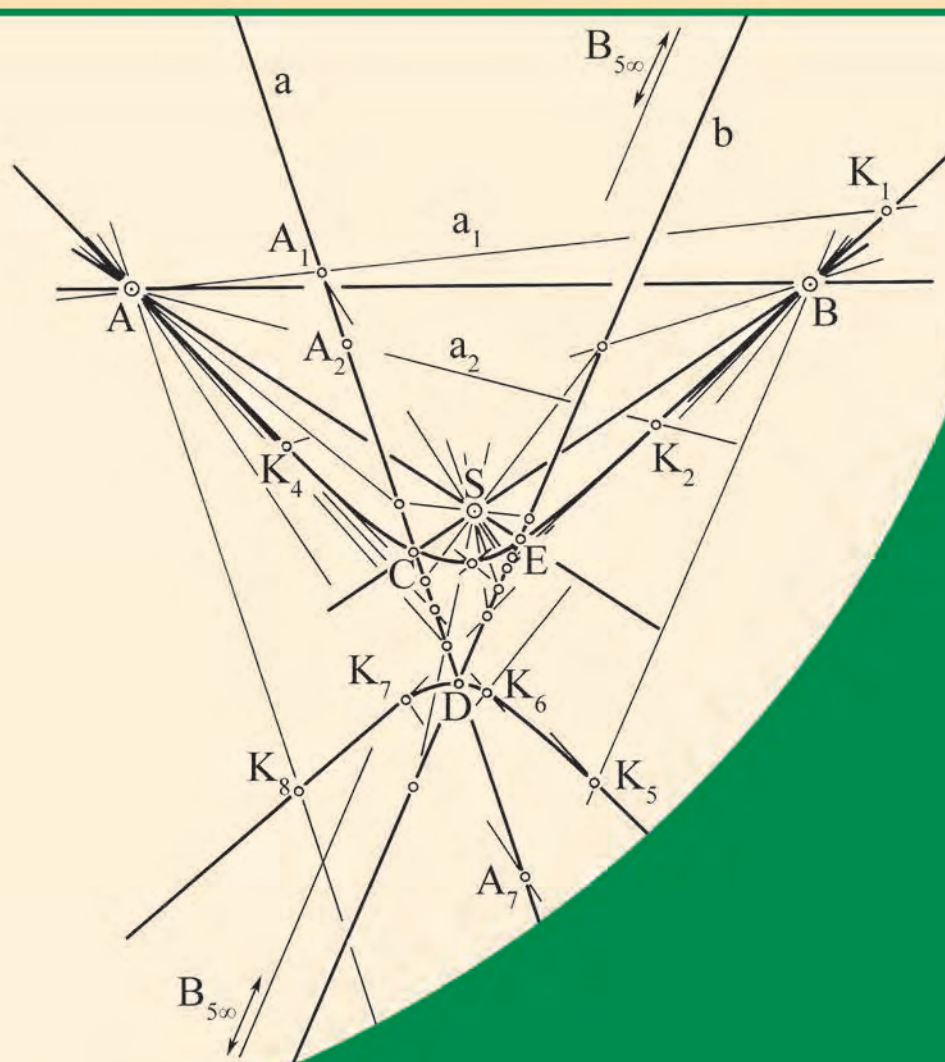


Markus Hünig (Hrsg.)

Mathematikthemen für die 11. Klasse

Ausgearbeitet nach der Unterrichtspraxis an Waldorfschulen

edition waldorf



GESTALTEN + ENTDECKEN

Mathematik



Pädagogische
Forschungsstelle
Kassel

GESTALTEN + ENTDECKEN **Mathematik**

Mathematikthemen für die 11. Klasse

ausgearbeitet nach der Unterrichtspraxis
an Waldorfschulen

Analytische Geometrie
Projektive Geometrie
Kugelgeometrie und
sphärische Trigonometrie
Folgen und Grenzwerte

P. Baum, K-F. Georg, U. Hansen, M. Hünig,
K. Labudde, R. Rosbigalle, S. Sigler

Herausgegeben von der Lehrplaninitiative der
Pädagogischen Forschungsstelle beim Bund der
Freien Waldorfschulen, Abt. Kassel

Kassel 2006/2022

edition waldorf

Herausgegeben am Standort Kassel, einer Abteilung der
Pädagogischen Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen
Wagenburgstraße 6 · 70184 Stuttgart

Sie finden uns im Internet unter
www.forschung-waldorf.de · www.waldorfbuch.de

© 2022 edition waldorf
Stuttgart, 3. unveränderte Auflage 2022
ISBN 978-3-939374-36-7

Gestaltung und Satz:
Markus Hünig, Mülheim & Sebastian Labusch, Erlangen
Pädagogische Forschungsstelle Kassel, Sabine Scherer

Herstellung:
BoD – Books on Demand, Norderstedt

Alle Rechte vorbehalten.
Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen
bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung der Pädagogischen
Forschungsstelle Stuttgart.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	4
Zu den einzelnen Beiträgen (M. Hünig).....	5
Von der Ökonomie des Unterrichtens am Beispiel der analytischen Geometrie (U.Hansen)	9
Einführung in die analytische Geometrie – ein Epochenbeginn (K.-F. Georg)	20
Zur Kennzeichnung der analytischen Geometrie (U. Hansen)	35
Exemplarische Stationen einer Epoche über projektive Geometrie (S. Sigler)	48
Projektive Geometrie – eine Epoche in der 11. Klasse (K.-F. Georg)	75
Projektive Geometrie – eine Epoche in der 11. Klasse (M. Hünig).....	155
Ein Weg in die projektive Geometrie (R.Rosbigalle)	185
Vom Verhältnis zum Doppelverhältnis (U. Hansen)	216
Kugelgeometrie (K. Labudde)	225
Von der inneren Symmetrie der Kugelgeometrie (U. Hansen)	238
Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie (P. Baum)	242
Der Winkelkosinussatz der sphärischen Trigonometrie (P. Baum)	244
Die Konstruktion und Berechnung des Kugeldreiecks (P. Baum)	246
Die Kegelschnitte (P. Baum)	255
Die Projektive Erzeugung der Kegelschnitte (P. Baum)	258
Orthogonale Kreisbüschel (P. Baum)	269
Erzeugung regelmäßiger Körper aus dem Tetraeder (U. Hansen)	278
Eine Bemerkung zum Grenzwert (U. Hansen)	290
Eine Verallgemeinerung der Folge von Fibonacci (U. Hansen)	301
Schlagwortverzeichnis	312

Vorwort

Die Arbeitsgruppe „Lehrplaninitiative Mathematik“ legt mit diesem Band, den Unterrichtsthemen der 11. Klasse, ihr bisher umfangreichstes Werk vor.

Das Schwerpunktthema Projektive Geometrie ließ es sinnvoll erscheinen, hier besonders in die Breite zu gehen, da es zu diesem Thema kaum didaktische Fachliteratur gibt. Auf die wenigen – wertvollen! – vorhandenen Bücher wird in den Beiträgen hingewiesen. Daneben war es der Gruppe auch und insbesondere bei diesem Thema ein Anliegen, einen breiten Ausschnitt aus der Vielfalt der Möglichkeiten darzustellen, wie man die Inhalte im Unterricht bearbeiten kann. So wird man in den verschiedenen Beiträgen, welche die Einführung der projektiven Geometrie in der 11. Klasse zum Gegenstand haben, sehr unterschiedliche Ansätze finden. Sie sind entstanden aus den jeweiligen Unterrichtssituationen sowie persönlichen Erfahrungen und Neigungen der Verfasser. Sie stellen ein breites Spektrum an Möglichkeiten dar, es soll den Leser dazu anregen, letzten Endes seinen eigenen Weg zu finden. Das Thema Kugelgeometrie und sphärische Trigonometrie ist dagegen eines, das in der Fachliteratur vielfach behandelt wird: so im Zusammenhang mit der Geodäsie, der Kartographie und der Astronomie. Hier wurde daher der Schwerpunkt auf die Stoffauswahl und didaktische Aufbereitung für den Unterricht gelegt.

Die analytische Geometrie findet sich in vielen Schulbüchern; inhaltlich wie methodisch ergeben sich für den Unterricht an der Waldorfschule aber viele Gesichtspunkte, welche in diesen Büchern keine Berücksichtigung finden. So wird auch der mit den Inhalten der üblicherweise in der Schule behandelten analytischen Geometrie Vertraute in diesem Band wichtige Anregungen, interessante Querverbindungen und überraschende Ansätze entdecken können.

Einige Beiträge mit Hintergrundwissen, kleinen Aperçus oder grundsätzlichen pädagogischen Darstellungen runden das Buch ab.

Die Autoren, die mit großem Engagement ihre Erfahrungen zusammengetragen haben, hoffen auch mit diesem Heft dem Anfänger Starthilfen und dem schon erfahrenen Kollegen Anregungen für die weitere Arbeit geben zu können.

Herrn Sebastian Labusch, der einen großen Teil der Schreib- und Setzarbeiten übernommen hat, sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Mülheim an der Ruhr, Frühjahr 2006

Markus Hünig

Zu den einzelnen Beiträgen

Von der Ökonomie des Unterrichtens am Beispiel der analytischen Geometrie (U. Hansen)

Wie können wir mit der knappen zur Verfügung stehenden Zeit ökonomisch umgehen? – Der Autor zeigt an Beispielen aus der analytischen Geometrie, wie man durch vielfältige Nutzung geeigneter Beispiele und durch geschickte Parallelen den (zeitlichen) Aufwand im Verhältnis zum erarbeiteten Stoff gering halten kann. S. 9

Einführung in die analytische Geometrie (K.-F. Georg):

Hier wird ein Einstieg in die analytische Geometrie dargestellt, der gleich mit Kurven beginnt – also den „üblichen“ Aufbau von Punkten über Geraden zu Kurven geradezu umkehrt. Die ausführliche Darstellung zeigt, wie dies sehr gut möglich ist; eine geometrische Behandlung der dort auftretenden Kurven in der 9. oder 10. Klasse wird dabei vorausgesetzt. S. 20

Zur Kennzeichnung der analytischen Geometrie (U. Hansen):

Was ist eigentlich das besondere an der analytischen Geometrie? Die in diesem Aufsatz dargestellten Beispiele und Aspekte eignen sich bei jeder Art der Behandlung der analytischen Geometrie dazu, einseitige Blickwinkel aufzulösen, den Horizont zu erweitern und zu zeigen, wo das alles hinführen kann. Mit z. T. recht anspruchsvollen Beispielen. S. 35

Projektive Geometrie (S. Sigler)

Warum betreiben wir an der Waldorfschule projektive Geometrie? Der Autor geht den Hinweisen in den pädagogischen Vorträgen Rudolf Steiners nach und setzt sie in den aktuellen pädagogischen Zusammenhang. Der besondere pädagogische Wert dieser Geometrie wird hier deutlich herausgearbeitet. Anschließend werden einige Stationen einer Epoche unter besonderer Berücksichtigung der Gliederung des Hauptunterrichts dargestellt. S. 48

Projektive Geometrie (K.-F. Georg):

Die hier dargestellte Epoche lehnt sich in vielen Aspekten an das gleichnamige Buch von A. Bernhard¹ an, greift aber manche Einzelheit und viele Verbindungen neu. Enthalten sind sehr viele variierende Übbeispiele – also Stoffentwicklung und Erüben ineinander verwoben. Auch räumliche Betrachtungen kommen nicht zu kurz; an den vielfältigen Zeichenbeispielen kann man schon aus rein ästhetischer Sicht seine Freude finden. Zentrale Themen sind u. a. der Satz von Desargues, die Zentralprojektion, Formverwandlungen und das Polaritätsgesetz. S. 75

¹ Arnold Bernhard: Projektive Geometrie aus der Raumanschauung zeichnend entwickelt. Verlag Freies Geistesleben 1984

Projektive Geometrie – eine Epoche in der 11. Klasse (M. Hünig):

Hier wird ein behutsamer systematischer Aufbau der ebenen projektiven Geometrie dargestellt. Räumliche Betrachtungen kommen nur vereinzelt vor. Neben dem Satz von Desargues nimmt die Frage der Dualität sowie das harmonische Teilverhältnis einen breiten Raum ein.

S. 155

Ein Weg in die projektive Geometrie (R. Rosbigalle):

In einer sehr detailliert ausgeführten Beschreibung stellt der Autor einen weiteren möglichen Weg zur Einführung in die projektive Geometrie dar. Zusammenhänge über die einzelnen Klassenstufen hinweg werden ebenso deutlich wie Beziehungen der verschiedenen geometrischen Disziplinen untereinander. Die sehr genauen methodisch-didaktischen Hinweise können vor allem dem anfangenden Lehrer eine gute Stütze sein. Mit vielen Beispielen, auch aus Schülerheften.

S. 185

Vom Verhältnis zum Doppelverhältnis (U. Hansen):

Die Metrik spielt in der projektiven Geometrie kaum eine Rolle; interessanter sind schon (Längen-)Verhältnisse. Eine unter vielen Prozessen invariante Größe ist aber das Doppelverhältnis – also das Verhältnis zweier Verhältnisse. – In diesem Beitrag wird ein Weg aufgezeigt, wie man sich (ggf. gemeinsam mit den Schülern) an ein verständnis- und gefühlsmäßiges Erfassen des Doppelverhältnisses heranarbeiten kann.

S. 216

Kugelgeometrie (K. Labudde):

Ausgehend vom Globus werden hier Grundelemente der Kugelgeometrie eingeführt und die Äquivalente zu einigen elementargeometrischen Sätzen der ebenen euklidischen Geometrie entwickelt (z. B. Winkelsumme im Dreieck). Die Besonderheiten unserer Erdoberfläche werden in dieser ausführlich kommentierten (dabei aber sehr stringenten) Einführung erkennen-, erfühl- und erlebbar.

S. 225

Von der inneren Symmetrie der Kugelgeometrie (U. Hansen):

Bei intensiverer Beschäftigung mit der Kugelgeometrie kann man einige Phänomene entdecken, die aus der ebenen Geometrie unbekannt sind. Es bietet sich ein spannendes Übungsfeld zur Vertiefung der Gesetzmäßigkeit von Pol und Polare.

S. 238

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie (P. Baum)

Die sphärische Trigonometrie unterscheidet sich von der ebenen – also auch die grundlegenden trigonometrischen Sätze. In diesem Beitrag werden mit Hilfe der Vektorrechnung die Grundformeln für die sphärische Trigonometrie hergeleitet. So bietet sich gleichzeitig ein gutes erweitertes Übungsfeld zur Vektorrechnung.

S. 242

Der Winkelkosinussatz der sphärischen Trigonometrie (P. Baum)

Einer der wichtigen Sätze der sphärischen Trigonometrie wird hier in knapper und gut mit

den Schülern gangbarer Weise hergeleitet. Eine kleine Unterrichtseinheit, die man in eine Epoche integrieren oder auch gut bei entsprechender Gelegenheit als Ergänzung zur Kugelgeometrie bearbeiten kann. S. 244

Die Konstruktion und Berechnung des Kugeldreiecks (P. Baum)

Neben der konstruktiven Bearbeitung gängiger Aufgaben aus der Kugelgeometrie – namentlich aus der Geographie und Astronomie – ist mit den heutigen Hilfen (Taschenrechner) auch die Berechnung mit vertretbarem Aufwand möglich. Ein gut gangbarer Weg dahin wird in diesem Beitrag verdeutlicht. Die hierzu notwendigen Formeln und Sätze werden in dem Beitrag in knapper Form hergeleitet – ausführlichere Darstellungen hierzu finden sich in den beiden vorangehenden Beiträgen des selben Autors. S. 246

Die Kegel-Schnitte (P. Baum)

Warum nennt man die (meist als Symmetrallinien eingeführten) Kurven 2. Grades eigentlich Kegelschnitte? In diesem Beitrag wird eine einheitliche Konstruktion von Ellipse, Parabel und Hyperbel aus dem Schnitt einer Ebene mit einem Kegel dargestellt; daran anschließend werden die Gleichungen der Kegelschnitte in Polarkoordinaten hergeleitet. S. 255

Die Projektive Erzeugung der Kegelschnitte (P. Baum)

Ausgehend von den Sätzen von Pascal und Brianchon kann man durch die projektiven Operationen Verbinden und Schneiden zur Konstruktion beliebiger Kegelschnitte kommen. Die Grundlagen hierzu und die Ausführungen in verschiedenen Situationen werden in dem Beitrag gründlich erläutert; die Methode ist durchaus auch geeignet, sie in *einem* der vielen dargestellten Fälle exemplarisch mit den Schülern zu erarbeiten. S. 258

Orthogonale Kreisbündel (P. Baum)

Ausgehend von der Lagebeziehung zweier Kreise wird ein Weg beschrieben, der zu einer nachvollziehbaren Interpretation imaginärer bzw. komplexer Elemente in der Geometrie führt. Eine ausführliche Darstellung, die über das im Unterricht unmittelbar Bearbeitbare hinaus fundiertes Hintergrundwissen und Anregungen für weitere eigene Studien bietet. S. 269

Die Erzeugung regelmäßiger Körper aus dem Tetraeder (U. Hansen)

Diese Betrachtung bietet eine Vorbereitung wesentlicher Elemente der projektiven Geometrie des Raumes, ausgehend von Konstruktionen, die in der darstellenden Geometrie häufig schon als Übungen in der 9. und 10. Klasse behandelt worden sind. Durch wiederholtes Anwenden von Durchdringung, Kern- und Hüllenbildung entstehen nicht nur die fünf platonischen Körper; auch viele halbbregelmäßige Körper lassen sich so anschaulich gewinnen. Räumliche Polaritätsgesetze werden dabei wie von selbst sichtbar. S. 278

Eine Bemerkung zum Grenzwert (U. Hansen)

Es liegt nahe, dem Umgang mit der Unendlichkeit in der Geometrie ein Erarbeiten des Grenzwertbegriffes an die Seite zu stellen. Ein anschaulicher, unkonventioneller Weg dahin wird in diesem Beitrag beschrieben. Dabei kann man sowohl im Bereich der einfacheren Beispiele bleiben und dort das Wesentliche erfahren als auch zu recht anspruchsvollen Betrachtungen vordringen. S. 290

Eine Verallgemeinerung der Folge von Fibonacci (U. Hansen)

Die Behandlung von Folgen gehört zum Stoffkanon der 10.Klasse, und niemand wird sich dort das schöne Beispiel der Fibonacci-Folge entgehen lassen. In diesem Beitrag wird das Bildeprinzip dieser Folge verallgemeinert, wodurch interessante und überraschende Entwicklungen entstehen. Es bietet sich eine schöne Möglichkeit (z. B. auch in Übstunden), das über Folgen Gearbeitete zu wiederholen und zu vertiefen. S. 301

Von der Ökonomie des Unterrichtens am Beispiel der analytischen Geometrie

Uwe Hansen

Es gehört zu den alltäglichen Erfahrungen des Lehrers, dass die Unterrichtszeit nicht ausreicht, um die einzelnen Gebiete in der nötigen Tiefe darzustellen. An einigen Beispielen soll gezeigt werden, wie durch Aufgaben, die verschiedenen Bereichen angehören, der Unterricht lebendig gestaltet werden kann und gleichzeitig das Wesentliche durch eine kurze, prägnante Darstellung deutlich gemacht werden kann.

1. Beispiel:

Durch Aufgaben aus der Abbildungsgeometrie kann die Darstellung von Punkten im kartesischen Koordinatensystem geübt werden.

Die Rechtsdrehung um den Punkt $Z(2 | 1)$ um den Winkel von 90° wird beschrieben durch

$$P(x | y) \rightarrow P'(y + 1 | -x + 3)$$

Bildet man die entstehenden Bilder fortlaufend wieder ab, so entstehen aus einem Dreieck ABC drei weitere:

$$\begin{aligned} A(3 | 2) &\rightarrow A'(3 | 0) \rightarrow A''(1 | 0) \rightarrow A'''(1 | 2) \rightarrow A \\ B(5 | 1) &\rightarrow B'(2 | -2) \rightarrow B''(-1 | 1) \rightarrow B'''(2 | 4) \rightarrow B \\ C(4 | 4) &\rightarrow C'(5 | -1) \rightarrow C''(0 | -2) \rightarrow C'''(-1 | 3) \rightarrow C \end{aligned}$$

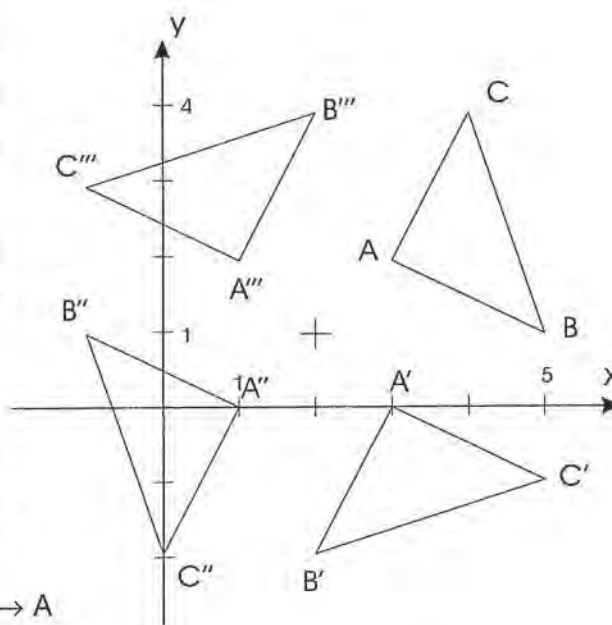


Fig. 1

Hat das Drehzentrum die Koordinaten $Z(a | b)$, so gilt für die Rechtsdrehung

$$P(x | y) \rightarrow P'(y + a - b | -x + a + b)$$

Für die Linksdrehung mit dem Winkel 90° um $Z(a | b)$ gilt:

$$P(x | y) \rightarrow P'(-y + a + b | x - a + b)$$

2. Beispiel:

Das Dreieck ABC mit $A(4 | 3)$, $B(7 | 1)$, $C(10 | 2)$ wird abgebildet durch die folgenden 7 Abbildungen:

- | | | |
|----|--|---------------------------------------|
| a) | $P(x y) \rightarrow P'(x 4 - y)$ | Spiegelung an der Geraden $y = 2$ |
| b) | $P(x y) \rightarrow P'(6 - x y)$ | Spiegelung an der Geraden $x = 3$ |
| c) | $P(x y) \rightarrow P'(y + 1 x - 1)$ | Spiegelung an der Geraden $y = x - 1$ |

- | | | |
|----|--|---|
| d) | $P(x y) \rightarrow P'(-y + 5 -x + 5)$ | Spiegelung an der Geraden $y = -x + 5$ |
| e) | $P(x y) \rightarrow P'(y + 1 -x + 5)$ | 90° -Rechtsdrehung um $Z(3 2)$ |
| f) | $P(x y) \rightarrow P'(-y + 5 x - 1)$ | 90° -Linksdrehung um $Z(3 2)$ |
| g) | $P(x y) \rightarrow P'(-x + 6 -y + 4)$ | Spiegelung an $Z(3 2)$ |

Alle Bilder sind in die selbe Zeichnung einzutragen. Es ergibt sich Figur 2.

Zusammen mit der Identität bilden diese Abbildungen eine nicht kommutative Gruppe der Ordnung 8.

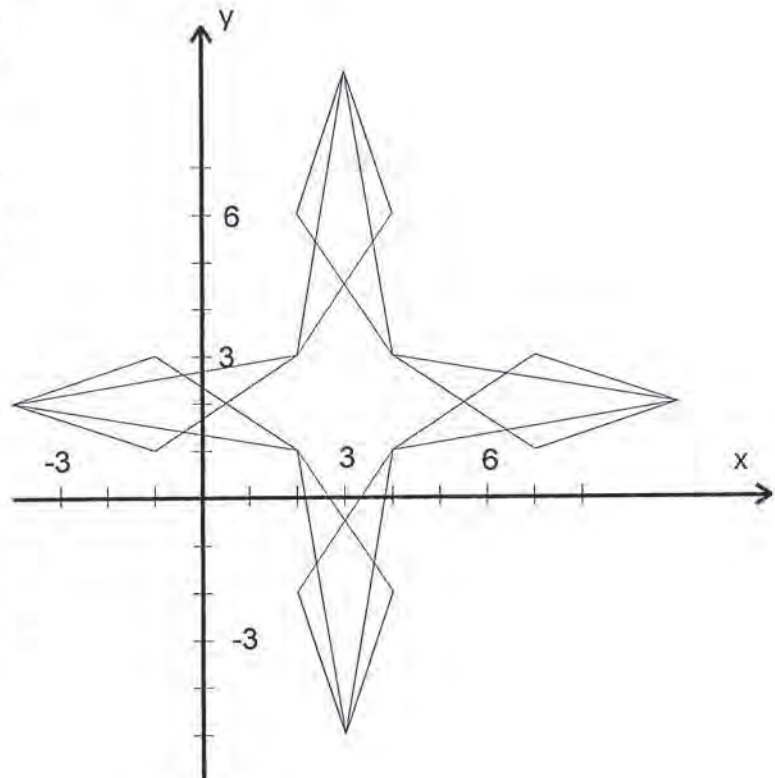


Fig. 2

3. Beispiel:

Spiegelt man einen Punkt nacheinander an zwei sich schneidenden Geraden, so erhält man eine Drehung um den Geradenschnittpunkt, wobei der Drehwinkel der doppelte Schnittwinkel ist.

Wählt man z.B. als erste Spiegelungsachse die x -Achse – der Punkt $P(x | y)$ geht über in $P'(x | -y)$ – und als zweite Spiegelungsachse die Winkelhalbierende $y = x$ – der Punkt $P(x | y)$ geht über in $P'(y | x)$ –, so erhält man eine 90° -Drehung um den Ursprung linksherum. Der Bildpunkt P'' soll dann wieder zweimal gespiegelt werden, usw.

Mit dem Anfangspunkt $P(2 | 1)$ erhält man die folgende Figur 3:

Die Spiegelungen an den Geraden $y = x + k$ lassen sich beschreiben durch

$$P(x | y) \rightarrow P'(y - k | x + k)$$

Die Spiegelungen an den Geraden $y = -x + k$ lassen sich beschreiben durch

$$P(x | y) \rightarrow P'(-y + k | -x + k)$$

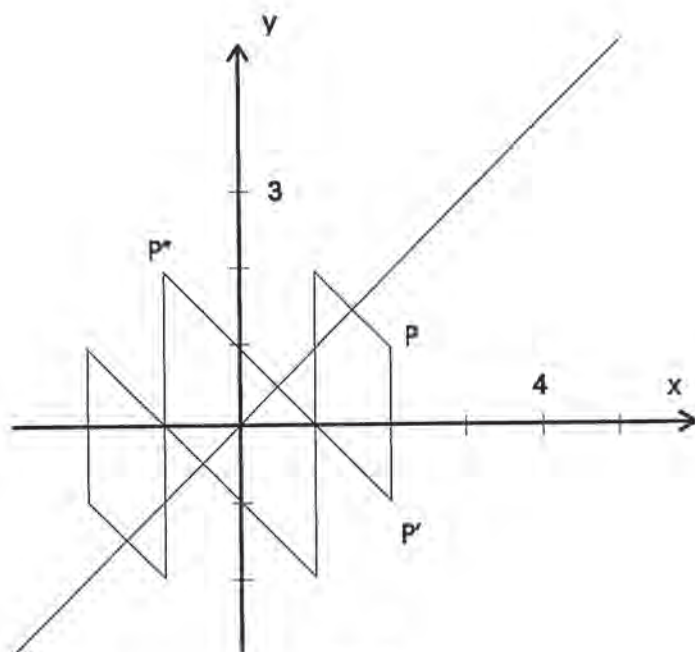


Fig. 3

4. Beispiel:

Setzt man die Spiegelung an der Geraden $y = x + 2$, die beschrieben wird durch $P(x|y) \rightarrow P'(y-2|x+2)$, zusammen mit der Spiegelung an der Geraden $y = -x - 2$, die beschrieben wird durch $P(x|y) \rightarrow P'(-y-2|-x-2)$, so erhält man eine Spiegelung am Punkt $Z(-2|0)$, die beschrieben wird durch

$$P(x|y) \rightarrow P'(-x-4|-y)$$

Allgemein gilt: Eine Punktspiegelung (oder 180°-Drehung) mit dem Zentrum $Z(a|b)$ wird beschrieben durch:

$$P(x|y) \rightarrow P'(-x+2a|-y+2b)$$

5. Beispiel

Setzt man die beiden Punktspiegelungen

$$P(x|y) \rightarrow P'(-x+4|-y-2), \text{ Zentrum } Z_1(2|-1)$$

$$P(x|y) \rightarrow P'(-x+8|-y+4), \text{ Zentrum } Z_2(4|2)$$

so erhält man die Translation $\overrightarrow{Z_1Z_2}$:

$$P(x|y) \rightarrow P'(x+2|y+3)$$

Zur Übung kann man ein einfaches Dreieck zweimal abbilden.

6. Beispiel

Setzt man die 90°-Linksdrehung um den Ursprung zusammen mit der Translation $P(x|y) \rightarrow P'(x-1|y+3)$, so erhält man die 90°-Linksdrehung um den Punkt $Z(-2|1)$.

Auch dies kann man an einigen ausgewählten Punkten bestätigen.

7. Beispiel

Setzt man eine Spiegelung und eine Translation zusammen, so erhält man eine Gleitspiegelung, auch Schrägspiegelung genannt.

Die Spiegelung an der Geraden $y = x - 1$ und die Translation $P(x | y) \rightarrow P'(x + 1 | y + 1)$ ergibt zusammen die Gleitspiegelung

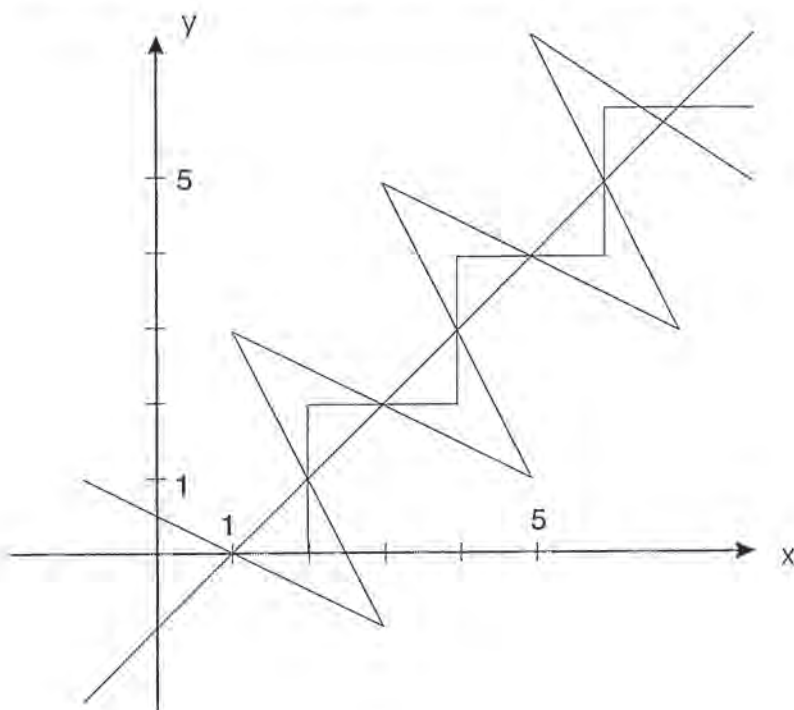
$$P(x | y) \rightarrow P'(y + 2 | x)$$

So entstehen z.B. die Folgen von Bildern (Figur 4)

$$P_1(0 | 0) \rightarrow P_2(2 | 0) \rightarrow P_3(2 | 2) \rightarrow P_4(4 | 2) \rightarrow P_5(4 | 4) \rightarrow \dots$$

$$P_1(1 | 0) \rightarrow P_2(2 | 1) \rightarrow P_3(3 | 2) \rightarrow P_4(4 | 3) \rightarrow P_5(5 | 4) \rightarrow \dots$$

$$P_1(-1 | 1) \rightarrow P_2(3 | -1) \rightarrow P_3(1 | 3) \rightarrow P_4(5 | 1) \rightarrow P_5(3 | 5) \rightarrow \dots$$



An diesen Beispielen kann dem Schüler auch deutlich werden, dass durch Zusammensetzungen von Spiegelungen die anderen Bewegungen, nämlich Drehungen (speziell Punktspiegelungen und die Translationen, als Drehungen um unendlich ferne Punkte als Schnitt paralleler Geraden) erzeugt werden können.

Fig. 4

8. Beispiel

In diesem Beispiel werden drei Punktspiegelungen nacheinander ausgeführt. Daher muss nach sechs Punktspiegelungen wieder der Anfangspunkt erreicht werden; das ist für den Schüler eine gute Rechenkontrolle.

Die drei Abbildungen sind gegeben durch

$$A_1 : P(x | y) \rightarrow P'(2 - x | 4 - y), \text{ Zentrum } (1 | 2)$$

$$A_2 : P(x | y) \rightarrow P'(-x | -y), \text{ Zentrum } (0 | 0)$$

$$A_3 : P(x | y) \rightarrow P'(-2 - x | 4 - y), \text{ Zentrum } (-1 | 2)$$

In der Figur 5 wurden die beiden Anfangspunkte $P_1(0 | 3)$ und $P_2(3,5 | 4)$ gewählt.

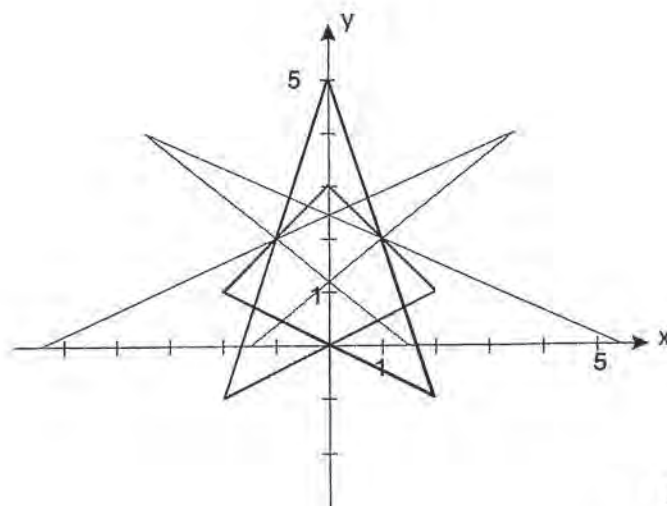


Fig. 5

9. Beispiel

Durch die Abbildung $P(x|y) \rightarrow P'(\frac{12-x}{2} | \frac{6-y}{2})$ wird der Punkt P an dem Fixpunkt $F(4|2)$ gespiegelt, aber so, dass der Bildpunkt P' nur halb so weit entfernt ist von F wie der Punkt P . Dadurch entsteht eine unendliche Folge von Punkten mit dem Grenzpunkt F .

Der Anfangspunkt $P_0(0|6)$ erzeugt die Folge

$$P_0(0|6) \rightarrow P_1(6|0) \rightarrow P_2(3|3) \rightarrow P_3(\frac{9}{2} | \frac{3}{2}) \rightarrow P_4(\frac{15}{4} | \frac{9}{4}) \rightarrow \dots$$

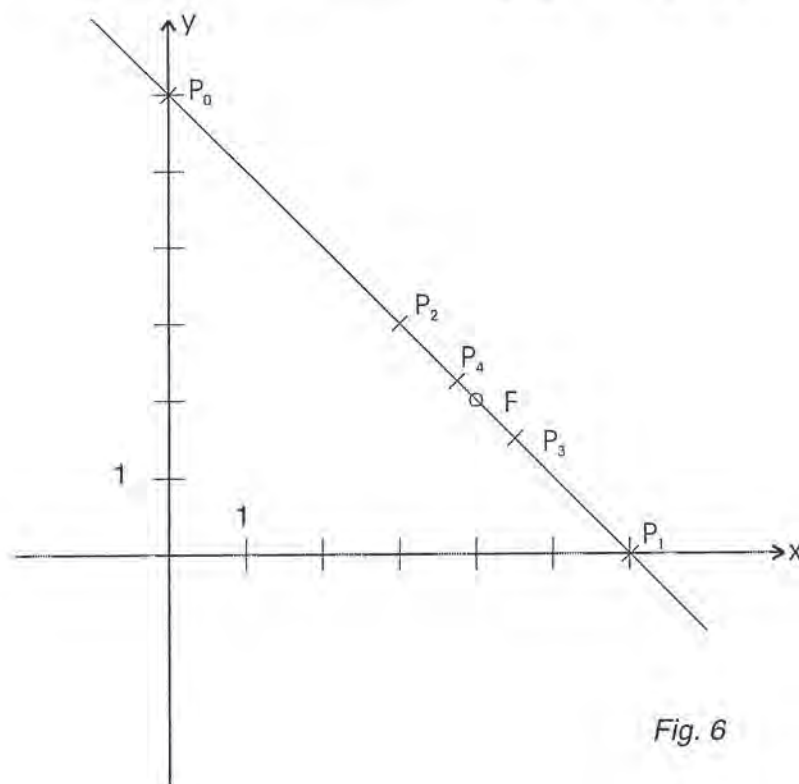


Fig. 6

also

$$x_n = 4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y_n = 2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Der Punkt F teilt die Strecke P_0P_1 im Verhältnis $2:1$. Dass der Grenzpunkt dieses Verhältnisses erzeugt, ist unmittelbar einleuchtend:

Bei dieser Abbildung ist P_{n+1} stets Mittelpunkt der Strecke $P_{n-1}P_n$. Daher ist P_0P_2 doppelt so lang wie P_1P_3 , P_2P_4 doppelt so lang wie P_3P_5 . Da also die „links“ von F liegenden Strecken $P_{2n}P_{2n+2}$ doppelt so

lang wie die folgenden „rechts“ von F liegenden Strecken $P_{2n+1}P_{2n+3}$ sind, muss auch für den Grenzpunkt F gelten: P_0F ist doppelt so lang wie FP_1 .

10. Beispiel

Die Abbildung

$$P(x|y) \rightarrow P'\left(\frac{1-x}{2} \mid \frac{1+y}{2}\right)$$

zeigt eine sehr ähnliche Gesetzmäßigkeit. Es handelt sich um eine „gestauchte Schrägspiegelung“ an der Geraden $x = \frac{1}{3}$.

Mit dem Anfangspunkt $P_0(0|0)$ erhält man die unendliche Folge

$$x_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Der Grenzpunkt ist $F\left(\frac{1}{3} \mid 1\right)$.

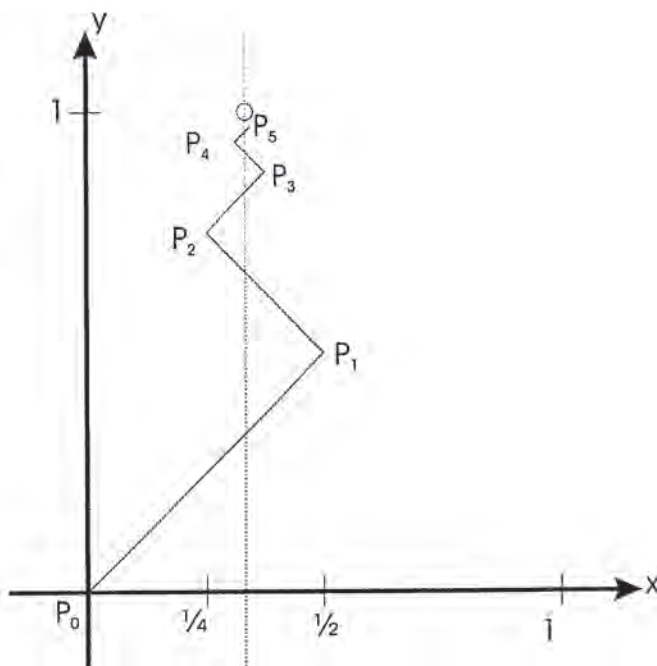


Fig. 7

11. Beispiel

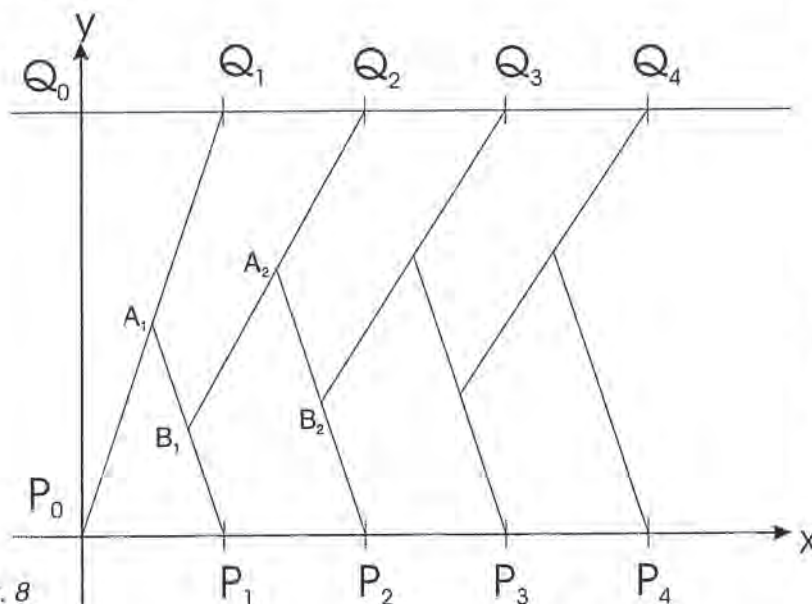


Fig. 8

Gegeben seien zwei Punktreihen

$$P_n(n \geq 0), Q_n(n \geq 1), n \in \mathbb{N}$$

A_1 ist Mittelpunkt von P_0Q_1 , B_1 ist Mittelpunkt von A_1P_1

A_2 ist Mittelpunkt von B_1Q_2 , B_2 ist Mittelpunkt von A_2P_2

A_n ist Mittelpunkt von

$B_{n-1}Q_n$, B_n ist Mittelpunkt von A_nP_n .

Die y-Werte der Punkte A_n, B_n wachsen monoton. Welche Grenzwerte haben sie?

Sei s der y-Grenzwert der Punktfolge B_n . Für s muss gelten:

$$\frac{s+1}{2} : 2 = s$$

Es folgt $s = \frac{1}{3}$. Die beiden gesuchten Grenzwerte sind also $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Dies zeigt auch die folgende Gleichung. Wenn $B_n (x_n | y_n)$ so gilt

$$y_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

Die Grenzpunkte der Folgen A_n, B_n liegen auf der Grenzgeraden der Ebene. Will man dies vermeiden, so kann man diese Aufgabe in der folgenden Form stellen:

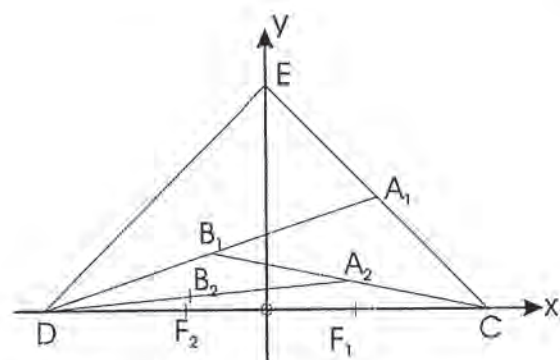


Fig. 9

Gegeben sind die drei Punkte $C(1|0)$, $D(-1|0)$, $E(0|1)$. Durch fortgesetzte Mittelpunktsbildung erhält man die Punktfolgen A_n, B_n .

Die beiden Grenzpunkte haben jetzt die Koordinaten

$$F_1(\frac{1}{3}|0), F_2(-\frac{1}{3}|0)$$

12. Beispiel

Auch dieses Beispiel zeigt, wie man durch fortgesetzte Mittelpunktsbildung – hier zyklisch – zu vier Punktfolgen kommt, die zu vier Grenzpunkten konvergieren.

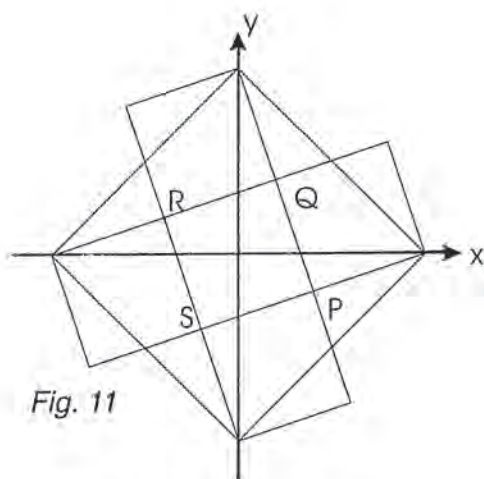


Fig. 11

Gegeben sind die vier Punkte $A(5|0)$, $B(0|5)$, $C(-5|0)$, $D(0|-5)$.

P_1 sei Mittelpunkt von OA
 Q_1 sei Mittelpunkt von P_1B
 R_1 sei Mittelpunkt von Q_1C
 S_1 sei Mittelpunkt von R_1D

P_2 sei Mittelpunkt von S_1A

Q_2 sei Mittelpunkt von P_2B usw.

Diese vier Punktfolgen P_n, Q_n, R_n, S_n konvergieren gegen ein Quadrat $P(2|-1)$, $Q(1|2)$, $R(-2|1)$, $S(-1|-2)$. – Es ist leicht zu zeigen, dass der Flächeninhalt dieses Quadrates ein Fünftel vom Inhalt des Quadrates $ABCD$ ist (Figur 11). Dieses Grenzquadrat ist unabhängig vom gewählten Anfangspunkt; hier der Punkt $O(0|0)$.

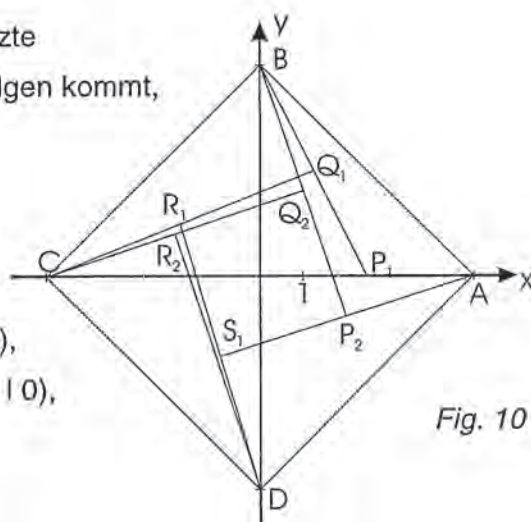


Fig. 10

13. Beispiel

Dieses Beispiel ist eine ähnliche Aufgabe;
das Quadrat wird ersetzt durch das Dreieck

$T(7 | 0)$, $R(0 | 14)$, $S(-7 | 0)$.

A_1 sei ein beliebiger Punkt

B_1 ist Mittelpunkt von A_1R

C_1 ist Mittelpunkt von B_1S

A_2 ist Mittelpunkt von C_1T

B_2 ist Mittelpunkt von A_2R usw.

Die Punkte A_n konvergieren dann gegen den
Grenzpunkt $A(2 | 2)$,

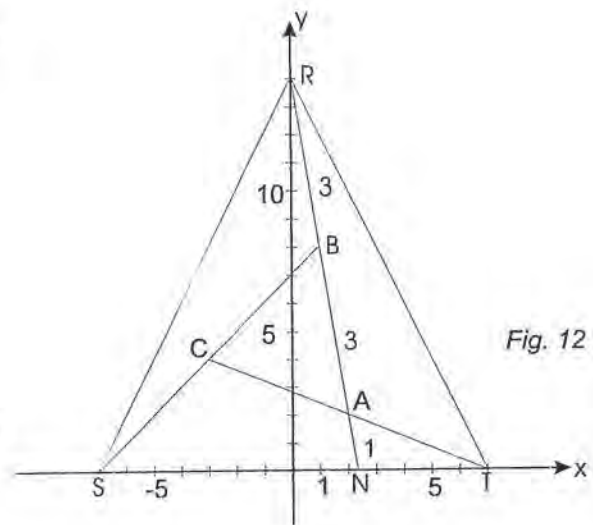
die Punkte B_n gegen $B(1 | 8)$,

die Punkte C_n gegen $C(-3 | 4)$

Auch diese Figur 12 zeigt interessante Zahlenverhältnisse:

$NA : AB : BR = 1 : 3 : 3$

$SN : NT = 2 : 1$



14. Beispiel

Dieses Beispiel soll zeigen, wie die Mittelpunktsbil-
dung ersetzt werden kann durch die Bestimmung
des Schwerpunktes.

Gegeben sind die vier Punkte

$A(5 | -5)$, $B(5 | 5)$, $C(-5 | 5)$, $D(-5 | -5)$.

T sei ein beliebiger Punkt, z.B. der Ursprung.

P_1 ist Schwerpunkt von $\triangle TAB$

Q_1 ist Schwerpunkt von $\triangle P_1BC$

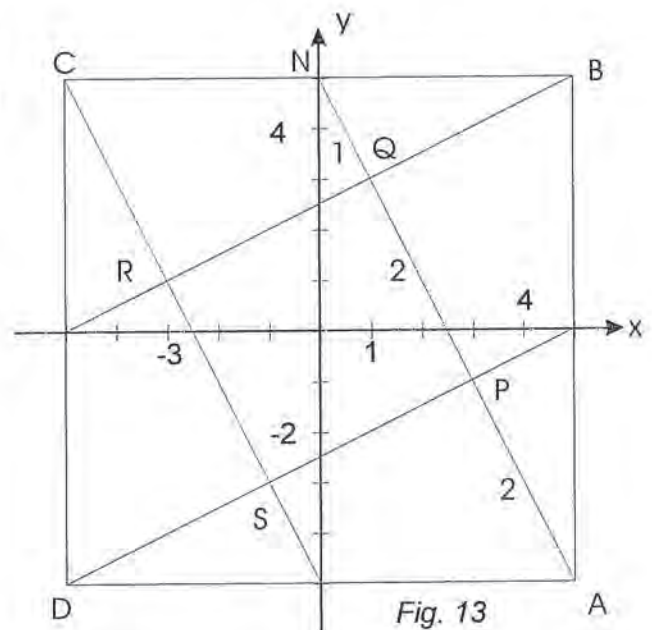
R_1 ist Schwerpunkt von $\triangle Q_1CD$

S_1 ist Schwerpunkt von $\triangle R_1DA$

P_2 ist Schwerpunkt von $\triangle S_1AB$

Q_2 ist Schwerpunkt von $\triangle P_2BC$

usw.



Diese vier Punktfolgen P_n , Q_n , R_n , S_n konvergieren dann gegen das Grenzquadrat mit den
Koordinaten $P(3 | -1)$, $Q(1 | 3)$, $R(-3 | 1)$, $S(-1 | -3)$. Es ist dasselbe Quadrat wie in Bei-
spiel 12. Dieses gilt, da z.B. die Strecke AN durch P und Q im Verhältnis $2 : 2 : 1$ geteilt wird.

15. Beispiel

Die Abbildung

$$P(x|y) \rightarrow P'\left(\frac{5+y}{2} \mid \frac{15-x}{2}\right)$$

erzeugt bei wiederholter Anwendung spiralförmige Streckenzüge. In Figur 14 wurden die vier Anfangspunkte A_0 ($-3 \mid -3$), B_0 ($3 \mid -3$), C_0 ($13 \mid 13$), D_0 ($7 \mid 13$) gewählt. Diese Streckenzüge haben den Grenzpunkt G ($5 \mid 5$). Es ist der Fixpunkt der Abbildung.

Im Zusammenhang mit Aufgaben dieser Art entstehen die interessanten Fragen:

Wie konstruiert man diese Streckenzüge? Wie verkürzen sich die Teilstrecken?

Kann man die Grenzpunkte konstruieren? Gibt es eine Gesamtlänge des Streckenzuges? Gibt es eine Gleichung der Spirale, die durch die Ecken eines Streckenzuges geht?

Kann man überhaupt von einem Grenzpunkt sprechen, wenn er nie erreicht werden kann?

Diese Fragen führen oft zu Diskussionen, die mit großer Intensität geführt werden.

Spiegelt man die Punkte einer Ebene an einer Geraden, so ist diese Gerade Fixpunktgerade, und alle Geraden, die auf ihr senkrecht stehen – sie sind untereinander parallel, schneiden sich also in einem Punkt der Grenzgeraden der Ebene – sind Fixgeraden.

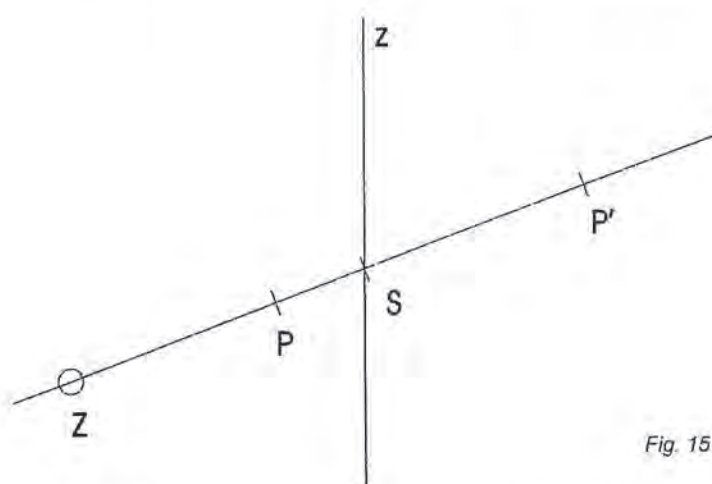


Fig. 15

Spiegelt man dagegen die Ebenenpunkte an einem festen Punkt, so sind alle Geraden dieses Punktes Fixgeraden, während die Punkte der Grenzgeraden Fixpunkte sind, d.h. die Grenzgerade der Ebene ist Fixpunktgerade.

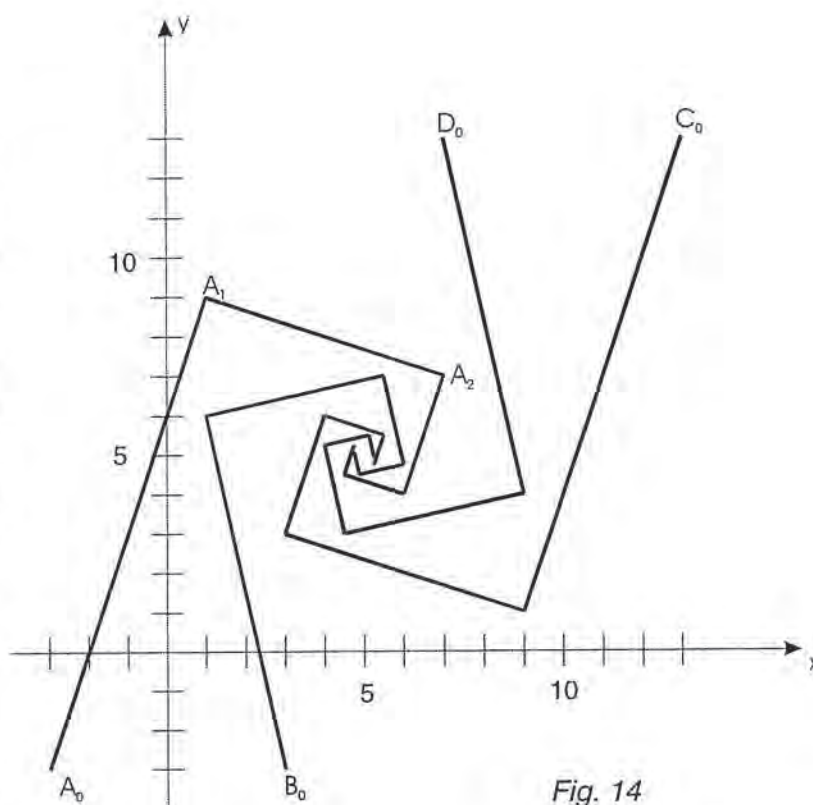


Fig. 14

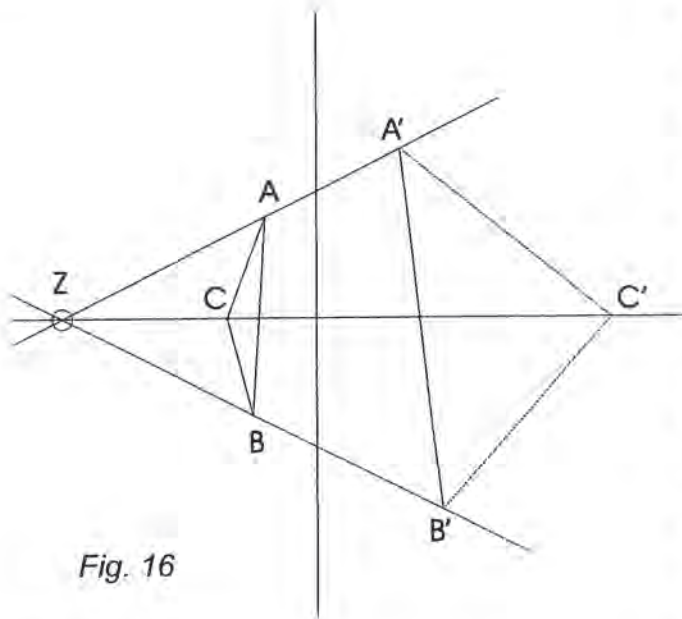


Fig. 16

Bei einer üblichen Spiegelung liegen also bestimmende Elemente im Unendlichen.

Bei einer allgemeinen harmonischen Spiegelung kann die Achse, d.h. die Fixpunktgerade, und das Zentrum, d.h. der Schnittpunkt der Fixgeraden, im Endlichen liegen.

Um das Bild P' von P zu bestimmen, schneidet man die Gerade PZ (Z ist das Zentrum) mit der Achse z – der Schnittpunkt sei S (Figur 15). P' ist dann der vierte harmonische Punkt,

d.h. $ZS \cdot PP'$ trennen sich harmonisch.

Das Bild eines Dreiecks ist dem ursprünglichen Dreieck nicht mehr ähnlich. Sie sind perspektiv zueinander im Sinne des Satzes von Desargues (Figur 16).

16. Beispiel

Die Abbildung $P(x | y) \rightarrow P'(\frac{1}{x} | \frac{y}{x})$ ist eine harmonische Spiegelung. $A(-1 | 0)$ ist das Zentrum, und die Gerade $x = 1$ ist die Achse.

Diese Abbildung stülpt den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ in die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ um.

Der Kreis $x^2 - x + y^2 = 0$ wird abgebildet auf die Parabel $y^2 = x - 1$ (Figur 17).

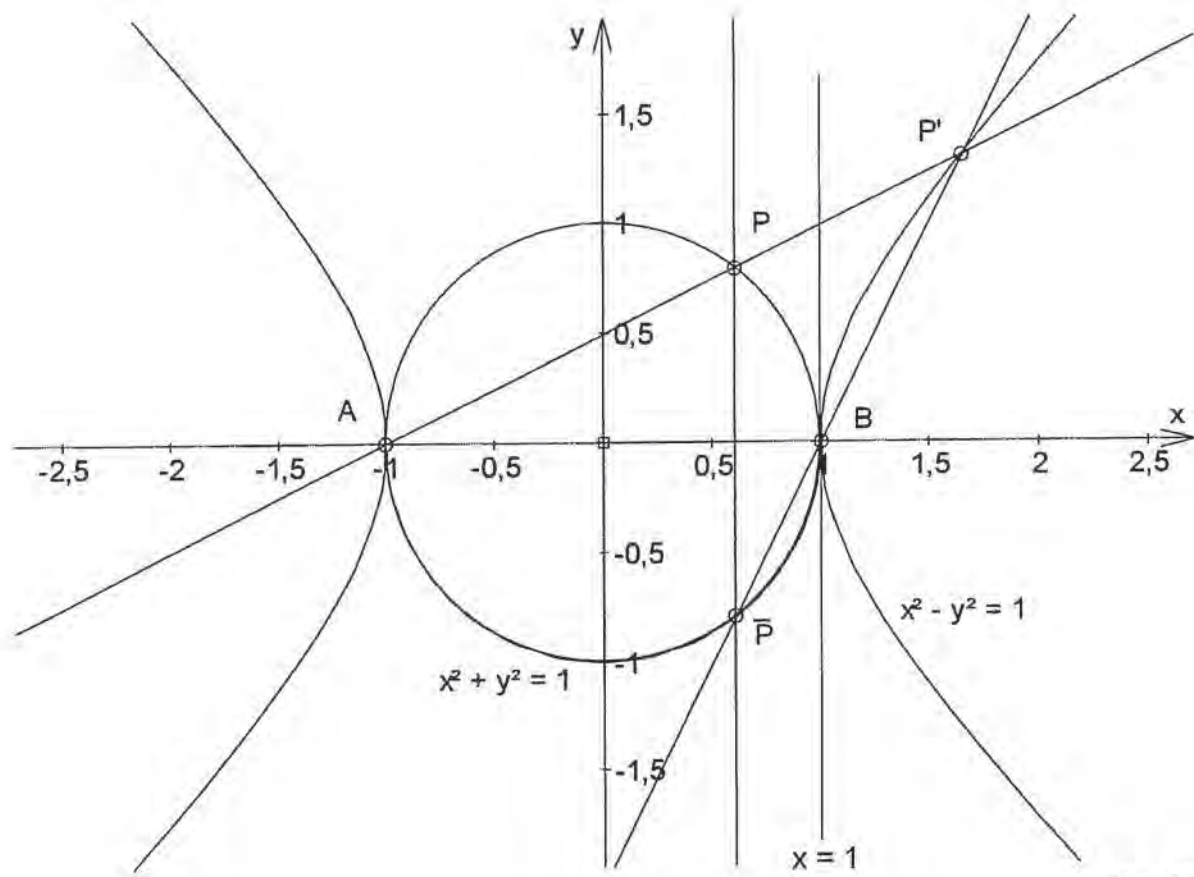


Fig. 17

Durch dieses letzte Beispiel soll das Interesse an projektiven Gesichtspunkten geweckt werden.

Einführung in die analytische Geometrie – ein Epochenbeginn

Karl-Friedrich Georg

Bei der Einführung in die analytische Geometrie wird ihre Zielsetzung in etwa so beschreiben, dass bestimmte geometrische Fragen in möglichst sinnvoller, einfacher und umfassender Weise der rechnerischen Behandlung zugänglich gemacht werden sollen. Dazu wird man mit der klassischen Koordinatenmethode beginnen, der traditionelle Aufbau behandelt zuerst die Geometrie der linearen Gebilde (lineare Algebra), um dann später mit der Geometrie der Gebilde 2. Ordnung fortzusetzen. Das hängt auch mit der Steigerung der algebraischen Anforderungen zusammen. – Die Lehrpläne der Kultusministerien beinhalten heute unter „analytischer Geometrie“ in wesentlichen die „lineare Algebra“ und als nichtebene Gebilde bestenfalls die Kugel. Damit ist im Vergleich zu der Behandlung von Kegelschnitten eine starke Reduzierung auf formalen algebraischen Umgang zu Lasten eines anschaulichen geometrischen Tuns verbunden. die Fähigkeiten des praktischen Konstruierens werden nicht mehr ausgebildet.

Wenn die analytische Geometrie im Lehrplan der 11. Klasse der Waldorfschule bis zu den Kegelschnitten vorgesehen ist, so baut sie auf vielfältige Erfahrungen der Schüler mit diesen Kurven auf: In der 9. Klasse wurden die Kegelschnitte als Ortskurven kennen gelernt und konstruiert und in der Darstellenden Geometrie der 10. Klasse als Schnittlinien von Kegel und Ebene konstruiert. Der nun folgende Schritt in der 11. Klasse zeigt dann, dass diese bekannten Kurven auch algebraisch erfasst werden können: eine Gleichung im Zusammenhang mit einem Koordinatensystem stellt eine Kurve dar oder umgekehrt, die Ortsdefinition einer Kurve führt zu ihrer charakteristischen Gleichung. Dabei ist man sich bewusst, dass das Grundlegende ein geometrischer Inhalt ist.

Ein Einstieg in diese Epoche, die diesen wechselseitigen Bezug von Gleichung und Kurve deutlich macht – ohne dass man sich erst lange nur mit Strecken, Geradengleichungen, Teilverhältnissen ... beschäftigt – kann in der folgend ausgeführten Art durchgeführt werden. Zwei Motive dazu sind: erstens wird vom Schüler der unmittelbare Zusammenhang von Gleichung und zugehöriger Form (Kurve) erlebt – die Kurven sind entweder schon bekannt oder werden zusätzlich konstruiert –, zweitens ist zum Aufstellen der Wertetabellen eine Übung im praktischen Umgang mit dem Taschenrechner gegeben.

Eine Fortführung des Studiums der Kurven kann dann in der 12. Klasse in der freien Geometrie ebener Kurven gemacht werden.

Die folgende Ausführung entspricht dem Beginn der Epoche.

Im weiteren Verlauf der Epoche werden zum Thema Strecke und Geraden die Bereiche gewählt, die dann die Grundlage bilden, um Herleitungen und Aufgaben bei den Kegelschnitten Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel bewältigen zu können. Erreicht der Schüler / die Schülerin bei den Themen zum Kreis (z. B. Pol-Polare) eine Sicherheit im rechnerischen Umgang,

dann braucht man bei den anderen Kurven relativ weniger Zeit. Wenn das konstruktive Element nicht zu kurz kommen soll, ist schon eine Epochenlänge von vier Wochen nötig.

Einführung

Für die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ gibt es unendlich viele Zahlenpaare (x, y) , die sie erfüllen. Um einige zu berechnen, haben wir diese Gleichung nach y aufgelöst und dann eine Tabelle angefertigt:

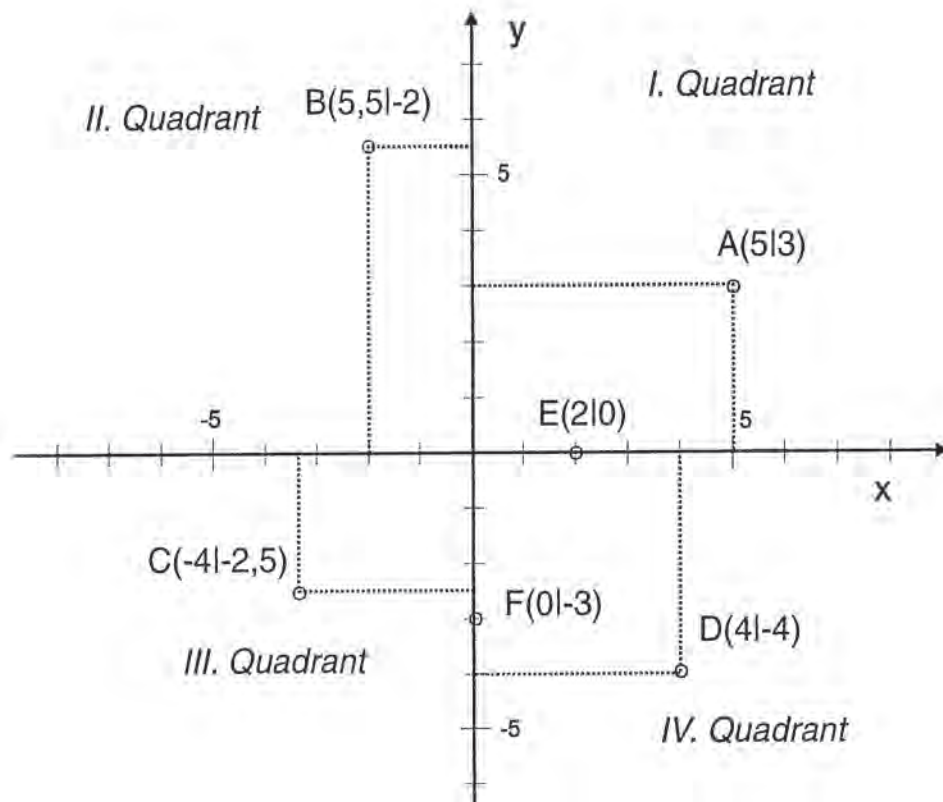
$$y^2 = 25 - x^2; \quad y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

x	3	3	4	0	5	-3	-4	1	2	-1	-2
y	4	-4	±3	±5	0	±4	±3	±4,90	±4,58	±4,90	±4,58

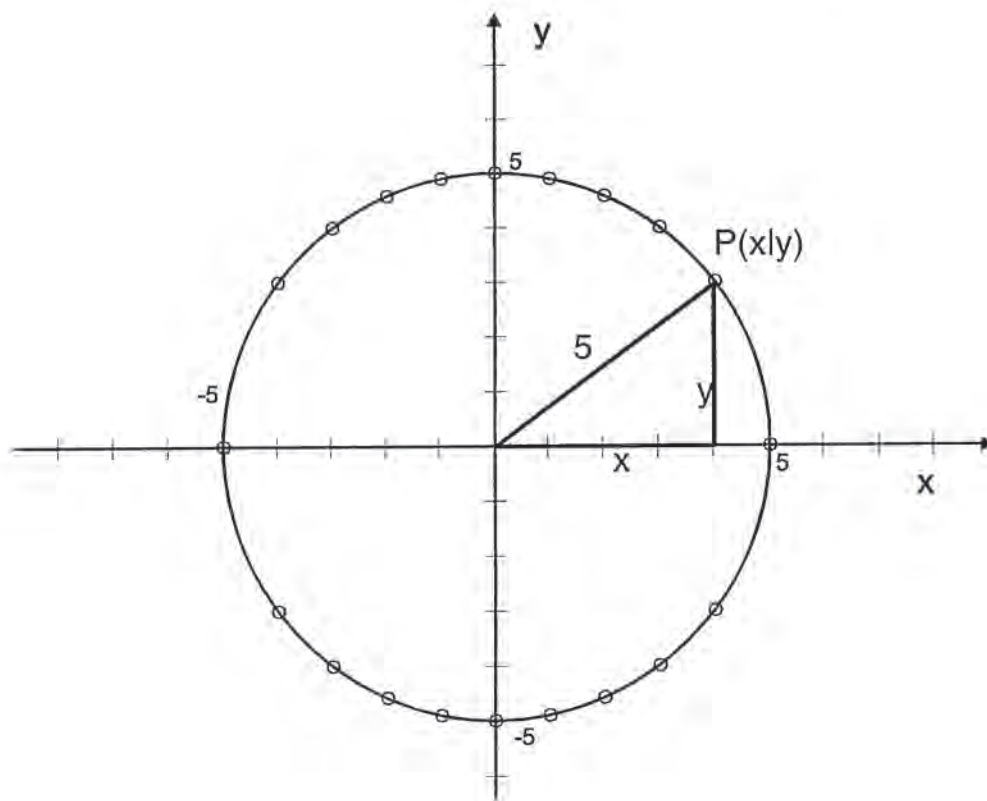
Durch die Zahlenpaare wird deutlich, dass diese Gleichung eine bestimmte Beziehung zwischen den Unbekannten x und y vermittelt. Beide Unbekannte können verschiedene Werte annehmen, aber nicht willkürlich, sondern voneinander abhängig. Man nennt in solchen Gleichungen daher x und y **Variable** und die Gleichung **Beziehungsgleichung**.

In einem Koordinatenkreuz können wir jedes Zahlenpaar (x, y) als einen Punkt veranschaulichen. Die waagrechte Achse ist die x -Achse, die senkrechte die y -Achse (siehe unten). Der Schnittpunkt beider Achsen ist der Nullpunkt oder Ursprung.

Man nennt x die Abszisse, y die Ordinate des Punktes P . Jedes zugeordnete Zahlenpaar (x, y) repräsentiert also einen Punkt $P(x | y)$; x und y nennt man die „Koordinaten des Punktes P “. Das Kreuz senkrecht aufeinanderstehender Achsen nennt man auch ein kartesisches Koordinatensystem, nach einem der beiden Begründer der analytische Geometrie, René Descartes, genannt Cartesius (1596 - 1650). Die Koordinaten des Punktes P kann man auch als Strecken auf den Koordinatenachsen oder auf Parallelen dazu veranschaulichen.



Wir tragen nun die Zahlenpaare unserer Tabelle als Punkte in das Koordinatenkreuz ein:



Da bei jedem Punkt x und y die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden und die Hypotenuse konstant 5 bleibt, liegen alle Punkte auf einem Kreis um den Ursprung. Die Gleichung $y = \sqrt{25 - x^2}$ ist nur dann sinnvoll, wenn $25 - x^2 \geq 0$ ist, d. h. $25 \geq x^2$.

Dies ist nur dann gewährleistet, wenn $x \leq 5$ und auch $x \geq -5$ ist, also: $-5 \leq x \leq 5$.

In der analytischen Geometrie der Ebene haben wir es mit Gleichungen zu tun, in denen zwei Variable x und y vorkommen. Die Menge aller Lösungen (x, y) solcher Gleichungen stellt die Menge aller Punkte $P(x | y)$ von geraden Linien oder Kurven dar. Dementsprechend gibt es zwei Grundaufgaben:

1. Die Bestimmung der geometrischen Eigenschaften einer Linie, die durch eine Gleichung gegeben ist,
2. die Aufstellung der Gleichung einer Linie, ausgehend von deren geometrischen Eigenschaften.

Unser Einführungsbeispiel ist ein Beispiel für die erste Grundaufgabe.

Weitere Beispiele:

1. Beispiel: $16x - 3y^2 = 0$; die Gleichung lautet nach y aufgelöst: $y = \pm \frac{4}{3}\sqrt{3x}$.

Für x setzen wir einige geeignete Werte ein und tragen die Lösungen in eine Tabelle ein:

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{16}{3}$	$\frac{25}{3}$	12
y	0	$\pm \frac{4}{3}$	$\pm \frac{8}{3}$	± 4	$\pm \frac{16}{3}$	$\pm \frac{20}{3}$	± 8

Die sich ergebende Kurve könnte eine Parabel sein (siehe Seite 25).

Aus der Gleichung entnehmen wir Folgendes:

Es gibt keine Punkte mit negativer Abszisse, die in der Kurve liegen. Zu jedem positiven x -Wert gibt es zwei verschiedene y -Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die Kurve ist also symmetrisch bezüglich der x -Achse. Mit zunehmendem x wächst auch der Betrag von y , somit entfernt sich die Kurve dann auch immer mehr von der x -Achse.

2. Beispiel: $x^2 - y^2 = 4$; nach y aufgelöst ergibt sich: $y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$.

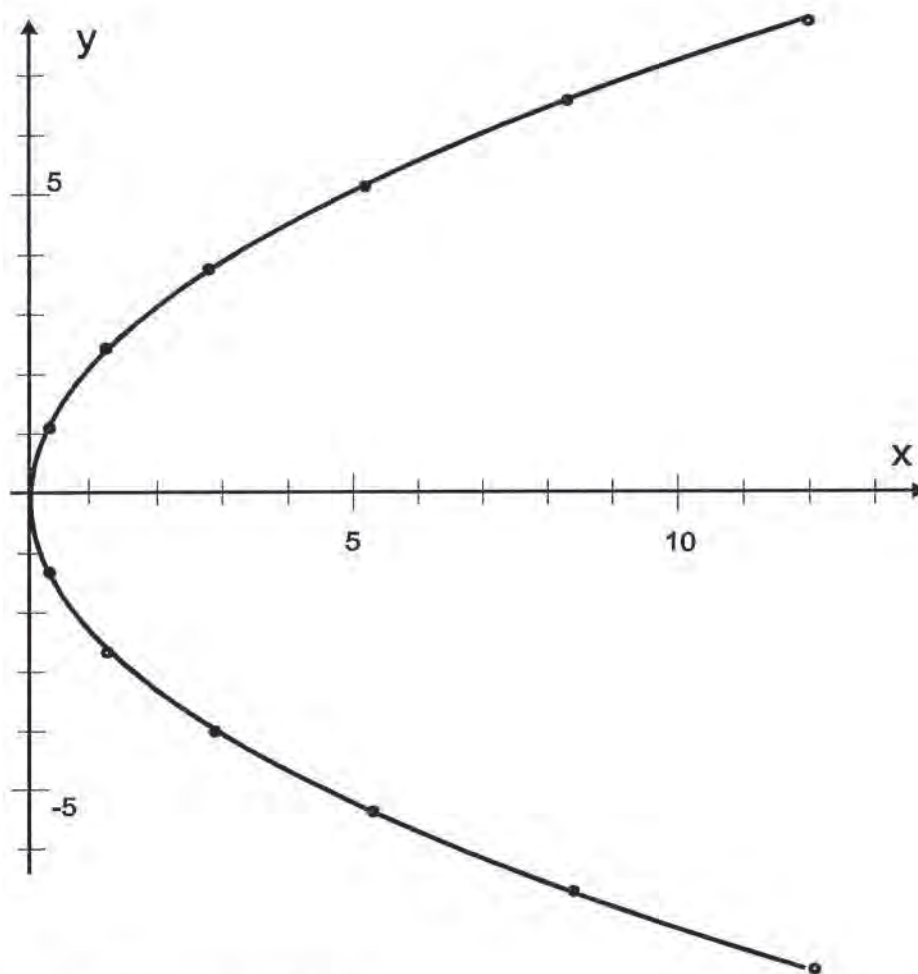
Auch hier stellen wir eine Tabelle mit Beispielen von Lösungspaaren auf:

x	± 2	$\pm 2,5$	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7
y	0	$\pm 1,50$	$\pm 2,24$	$\pm 3,64$	$\pm 4,58$	$\pm 5,66$	$\pm 6,71$

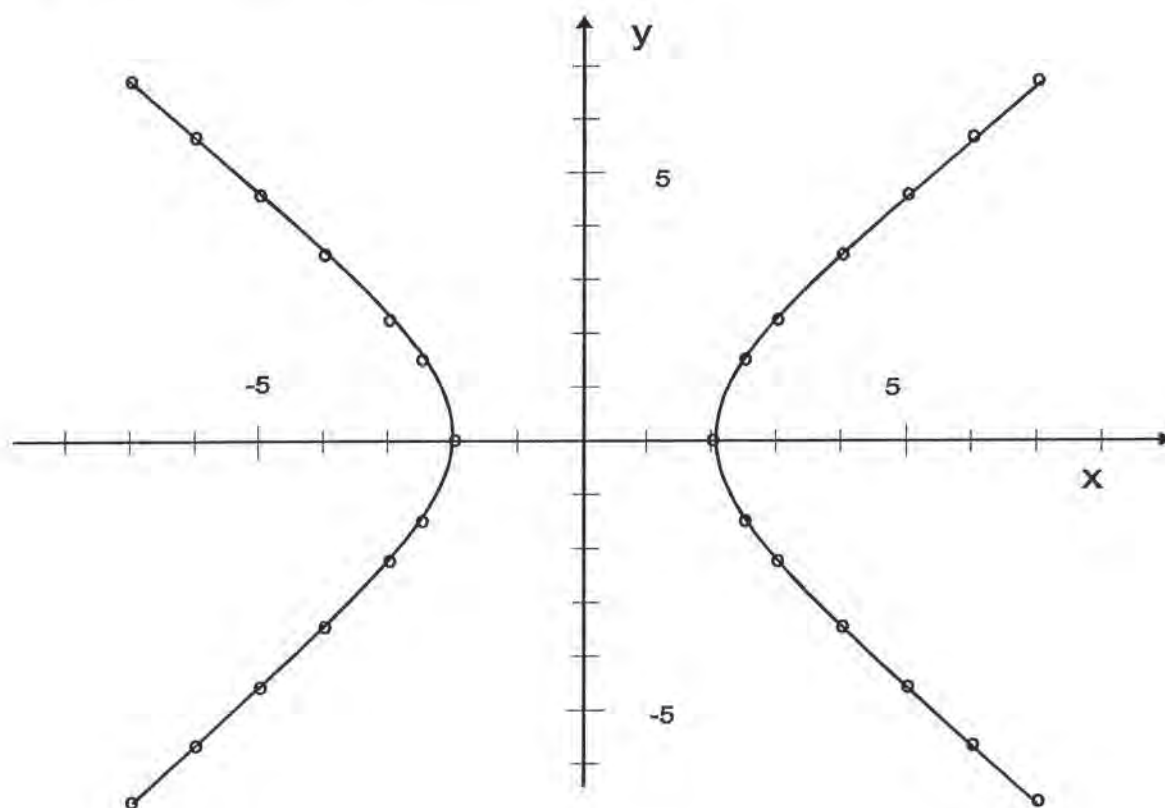
..... und tragen die Zahlenpaare als Punkte ein (siehe Seite 25).

Bei diesem Beispiel ergibt sich eine Kurve, die eine Hyperbel sein könnte. Aus der Gleichung entnehmen wir: Es gibt keine Punkte für $-2 < x < 2$, die auf der Kurve liegen.

Auch hier gibt es zu jedem vorhandenen x -Wert zwei verschiedene y -Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die Kurve ist also symmetrisch bezüglich der x -Achse. Da außerdem für die positiven und negativen x -Werte sich jeweils dieselben zwei y -Werte ergeben, ist die Kurve auch noch symmetrisch zur y -Achse.



zu den Beispielen 1 (oben) und 2 (unten)



3. Beispiel: $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$; wir lösen die Gleichung nach y auf:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 50x^2 - 50y^2;$$

$$y^4 + 2(x^2 + 25)y^2 + x^4 - 50x^2 = 0; \text{ mit } y^2 = z \text{ folgt:}$$

$$z^2 + 2(x^2 + 25)z + x^4 - 50x^2 = 0;$$

$$z_{1,2} = -(x^2 + 25) \pm \sqrt{(x^2 + 25)^2 - (x^4 - 50x^2)};$$

$$z_{1,2} = -(x^2 + 25) \pm \sqrt{x^4 + 50x^2 + 625 - x^4 + 50x^2};$$

$$z_{1,2} = -(x^2 + 25) \pm \sqrt{25(4x^2 + 25)}; \text{ wegen } z = y^2:$$

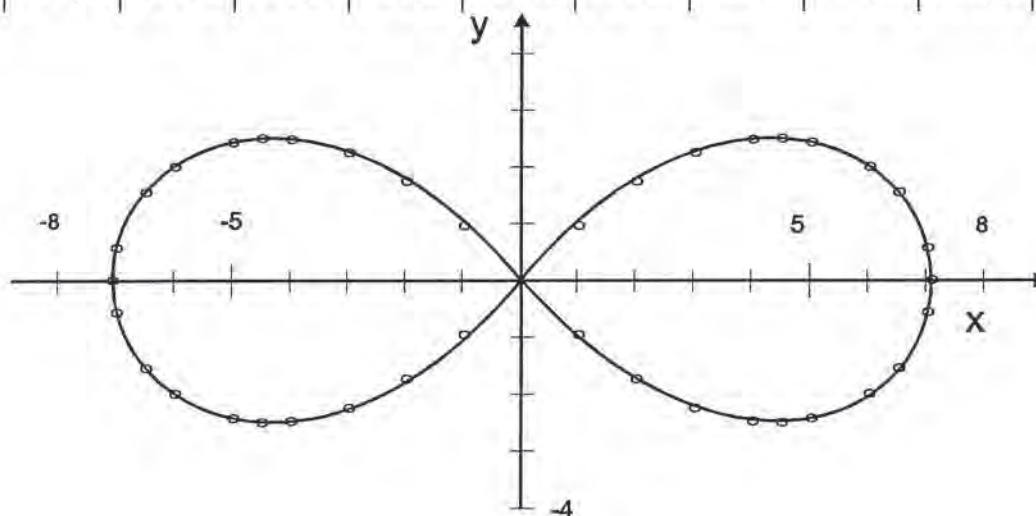
$$y^2_{1,2} = 5\sqrt{4x^2 + 25} - (x^2 + 25);$$

Da y^2 positiv sein muss, ist das Minuszeichen vor der Wurzel nicht möglich. Wir erhalten nun für y:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{5\sqrt{4x^2 + 25} - x^2 - 25}.$$

Wertetabelle:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 4,5	± 5	± 6	± 6,5	± 7	± √50
y	0	± 0,96	± 1,74	± 2,25	± 2,48	± 2,50	± 2,43	± 2,00	± 1,55	± 0,57	0



Bei diesem Beispiel ergibt sich eine Kurve, die eine **Lemniskate** darstellt. In der 9. Klasse haben wir sie durch Konstruktion als eine der Cassinischen Kurven kennengelernt. Der Gleichung bzw. den Lösungsmengen entnehmen wir, dass die Kurve symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen sein muss. Wir erkennen aus der Zeichnung, dass diese geschlossene Kurve nur innerhalb bestimmter x- und y-Werte existiert. Durch Berechnung finden wir die x-Grenzen für $y = 0$: $-5\sqrt{2} \leq x \leq 5\sqrt{2}$.

Der Zeichnung entnehmen wir: $-\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$.

Nur für diese x- bzw. y-Werte existieren Kurvenpunkte.

4. **Beispiel:** $y^2 = x^2 \cdot \frac{5+x}{5-x}$ bzw. $y = \pm x \cdot \sqrt{\frac{5+x}{5-x}}$

Aus der Gleichung entnehmen wir, dass die Kurve symmetrisch zur x-Achse ist und dass durch die Wurzel nicht alle y-Werte möglich sind. Um y-Werte zu erhalten, darf der Radikand (Wurzelninhalt) nicht negativ werden. Dies wird erreicht, wenn Zähler und Nenner beide positiv oder beide negativ sind. Also:

1. Fall: $5+x \geq 0$ und $5-x > 0$
 $x \geq -5$ und $5 > x$
 $-5 \leq x < 5$

2. Fall: $5+x \leq 0$ und $5-x < 0$
 $x \leq -5$ $5 < x$
Widerspruch!

Ergebnis: Es gibt nur Kurvenpunkte, wenn $-5 \leq x \leq 5$ ist.

Tabelle:

x	-5	-4,5	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	3	3,5
y	0	$\pm 1,03$	$\pm 1,33$	$\pm 1,50$	$\pm 1,31$	$\pm 0,82$	0	$\pm 1,22$	$\pm 3,06$	$\pm 3,00$	$\pm 8,33$

Die entstehende Kurve ist eine **Strophoide**. Sie kann auch durch eine Konstruktion sehr einfach gewonnen werden (siehe die beiden Zeichnungen auf der nächsten Seite).

5. **Beispiel:** $(x-5)^2 \cdot (x^2 + y^2) = 25x^2$

Diese Gleichung wird nach y entwickelt:

$$x^2 + y^2 = \frac{25x^2}{(x-5)^2}; \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 \cdot \left(\frac{25}{(x-5)^2} - 1 \right) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 \cdot \frac{25 - (x-5)^2}{(x-5)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{x^2}{(x-5)^2} (10x - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \pm \frac{x}{x-5} \cdot \sqrt{10x - x^2};$$

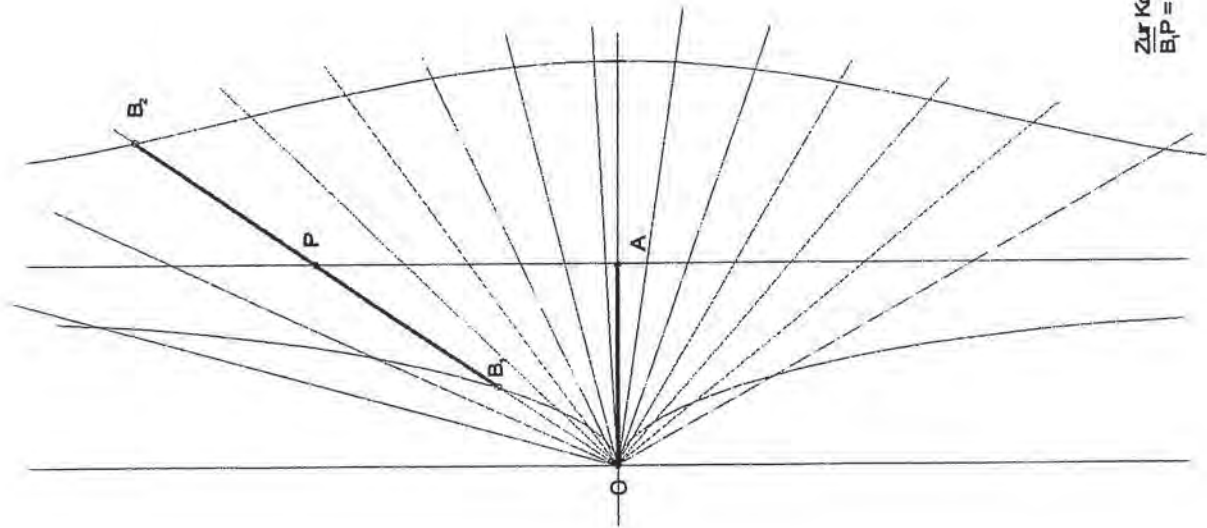
Wir erkennen aus der Gleichung, dass es für $x < 0$ keine y-Werte gibt, für $x = 5$ wird y unendlich groß und auch für $x > 10$ gibt es keine y-Werte.

Tabelle:

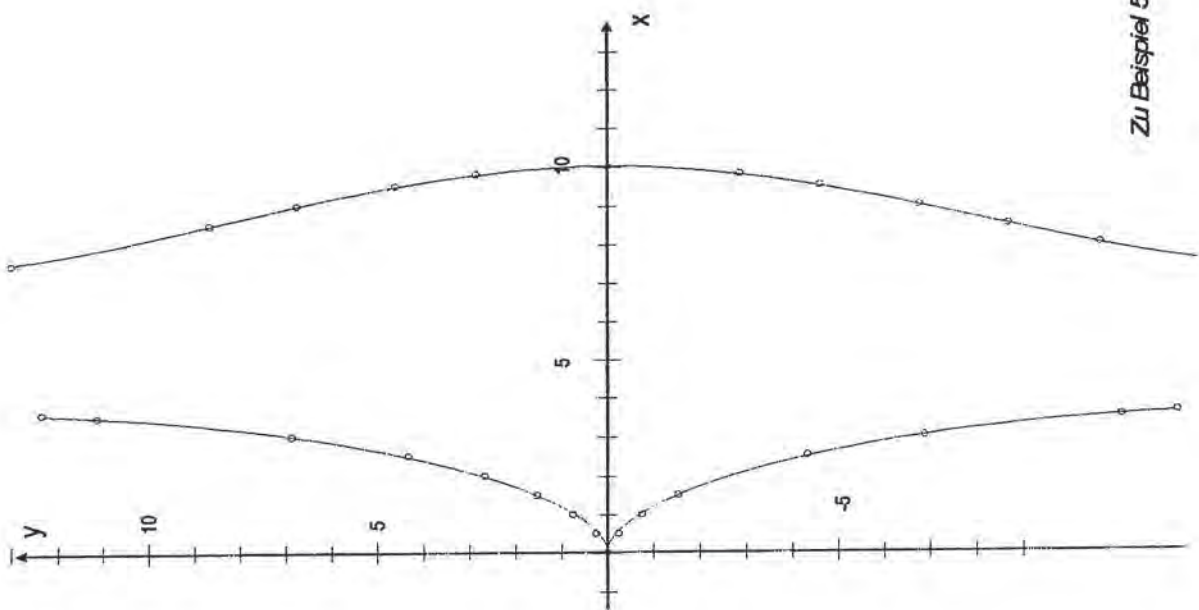
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	0	$\pm 0,24$	$\pm 0,75$	$\pm 1,53$	$\pm 2,67$	$\pm 4,33$	$\pm 6,87$	$\pm 11,13$
x	3,6	7,5	8	8,5	9	9,5	9,8	10
y	$\pm 12,34$	$\pm 12,99$	$\pm 10,67$	$\pm 8,67$	$\pm 6,75$	$\pm 4,60$	$\pm 2,86$	0

Diese Kurve heißt **Konchoide**. Auch sie kann sehr einfach konstruktiv gewonnen werden.

(Zeichnungen siehe Seite 29)



Zur Konstruktion:
 $B_i P = B_i A = OA$



Zu Beispiel 5

6. Beispiel: $(x^2 + y^2 - 8x)^2 = 16 \cdot (x^2 + y^2);$

Auflösen nach y:

$$x^4 + y^4 + 64x^2 + 2x^2y^2 - 16x^3 - 16xy^2 = 16x^2 + 16y^2;$$

$$y^4 + (2x^2 - 16x - 16) y^2 + x^4 + 48x^2 - 16x^3 = 0;$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{"p"}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{"q"}}$$

Nebenrechnung zur Bestimmung des Radikanden in der "p - q - Formel" $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$:

$$\begin{aligned} (x^2 - 8x - 8)^2 - (x^4 + 48x^2 - 16x^3) &= x^4 + 64x^2 + 64 - 16x^3 - 16x^2 + 128x - x^4 - 48x^2 + 16x^3 \\ &= 64 + 128x = 64 \cdot (1 + 2x) \end{aligned}$$

$$y_{1,2}^2 = - (x^2 - 8x - 8) \pm 8\sqrt{1 + 2x} = 8 + 8x - x^2 \pm 8\sqrt{1 + 2x}; \quad | \sqrt{}$$

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{8 + 8x - x^2 + 8\sqrt{1 + 2x}} \quad (1)$$

$$y_{3,4} = \pm \sqrt{8 + 8x - x^2 - 8\sqrt{1 + 2x}} \quad (2)$$

Tabellen:

(1)	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y	± 4	± 5,37	± 6,16	± 6,65	± 6,93	± 7,04	± 6,99	6,78	± 6,40	± 5,82

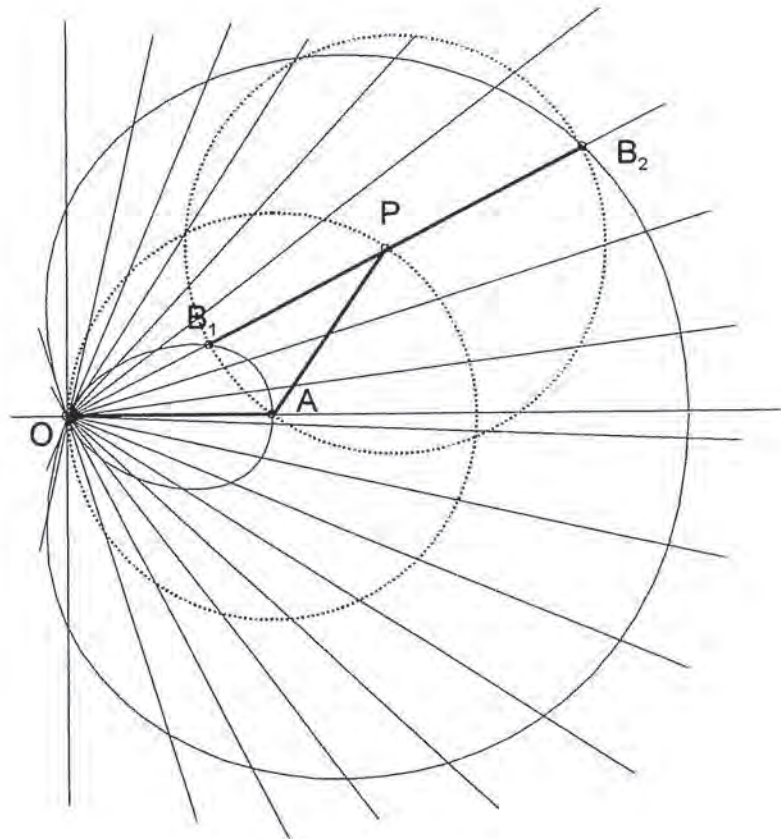
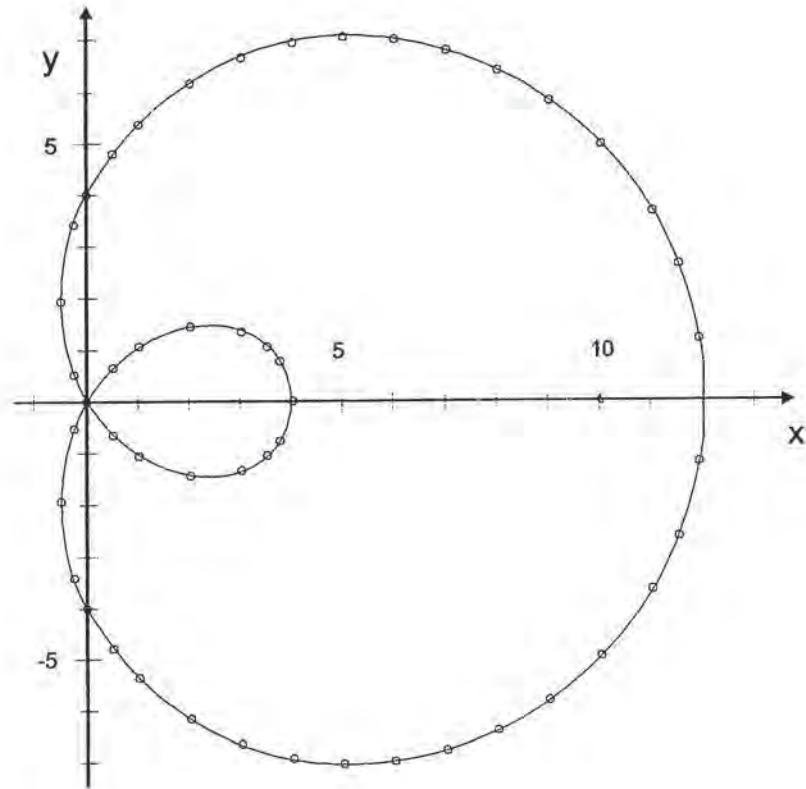
(1)	x	10	11	11,5	11,9	12	-0,25	0,5
	y	± 4,97	± 3,66	± 2,63	± 1,20	± 0	± 3,41	± 4,80

(2)	x	0	0,5	1	2	3	3,5	3,75	4	-0,25	-0,5
	y	0	± 0,66	± 1,07	± 1,45	± 1,35	± 1,06	± 0,78	± 0	± 0,53	± 1,94

(Zeichnungen siehe nächste Seite)

Aus der Zeichnung wird deutlich, dass Gleichung (1) definiert ist für $-0,5 \leq x \leq 12$ und Gleichung (2) für $-0,5 \leq x \leq 4$.

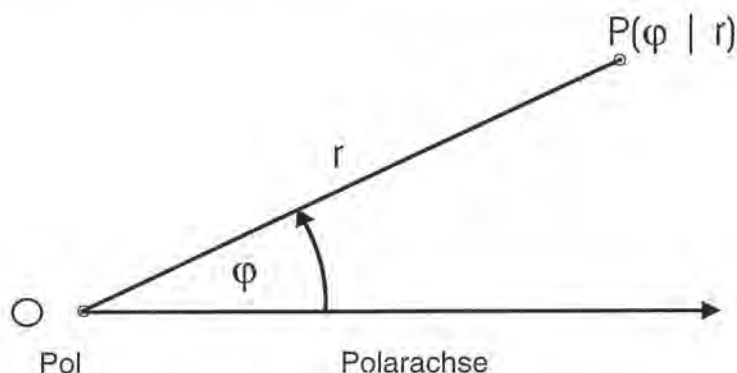
Die erhaltene Kurve ist eine **Pascal'sche Schnecke**. Sie lässt sich ähnlich einfach wie die vorhergehenden auch konstruktiv herstellen.



(Zur Konstruktion: $\overline{PB_1} = \overline{PB_2} = \overline{OA} = \overline{AP}$)

An dieser Stelle ist es möglich, auf ein anderes Koordinatensystem hinzuweisen, auf die Polarkoordinaten:

Ein Punkt P in Richtung φ (bezogen auf die Polarachse), der vom Pol O die Entfernung r hat, wird mit diesen Koordinaten r und φ bezeichnet, $P(r | \varphi)$.



In diesem System hat z. B. ein Kreis um O eine besonders einfache Gleichung: $r = 4$.

Als eine Gleichung, für die wir eine Wertetabelle als Grundlage der Zeichnung anlegen, das folgende Beispiel:

$$(r - 8 \cos \varphi)^2 = 16; \quad \text{diese lässt sich auflösen nach } r;$$

$$r_1 = 8 \cos \varphi + 4 \quad \text{und} \quad r_2 = 8 \cos \varphi - 4;$$

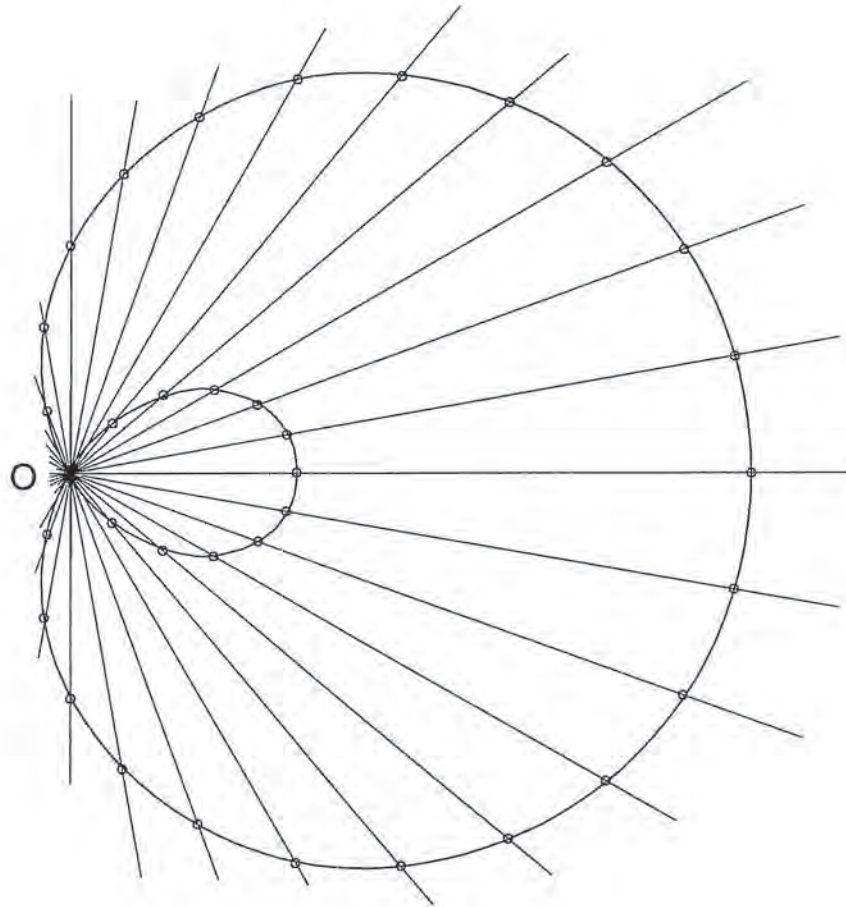
Wertetabelle:

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
r_1	12,00	11,88	11,52	10,93	10,13	9,14	8,00	6,74	5,39	4,00
r_2	4,00	3,88	3,52	2,93	2,13	1,14	0,00	-1,26	-2,61	-4,00

φ	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
r_1	2,61	1,23	0,00	-1,14	-2,13	-2,93	-3,252	-3,88	-4,00
r_2	-5,93	-6,74	-8,00	-9,14	-10,13	-10,93	-11,52	-11,88	-12,00

Wir erhalten die gleiche Pascal'sche Schnecke wie in Beispiel 6:

(Zeichnung siehe nächste Seite)



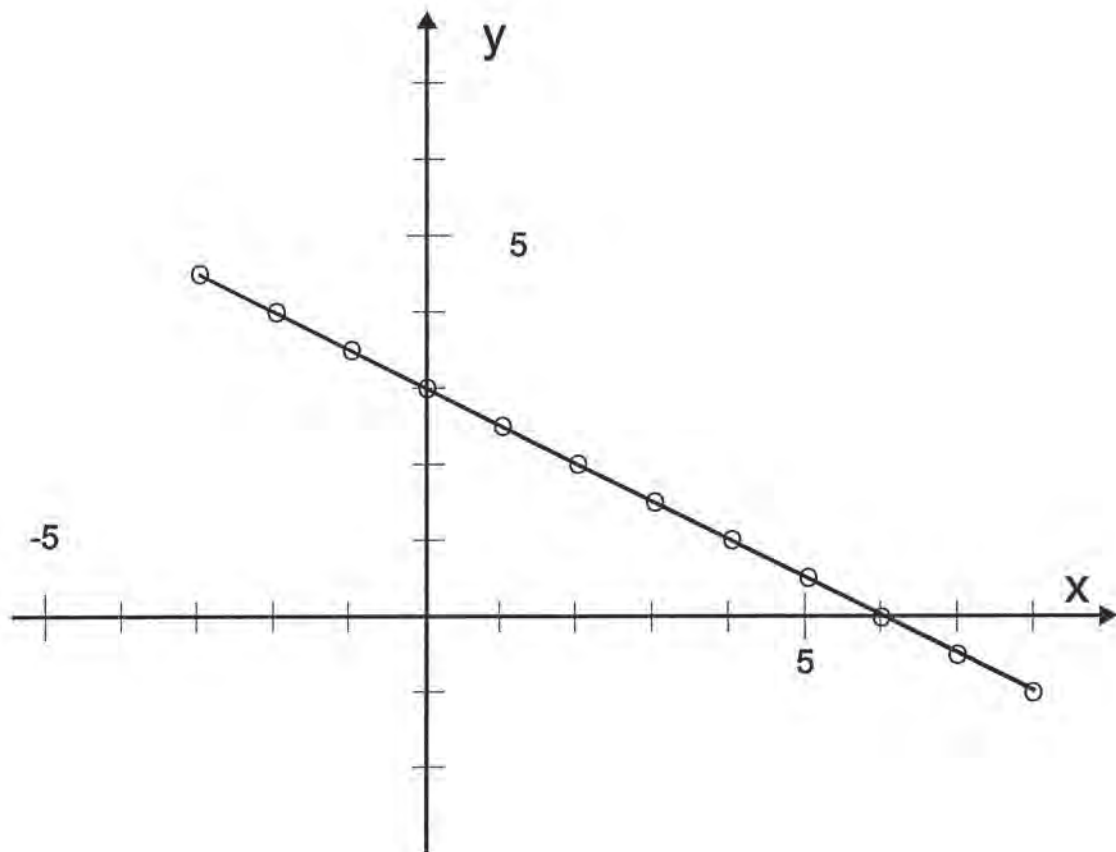
7. **Beispiel:** $x + 2y - 6 = 0;$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3;$$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

In der Wertetabelle erkennen wir: Wächst die Abszisse x um 1, so nimmt der Ordinatenwert y um 0,5 ab. Es ist ein gleichmäßiger, ein linearer Vorgang. Die Kurve ist eine gerade Linie, kurz: eine Gerade.



Die nächsten Kapitel sollten sich nun mit der **Gerade** – ausgehend von der **Strecke** – beschäftigen.

Zur Kennzeichnung der analytischen Geometrie

Uwe Hansen

In seinem bedeutenden Jugendwerk „Regeln zur Leitung des Geistes“ schreibt René Descartes (1596-1650) in der Erläuterung zur Regel IV:

„Es kann aufmerksamer Betrachtung nämlich nicht verborgen bleiben, dass die alten Geometer sich einer bestimmten Analysis bedient haben, ... wenngleich sie diese neidvoll der Nachwelt vorenthielten. Auch heute betreibt man ja eine gewisse Art der Arithmetik, die als Algebra bezeichnet wird und deren Aufgabe darin besteht, das von den Zahlen darzulegen, was die Alten von den Figuren bewiesen ...“

„Und wenn ich hier auch noch so viel von Figuren und Zahlen zu reden haben werde, so wird dennoch jeder ... mit Leichtigkeit durchschauen, dass ich hierbei nichts weniger als die gewöhnliche Mathematik im Sinne habe, sondern eine ... von der die erwähnten eher eine Hülle, denn Teile sind.“

Descartes äußerte dann den Gedanken, dass die ersten Entdecker der Philosophie im Altertum eine von der gemeinen unseres Zeitalters recht verschiedene Mathematik gekannt haben. Diese wird von ihm dann Universalmathematik genannt: aus ihr gehen Arithmetik und Geometrie hervor. Auf der Suche nach dieser umfassenden Universalmathematik entstand dann die analytische Geometrie.

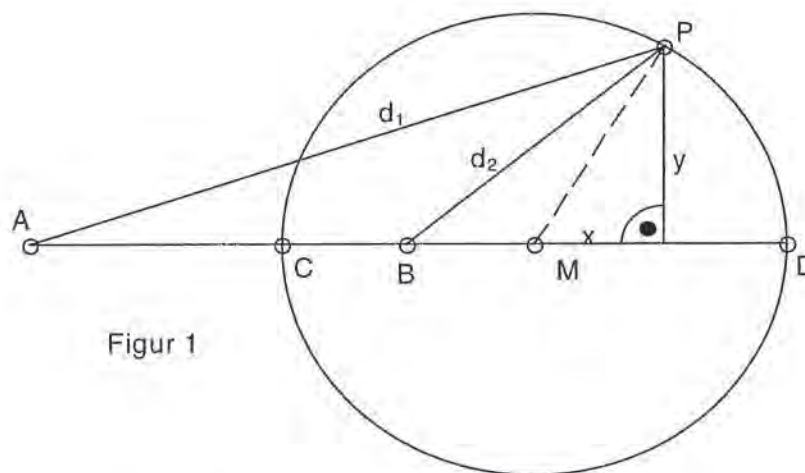
Die analytische Geometrie ist also entstanden durch die Überzeugung, dass Arithmetik und Geometrie eine gemeinsame Wurzel haben. Diese Gemeinsamkeit zeigt sich auf der einen Seite darin, dass geometrische Gesetzmäßigkeiten algebraisch formuliert werden können und auf der anderen Seite in der Möglichkeit, algebraische Beziehungen auf verschiedene Weise geometrisch darzustellen.

Das Rechnen mit Gleichungen ist für die analytische Geometrie kennzeichnend. Das Auftreten dieser Gleichungen folgt aber aus Gleichheiten im Geometrischen. So beruht – im kartesischen Koordinatensystem – die Geradengleichung auf der Gleichheit von Verhältnissen bei ähnlichen Dreiecken, die Gleichung des Kreises auf der Gleichheit von Flächeninhalten im Satz des Pythagoras und die Parabelgleichung folgt aus der Gleichheit von Flächeninhalten des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck. Stets muss versucht werden, eine Gleichung so zu betrachten, dass das geometrische Gesetz erkennbar wird.

Im Folgenden sind verschiedene Möglichkeiten eines Epochenanfangs skizziert.

Man kann zum Beispiel von der Frage ausgehen: Auf welcher Kurve liegen die Punkte, die von dem festen Punkt A doppelt so weit entfernt liegen wie von dem Punkt B?

A und B seien 6 cm voneinander entfernt.



Figur 1

Man findet zunächst den Punkt C, der zwischen A und B liegt, 4 cm von A entfernt und den Punkt D, der 6 cm von B entfernt liegt, spiegelbildlich zu A (Figur 1).

Zeichnet man weitere Punkte P, so äußern die Schüler die Vermutung: P liegt auf einer Ellipse; oder ist es sogar ein Kreis?

Um dieses zu untersuchen, liegt es nahe, den Mittelpunkt M von C und D zu betrachten und die Entfernung von P und M zu bestimmen. Dazu bezeichnen wir die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse PM mit x bzw. y – von P wurde das Lot auf AB gefällt.

Da $AM = 8$ cm und $BM = 2$ cm, folgt aus dem Satz von Pythagoras (Längen jeweils in cm):

$$d_1^2 = AP^2 = (x + 8)^2 + y^2;$$

$$d_2^2 = BP^2 = (x + 2)^2 + y^2.$$

Da $d_1 = 2 \cdot d_2$, also $d_1^2 = 4 \cdot d_2^2$ folgt

$$(x + 8)^2 + y^2 = 4 \cdot [(x + 2)^2 + y^2] \text{ oder umgeformt}$$

$$16 = x^2 + y^2.$$

Es folgt: Die Hypotenuse MP muss stets die Länge 4 haben; d. h. P liegt auf einem Kreis (Divisionskreis, Kreis des Apollonius).

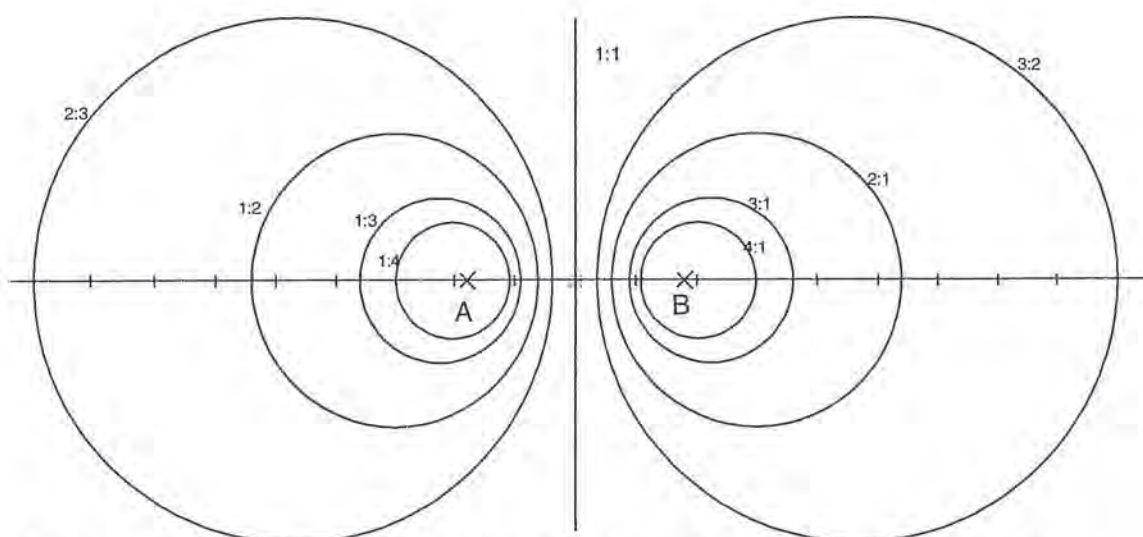
Es ist sinnvoll, diesen Rechengang mit anderen Verhältnissen (z. B. 3:1; 4:1; 3:2) zu wiederholen.

$$\text{Aus } d_1 : d_2 = 3:1 \text{ und } AB = 8 \quad \text{folgt} \quad x^2 + y^2 = 9;$$

$$\text{Aus } d_1 : d_2 = 4:1 \text{ und } AB = 15 \quad \text{folgt} \quad x^2 + y^2 = 16;$$

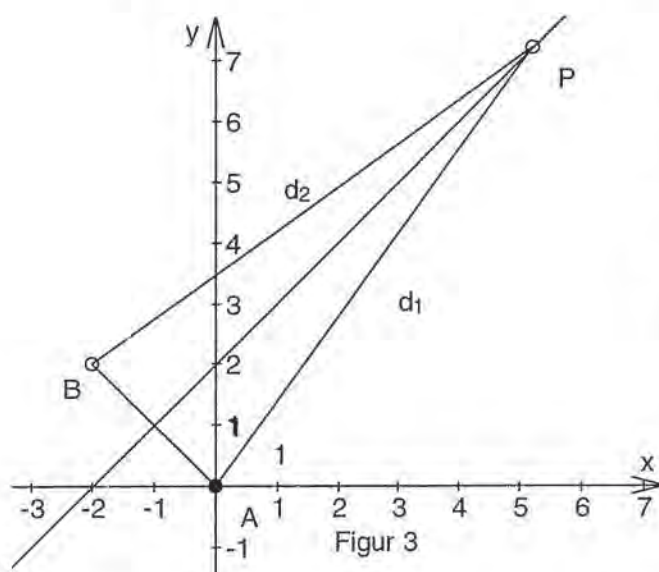
$$\text{Aus } d_1 : d_2 = 3:2 \text{ und } AB = 8 \quad \text{folgt} \quad x^2 + y^2 = 36.$$

Diese Betrachtung mündet dann in die folgende Zeichnung:



Figur 2: Apollonische Kreise – alle Punkte eines Kreises haben das gleiche Abstandsverhältnis zu den Punkten A und B

Setzt man in dem vorangegangenen Beispiel $d_1 = d_2$, also $d_1^2 = d_2^2$, so erhält man die Gleichung der Mittelsenkrechten von AB, z. B. $x = -5$.



Um den Rechengang weiter zu üben, könnte man auch auf diese Weise die Geradengleichung einführen. Dem Schüler ist die Darstellung von Punkten durch zwei Koordinaten deutlich geworden, so dass die folgende Aufgabe sofort verständlich wird:

Bestimme die Mittelsenkrechte von AB mit $A(0 \mid 0)$ und $B(-2 \mid 2)$.

$$\text{Es ist } d_1^2 = x^2 + y^2;$$

$$d_2^2 = (x + 2)^2 + (y - 2)^2$$

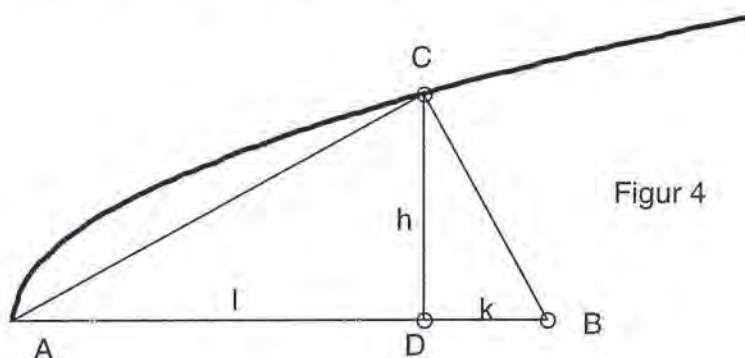
Aus $d_1^2 = d_2^2$ folgt dann $y = x + 2$.

An weiteren geeigneten Aufgaben zur Mittelsenkrechten kann man dann auch andere Geradengleichungen entwickeln.

Auch das folgende Beispiel kann als Einführung in das kartesische Koordinatensystem am Anfang einer Epoche stehen. Es zeigt, wie in einer Gleichung der geometrische Inhalt erkennbar bleibt.

Das rechtwinklige Dreieck ABC liegt mit seiner Hypotenuse AB auf einer festen Geraden, wobei der eine Endpunkt A fest sei. D sei der Fußpunkt der Höhe. Der Hypotenusenabschnitt $k = DB$ habe eine konstante Länge.

Auf welcher Kurve bewegt sich C, wenn $l = AD$ verändert wird?



Aufgrund des Höhensatzes gilt:

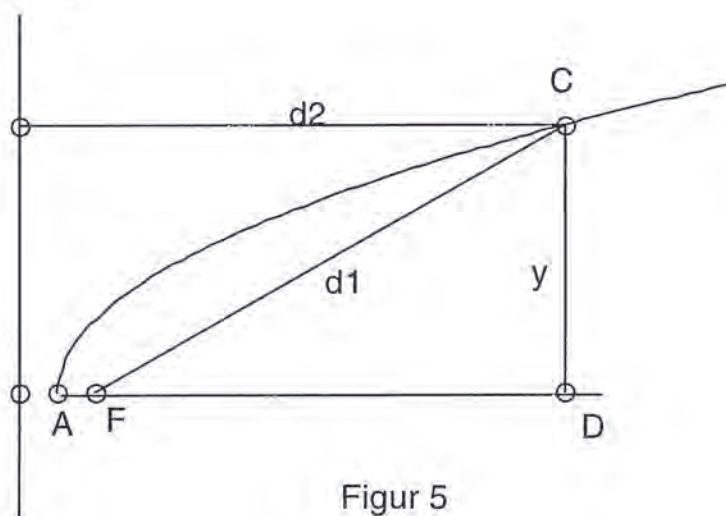
$$h^2 = l \cdot k;$$

um deutlich zu machen, dass l und h veränderliche Größen sind, setzen wir $l = x$ und $h = y$.

Es gilt also:

$$y^2 = x \cdot k, \text{ wobei } k \text{ eine Konstante ist.}$$

In der selben Weise wie im ersten Beispiel wird durch x und y die Lage des Punktes C festgelegt. Man schreibt $C(x | y)$.



Zeichnet man einige Dreiecke auf, so entsteht die Vermutung: der Punkt C liegt auf einer Parabel. Dies wird dann durch eine Rechnung bewiesen, die zeigt, dass die Parabeldefinition erfüllt ist. Es wird gezeigt, dass der Punkt $F(\frac{k}{4} | 0)$ der Brennpunkt und die Gerade mit den x-

Werten $-\frac{k}{4}$ die Leitlinie ist.

Für die Strecke $d_1 = FC$ gilt
$$d_1^2 = (x - \frac{k}{4})^2 + y^2$$

Da $y^2 = x \cdot k$ gilt, folgt

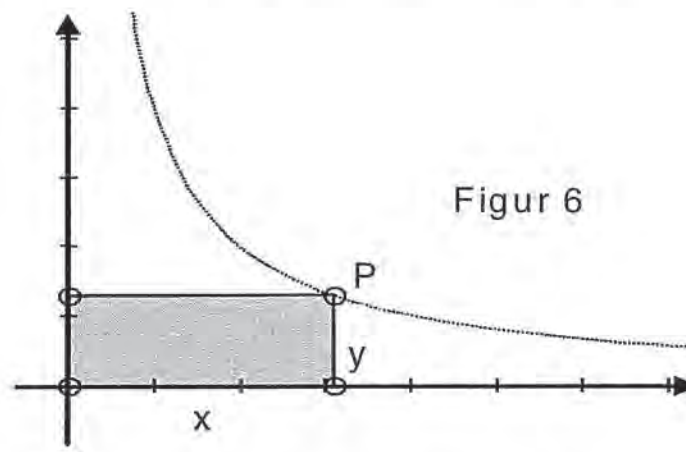
$$\begin{aligned}
 d_1^2 &= \left(x - \frac{k}{4}\right)^2 + x \cdot k \\
 &= x^2 + \frac{k}{2}x + \frac{k^2}{16} \\
 &= \left(x + \frac{k}{4}\right)^2 = d_2^2;
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $d_1 = d_2$ ist; C liegt damit auf einer Parabel.

Die Gleichung $y^2 = kx$ kennzeichnet also eine Parabel; sie ist ein besonderer Ausdruck des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck.

Auch die gleichseitige Hyperbel kann als Einstieg in eine Epoche benutzt werden, indem man mit der folgenden Aufgabe beginnt:

Ein Rechteck liegt mit zwei Seiten auf 2 vorgegebenen sich rechtwinklig schneidenden Geraden. Auf welcher Kurve bewegt sich die vierte Ecke, wenn der Inhalt der Rechtecksfläche konstant bleibt?



Nennt man die Breite des Rechtecks x , die Höhe y , so muss also gelten:

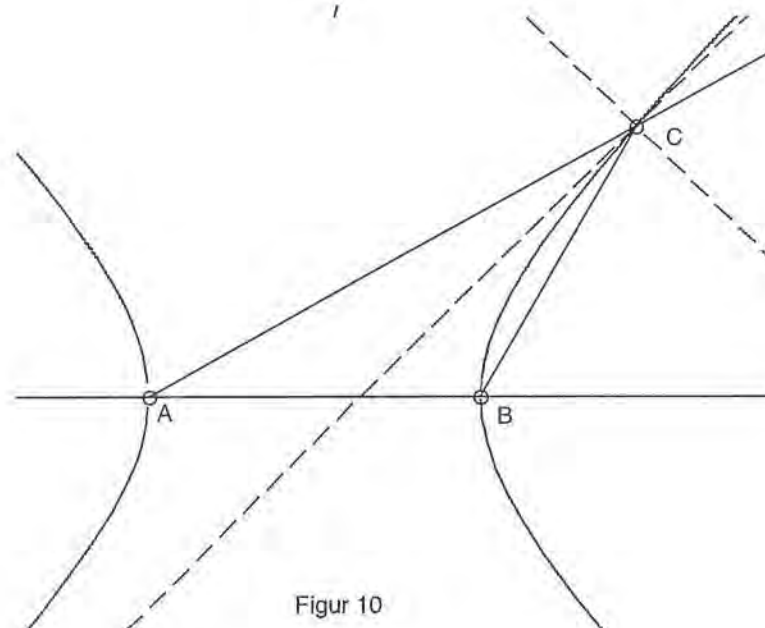
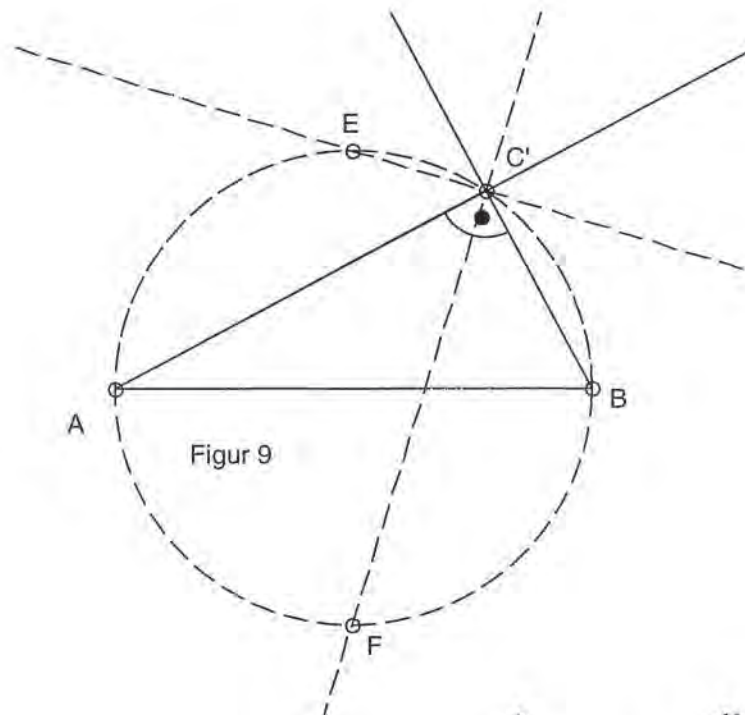
$y \cdot x = \text{konstant} = c$, also $y = \frac{c}{x}$; diese Gleichung stellt also eine Bedingung für die Lage des Punktes P dar. Sie wird daher auch Gleichung für die gleichseitige Hyperbel genannt.

Es ist naheliegend, $y \cdot x = c$ mit der Gleichung $y + x = c$ zu vergleichen und entsprechende Punkte aufzuzeichnen.

Anhand einer dieser Figuren kann man dann das Koordinatensystem entwickeln. Die Darstellung von Punkten wird also an einer konkreten Kurve eingeführt.

Eine weitere Möglichkeit, ein Koordinatensystem einzuführen, bietet der Höhensatz im Zusammenhang mit dem Thaleskreis.

Bei dieser Umstülpung gehen die beiden Kreispunkte E und F, die auf der Mittelsenkrechten von AB liegen, in die Unendlichkeit. Sie werden zu den Schnittpunkten der Asymptoten mit der Grenzgerade der Ebene.



Die folgende Überlegung zeigt einen entsprechenden Zusammenhang:

Beim Thaleskreis gehen die beiden Winkelhalbierenden von AC' und $C'B$ stets durch die beiden Punkte E und F. (Figur 9).

Bei der gleichseitigen Hyperbel sind entsprechend die Winkelhalbierenden von AC und CB parallel zu den beiden Asymptoten, d. h. sie gehen durch die beiden Grenzpunkte, die die Bilder von E und F sind (Figur 10).

In vorangegangenen Beispielen spielte die mittlere Proportionale (das geometrische Mittel) in Zusammenhang mit dem Höhensatz eine entscheidende Rolle. Diese mittlere Proportionale führte dann zu einer quadratischen Abhängigkeit.

Werden nun zwischen zwei Größen nicht eine, sondern zwei mittlere Proportionale gelegt, so entsteht eine kubische Abhängigkeit.

D. h.: Es sind zwei Größen a und b gegeben; gesucht sind x und y , so dass gilt:

$$a : x = x : y = y : b$$

Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung des sogenannten Delischen Problems: der Gott Apollo gab den Deliern die Weisung, seinen würfelförmigen Altar zu verdoppeln.

Die Mathematiker des griechischen Altertum fassten diese Weisung so auf, dass die Kantenlänge des Würfels so zu vergrößern sei, dass sich das Würfelvolumen verdoppele. Daher suchten sie zwei Größen x und y , so dass gilt

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

In diesem Fall ist also $b = 2a$.

Aus $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ ergibt sich $ay = x^2$;

aus $\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$ ergibt sich $xy = 2a^2$.

In einem Koordinatensystem stellt die erste Bedingung eine Parabel, die zweite eine gleichseitige Hyperbel dar. Der Schnittpunkt von Parabel und Hyperbel gibt die Koordinaten x und y (es ist $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$; siehe Figur 11).

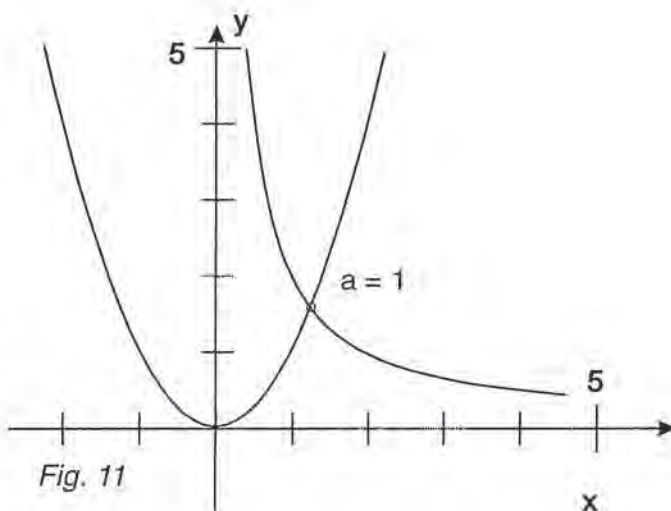
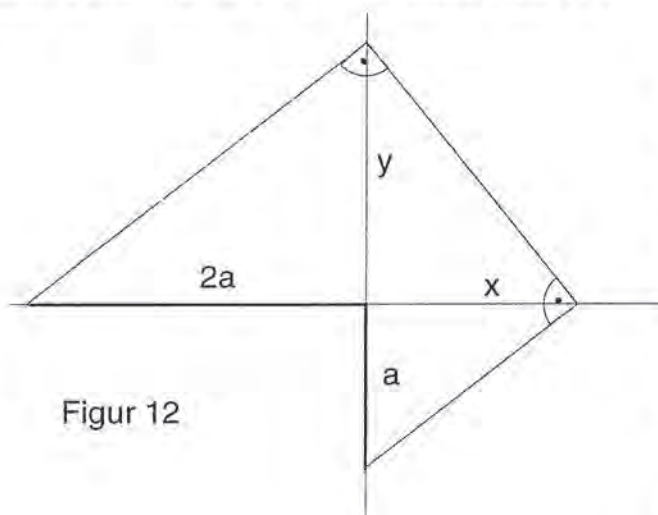


Fig. 11



Figur 12

Der Zusammenhang von a , x und y kann durch die folgende Figur dargestellt werden (Figur 12). Es werden drei ähnliche rechtwinklige Dreiecke benutzt.

Diese Aufgabe kann ebenfalls als Einstieg in eine Epoche dienen – sinnvoll ist es aber auch, sie am Ende einer Epoche zu behandeln.

Die Überlegungen, die zur Kreisgleichung und zur Parabelgleichung geführt haben, lassen sich für das Aufstellen der Ellipsengleichung bzw. Hyperbelgleichung übertragen:

Gegeben sei ein Punkt F und eine Gerade l , die nicht durch F geht. Auf welcher Kurve liegen die Punkte P , die doppelt so weit von l wie von F liegen?

Wie im ersten Beispiel bestimmen wir die Punkte C und D und den Mittelpunkt M der Strecke CD . M ist wieder der Bezugspunkt, und die Größen x und y werden entsprechend eingeführt.

Es sei F 3cm von l entfernt.

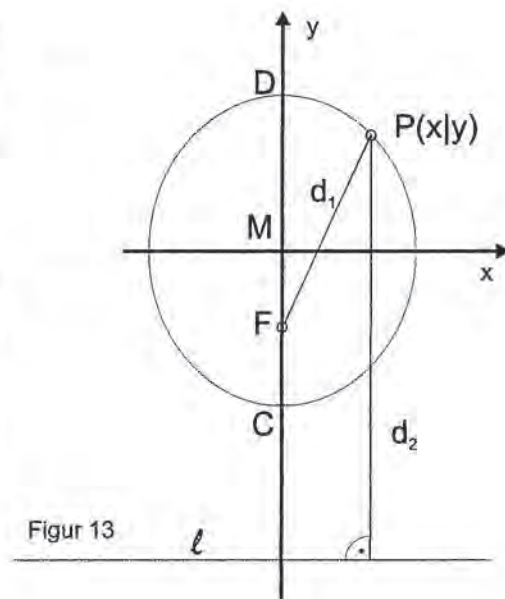
Da $d_2 = 2 d_1$, also $d_2^2 = 4 d_1^2$ sowie $d_2 = y + 4$ und $d_1^2 = x^2 + (y + 1)^2$

folgt $4(x^2 + (y + 1)^2) = (y + 4)^2$

oder $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Man erkennt die Verwandtschaft zur Kreisgleichung und die "Unsymmetrie" der Variablen x und y .

Gilt $d_1 = 2 d_2$, so erhält man entsprechend die Hyperbelgleichung.

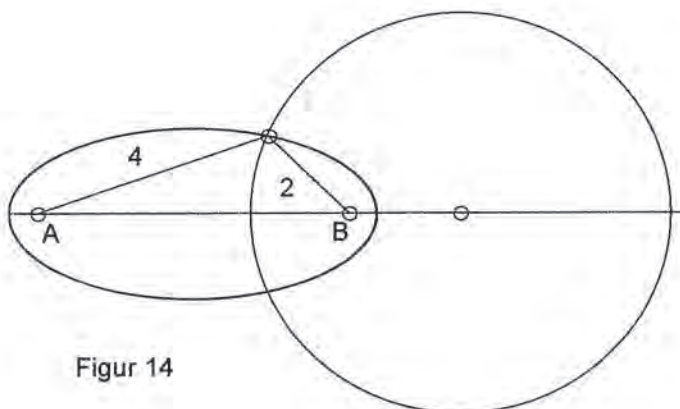


Für den Schüler ist es befriedigend, wenn am Anfang der Epoche die Gleichungen für Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel und Gerade gegenübergestellt werden können.

Im mathematischen Unterricht muss stets versucht werden innere Tätigkeit, innere Anschauung und bildliche Darstellung im richtigen Verhältnis zu halten. – Im Rechnen mit Gleichungen kommt es nun aber leicht zu einem formalen Anwenden von Regeln.

Innere Aktivität wird erhalten und gefördert, wenn die verschiedenen Bilder verändert und wieder aufgelöst werden. Gleichungen sind insofern auch „Bilder“, da sie das Geometrische von einer bestimmten Seite, das heißt durch ein bestimmtes Gerüst – nämlich das Koordinatensystem – ansehen. Daher ist es sinnvoll, das selbe geometrische Gebilde von verschiedenen Seiten, d. h. in verschiedenen Koordinatensystemen zu betrachten.

Rückblickend auf die Geometrieepoche der 9. Klasse über die Kegelschnitte kann man ein Koordinatensystem benutzen, in dem die Lage eines Punktes beschrieben wird durch die Entfernungen zu zwei festen Punkten A und B . Diese Entfernungen kann man mit x und y bezeichnen. In diesem System müssen x und y positive Zahlen sein und es muss $x+y \geq AB$ sein. Zu jedem Zahlenpaar $(x | y)$ gibt es dann zwei Punkte, die symmetrisch zu AB liegen.

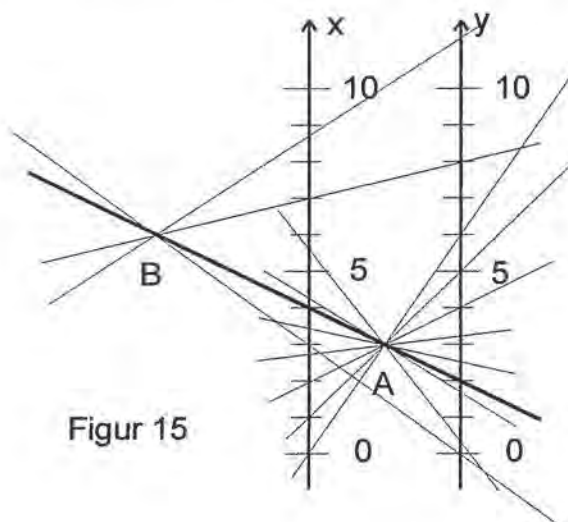


Schnitt des Kreises $x = 2y$
mit der Ellipse $x + y = 6$.
Die Lösung ist $x = 4, y = 2$.

Die Gleichung $ax + by = c$ stellt für $a = b = 1$ Ellipsen dar, für $a = 1, b = -1$ oder $a = -1, b = 1$ Hyperbeln. Ist $c = 0$, so erhält man Divisionskreise, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben. Im allgemeinen erhält man Ovale, die auch Einbuchtungen enthalten können (Cartesische Ovale).

Die Bedingung $x \cdot y = c$ führt zu Cassinischen Kurven, zur Lemniskate, wenn $AB = 2\sqrt{c}$ ist.

In einem weiteren besonders einfachen Koordinatensystem lassen sich die Strahlenbüschel gut darstellen: dieses Koordinatensystem kann man in der zehnten Klasse durchaus benutzen, um den Zusammenhang von Zunehmen und Abnehmen der Variablen deutlich zu machen.



Die x - und y -Achse werden als parallele Geraden gewählt. Jede Gerade, die diese beiden Achsen schneidet, kann dann durch die Koordinaten der Schnittpunkte gekennzeichnet werden.

Daher stellt z. B. die Gleichung $x + y = 6$ eine Geradenmenge dar, die durch den Punkt A geht (Figur 15).

Durch $2x - y = 6$ wird ein anderes Strahlenbündel beschrieben, das den Trägerpunkt B besitzt.

Verbindet man die beiden Punkte A und B durch eine Gerade, erhält man die Lösung des Gleichungssystems

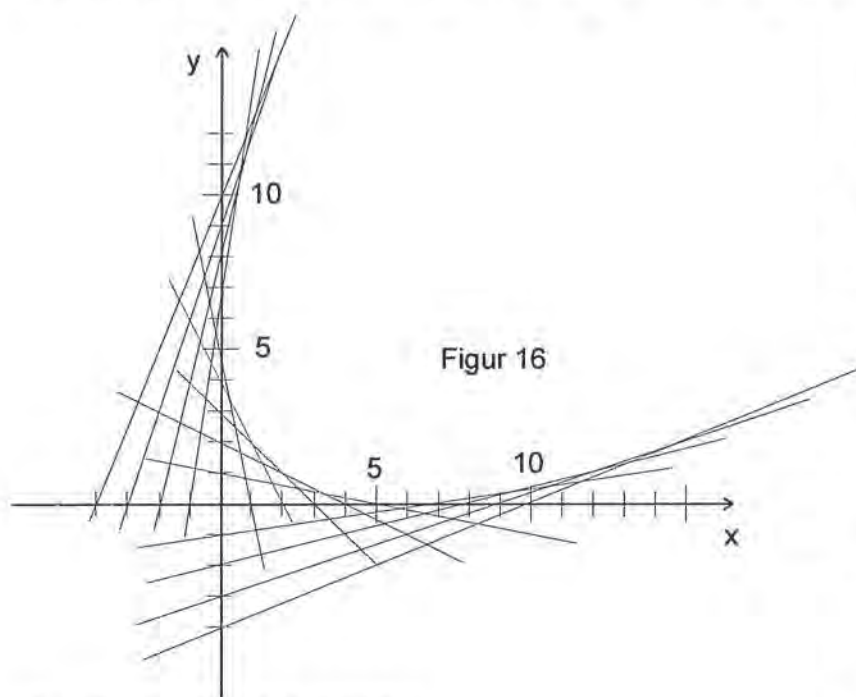
$$x + y = 6$$

$$2x - y = 6,$$

nämlich $x = 4$ und $y = 2$.

Alle Gleichungen der Form $ax + by = c$ stellen in diesem System Geradenbündel dar - wobei der Trägerpunkt auch im Unendlichen liegen kann, wenn $b = -a$ ist.

Dieses Koordinatensystem wird von einem Zehntklässler sofort verstanden.



Figur 16

Lässt man x- und y-Achse sich rechtwinklig schneiden, so kann man in genau der selben Weise eine Gerade, die beide Achsen schneidet durch ein Zahlenpaar beschreiben – falls diese Gerade nicht durch den Schnittpunkt der Achsen geht. Jetzt stellt die Gleichung

$$x + y = 6$$

eine Schar von Geraden

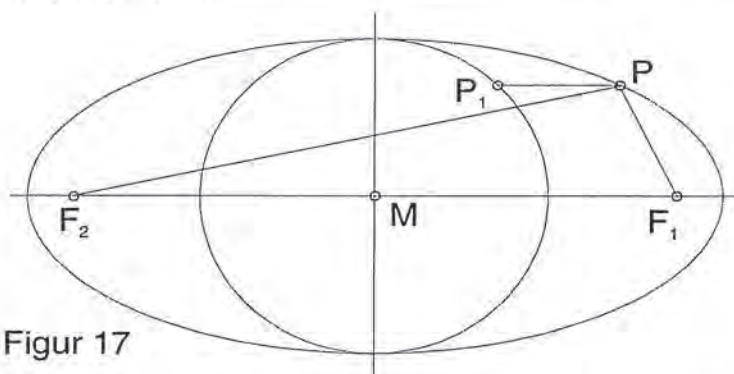
dar, die eine Parabel einhüllen.

Dies gilt allgemein: Alle Gleichungen der Form $ax + by = c$ stellen Parabelgleichungen dar – als Tangentscharen.

Die Gleichung $x + y = 6$ kann also eine Gerade darstellen, eine Ellipse, ein Strahlenbündel oder auch eine Parabel. Daraus folgt, dass diese geometrischen Gebilde von einem bestimmten Gesichtspunkt aus betrachtet gleichwertig sind. Dieser Zusammenhang wird nur durch die algebraische Betrachtungsweise deutlich.

In dem zuletzt genannten Koordinatensystem beschreibt z. B. eine Gleichung $x \cdot y = c$ eine Geradenschar, die eine gleichseitige Hyperbel einhüllt.

Zum Abschluss soll ein analytischer Beweis einem rein geometrischen Beweis gegenübergestellt werden; und zwar soll an einem einfachen Spezialfall gezeigt werden, dass das affine Bild des Kreises eine Ellipse ist.



Figur 17

$P_1(x | y)$ sei Punkt des Kreises $x^2 + y^2 = 1$, $P(2x | y) = P(2x | \sqrt{1-x^2})$ ist dann ein affines Bild von P_1 .

Es ist $r = 1$; es sei $F_1(\sqrt{3} | 0)$, $F_2(-\sqrt{3} | 0)$.

Dann ist

$$\begin{aligned} F_1P &= \sqrt{(2x - \sqrt{3})^2 + (1 - x^2)} \\ &= \sqrt{4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3 + 1 - x^2} \\ &= \sqrt{4 - 4x\sqrt{3} + 3x^2} = \sqrt{(2 - x\sqrt{3})^2} \\ &= 2 - x\sqrt{3}. \end{aligned}$$

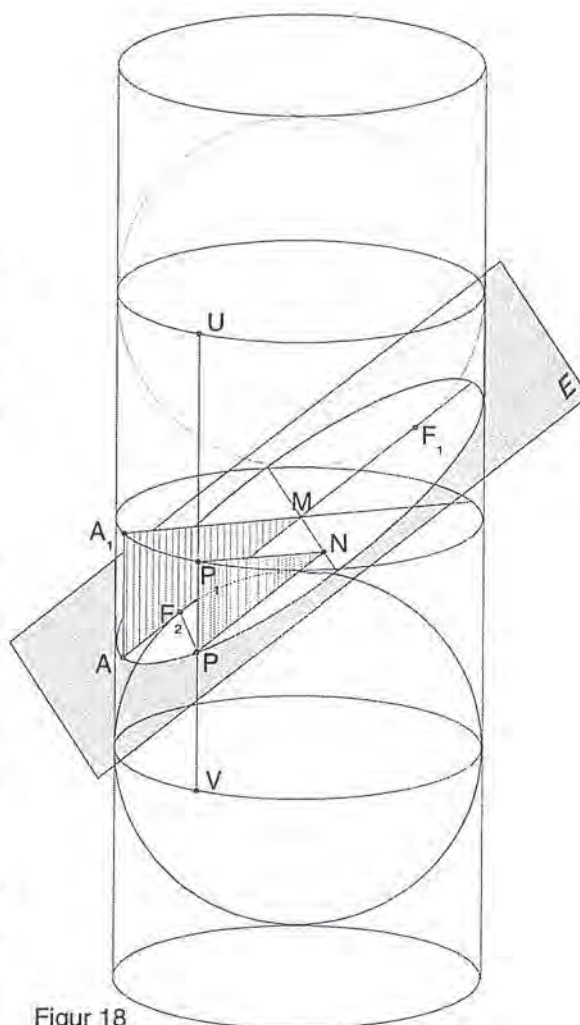
Entsprechend zeigt man $F_2P = 2 + x\sqrt{3}$; also ist $F_1P + F_2P = 4$.

Damit ist gezeigt, dass P Ellipsenpunkt ist. F_1 , F_2 sind die Brennpunkte, die konstante Abstandssumme beträgt 4.

Geometrischer Beweis: Zur Beweisführung wird eine Ellipsenebene E durch Schneiden eines Zylinders erzeugt.

Der Zylinderradius habe die Länge $r = 1$; außerdem soll der Zylinder so geschnitten sein, dass AM die Länge 2 hat (Figur 18).

P_1 sei beliebiger Kreispunkt und die Ebenen MAA_1 und NPP_1 seien parallel zur Zylinderachse. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MAA_1 und NPP_1 ist auch NP doppelt so lang wie NP_1 ,



Figur 18

denn es ist MA doppelt so lang wie MA_1 . D. h.: die Schnitlinie von E mit dem Zylinder ist ein affines Bild des Kreises.

Nun werden zwei Kugeln in den Zylinder gelegt, die den Zylinder und die schneidende Ebene E berühren. Die beiden Berührungspunkte seien F_1 und F_2 .

Durch P wird eine Mantellinie des Zylinders gelegt, die die Berührungskreise der beiden Kugeln mit dem Zylinder in den Punkten U bzw. V schneidet. Da alle Tangenten von einem Punkt an eine Kugel gleich lang sind, gilt

$$\begin{aligned} PF_1 &= PU \quad (\text{Tangenten an die obere Kugel}) \\ PF_2 &= PV \quad (\text{Tangenten an die untere Kugel}), \\ \text{also } PF_1 + PF_2 &= PU + PV = UV = \text{konstant.} \end{aligned}$$

Also ist die Schnitlinie eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 .

Da $MA = 2$ und $r = 1$ ist $MF_1 = MF_2 = \sqrt{3}$ und es gilt:

$$PF_1 + PF_2 = 4.$$

Die Gegenüberstellung zeigt, dass durch algebraische Umformungen die innere Anschauung für einen Teil des Beweises abgeschwächt wird, dass man sich auf logisches Schließen beschränken muss. Im rein geometrischen Beweis ist es leichter möglich, den Beweis als Ganzes vor sich zu sehen.

Bemerkung:

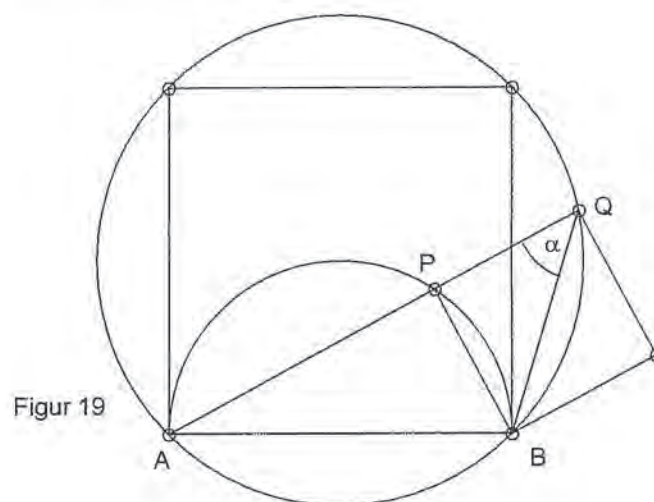
Es gibt viele Beweise, die in synthetischer Form einfacher als die entsprechenden analytischen Beweise sind.

Ein Beispiel:

P sei beliebiger Punkt des Thaleskreises über AB . Q sei eine Ecke des Kathetenquadrates über PB (Figur 19).

Bewegt sich P auf dem Thaleskreis, so bewegt sich Q ebenfalls auf einem Kreis - dieser Kreis ist der Umkreis des Quadrates über AB .

Dies folgt, da $\alpha = 45^\circ$ sein muss (Peripheriewinkelkreis).



Exemplarische Stationen einer Epoche über projektive Geometrie

Stephan Sigler

„Die Vorstellung des Raumes bot mir die größten inneren Schwierigkeiten. Er ließ sich als das allseitig ins Unendliche laufende Leere, als das es den damals herrschenden naturwissenschaftlichen Theorien zugrunde lag, nicht in überschaubarer Art denken. Durch die neuere (synthetische) Geometrie, die ich durch Vorlesungen und im Privatstudium kennen lernte, trat vor meine Seele die Anschauung, dass eine Linie, die nach rechts ins Unendliche verlängert wird, von links wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurück kommt. Der nach rechts liegende unendlich ferne Punkt ist derselbe, wie der nach links liegende unendlich ferne.

Mir kam vor, dass man mit solchen Vorstellungen der neueren Geometrie den sonst in Leere starrenden Raum begrifflich erfassen könne. [...] Ich ging aus der Vorlesung, in der mir das zuerst vor die Seele getreten ist, hinweg, wie wenn eine Zentnerlast von mir gefallen wäre. Ein befreiendes Gefühl kam über mich. Wieder kam mir, wie in meinen ganz jungen Knabenjahren, von der Geometrie etwas Beglückendes.“¹

Lehrplanangaben zur projektiven Geometrie

Steiner lernte schon als Schüler die Klarheit und Geordnetheit der mathematischen und geometrischen Gedankenbildung schätzen, die er als „wohlütig“ erlebte.² Durch sie stellten sich ihm erste Fragen zum Verhältnis der ihm selbstverständlichen Anschauungen der geistigen Welt und dem Wesen der Naturerscheinungen. Er äußerte sich später in vielen Vortragszyklen über diese Fragen und maß der synthetischen projektiven Geometrie dabei oft eine besondere Bedeutung zu.

In direktem Zusammenhang mit der Schule finden sich allerdings nur drei kurze Äußerungen aus den Konferenzen, die als Lehrplanangaben zu verstehen sind.

- 1) „Synthetische Geometrie, davon verspreche ich mir ungeheuer viel für die Gesundheit.“³
- 2) „Und dann, nicht wahr, daran anschließend die ersten Elemente der Lagengeometrie. Vor allem bringen Sie den Kindern Begriffe bei von der Dualität. Sie brauchen nur die aller ersten Dinge beizubringen.“⁴
- 3) „Das sind Kinder von 15 bis 16 Jahren. Wenn sie bei Ihnen in der Geometrie der Lage durchkriegen die ersten Grundbegriffe bis zum Gesetz der Dualität mit der Perspektive, dass die Kinder perplex sind und staunen und wenn sie dann von der neuen Dissertation [von Baravalle; S.S.] Interesse kriegen, dann haben sie alles erreicht, was sie erreicht haben sollen.
In der Deskriptive, da haben Sie angefangen?“⁵

¹ Steiner, R. (1925): Mein Lebensgang. GA 28, Dornach, 1. Aufl., S. 41,

² ebd., S. 21

³ Steiner, R. (1920): Konferenzen, Bd. 1, GA 300a, Dornach 4. Aufl. 1975, S. 233; Diese Aussage steht im Zusammenhang mit der Planung des Stuttgarter Hochschulkurses (März 1921).

⁴ Steiner, R. (1921): Konferenzen, Bd 2, , GA 300b, Dornach, 4. Aufl. 1975, S. 25. Diese Aussage bezieht sich auf die 10. Klasse.

⁵ ebd., S. 42f

Auf diese Frage antwortet der angesprochene Lehrer ganz konkret, was er behandelt hat und fügt an, dass er in Mechanik verhältnismäßig wenig durchgenommen habe. Steiner rät ihm dann, die Wurfparabel zu behandeln, um daran die Koinzidenz der Realität mit den mathematischen Begriffen zu zeigen. Dann sagt Steiner unmittelbar im Anschluss:

„Die Philosophie beginnt mit dem Staunen' das ist zum Teil falsch. Beim Unterrichten muss man das Staunen am Ende eines Kapitels erregen; beim Philosophieren steht es am Anfang. Die Kinder müssen zum Staunen hintendiert werden. Sie müssen etwas haben, was sie ganz in Anspruch nimmt. Man muss ihnen begreiflich machen, dass es etwas ist, vor dessen Großartigkeit selbst ein Novalis auf den Knien liegen würde. [...] (Es folgen lobende Worte über Baravalles Dissertation; S.S.)

Solch eine Sache wie die von Baravalle – der soll nicht hochmütig werden –, solch eine Sache, wie diese Dissertation, die ist vor allen Dingen für die Waldorflehrer von ganz fundamentaler Bedeutung, weil es das Überführen des Mathematischen ins bildhaft Vorstellungsgemäße zeigt und sehr erleichtert.“⁶

Aus diesen Aussagen bildete sich an vielen Waldorfschulen die Tradition, zumindest eine große Epoche in projektiver Geometrie zu geben. Sie wird allerdings im Gegensatz zu den Steinerschen Aussagen in den meisten Fällen erst in der elften und nicht schon in der zehnten Klasse erteilt.

Ich möchte in diesem Beitrag ausführlich auf den besonderen Charakter der projektiven synthetischen Geometrie eingehen, wie ihn auch Steiner vielfach beschrieben hat. Aus der Zusammenschau dieses Charakters mit der täglich im Unterricht erlebbaren biographischen Situation von Elftklässlern lässt sich meiner Ansicht nach gut begründen, warum die Praxis, die Epoche erst in der elften Klasse zu erteilen, sinnvoll und tragfähig ist. Es gibt natürlich auch Kolleginnen und Kollegen, die das anders handhaben.

Zum Charakter der projektiven Geometrie

Um den Charakter und die Bedeutung der projektiven Geometrie richtig zu verstehen, muss man sich ihre Entstehungsgeschichte kurz vor Augen führen. Die Entdeckung im 19. Jahrhundert, dass Geometrien möglich sind, die unserem Anschauungsraum widersprechen, hat sich bewusstseinsgeschichtlich als sehr bedeutend erwiesen: Philosophische Grundüberzeugungen, die bis heute die alltägliche Bewusstseinsverfasstheit prägen, sind dadurch ins Wanken gekommen.

René Descartes (1596-1650) begründete die analytische Geometrie, mit deren Hilfe geometrische Fragestellungen durch die Einführung eines Koordinatensystems rechnerisch bearbeitet werden konnten.

⁶ Steiner, R. (1921): Konferenzen, Bd 2, S. 42f.

Damit war die Geometrie letztlich nur auf die Kenntnis bestimmter gerader Strecken und deren rechnerische Verknüpfung zurückgeführt. Eine Kugelgleichung z.B. basiert nur auf den Strecken x , y , z und dem Radius r , die mit dem Satz von Pythagoras zu der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ verknüpft werden.

Mit dem Koordinatensystem wird also das mathematische Rüstzeug bereitgestellt, um völlig abstrakt mit Raumverhältnissen zu operieren. Die drei senkrecht aufeinander stehenden Koordinatenachsen bieten dem Menschen ein sicheres Ordnungs- und Orientierungsschema, hängen sie doch sehr eng mit der leiblichen Organisation des Menschen zusammen. Aus dieser werden sie erst vom Menschen abstrahierend herausgesetzt. Der so konfigurierte Raum gibt dem Menschen eine gewisse Daseinssicherheit, weil er dem unbewusst gefühlten, inneren dreidimensionalen Raumschema, also dem Oben-Unten, dem Rechts-Links und dem Vorne-Hinten entspricht.⁷

Das populäre Raumverständnis kulminiert in Newtons „absolutem Raum“, der als starre, selbstständig existierende Wirklichkeit gedacht werden muss:

Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.⁸

Was dieser absolute Raum nun eigentlich ist, erklärt Newton dagegen nicht:

Zeit, Raum, Ort und Bewegung, als allen bekannt, erkläre ich nicht. Ich bemerke nur, dass man gewöhnlich diese Größen nicht anders als in Bezug auf die Sinne auffasst und so gewisse Vorurteile entstehen, zu deren Aufhebung man sie passend in absolute und relative, wahre und scheinbare, mathematische und gewöhnliche unterscheidet.⁹

Diese Aussage ist insofern erstaunlich, da sie bezüglich des absoluten Raumes Newtons eigentlicher, empirischer Methode widerspricht, die diesen dann auch mit solchen Mitteln erweisen müsste. Wenn es ihn tatsächlich gibt, wäre seine Existenz völlig unabhängig von irgendwelchen Körpern zu denken. Der absolute Raum ist leer, allenfalls mit materiellen Dingen „angefüllt“ und dient ihnen als Behälter, der nach allen Seiten unbestimmt weit ausgeht. Jedes Einzelding kann einem ganz bestimmten Raumpunkt zugeordnet werden. Es steht absolut für sich im Weltall und hat keinen wirklich innerlichen Bezug zu benachbarten Dingen. Treten zwei Gegenstände in Wechselwirkung, ist auch diese äußerlich und kann so formal mit den Mitteln der Mathematik beschrieben werden.

⁷ vgl. z.B. dazu auch Steiner, R. (1922): Das Entstehungsmoment der Naturwissenschaft in der Weltgeschichte und ihre seitherige Entwicklung, GA 326, Dornach, 3. Vortrag

⁸ Newton, I. (1687): Mathematische Prinzipien der Naturlehre, hrsg. v. F. Wolfers, Darmstadt, 1963, S. 25

⁹ ebd. S. 25

Durch diese Anschauung über den Raum werden die Vorstellungen über die Welt vom Menschen völlig losgerissen und nach außen verlegt. Der Mensch steht als Zuschauer der wesenlosen Welt gegenüber. Das hat Steiner als eigene Seelenverfassung beschrieben.¹⁰

Für Immanuel Kant (1724-1804) dagegen ist der Raum eine apriorische Anschauungsform unserer äußeren Sinne. Er unterscheidet in der Wahrnehmungswelt Form und Inhalt. Der Inhalt ist von außen gegeben, währenddessen die Form vom Menschen selbst stammt. Indem sich das Denken nun nur auf diese reine Anschauungsform des Raumes richtet, entsteht die geometrisch-mathematische Erkenntnis. Jede geometrische Form, jeder geometrische Gedanke entstammt also nicht der Erfahrung, sondern ist völlig unabhängig von dieser als Konstruktionsregel in unserem Kopf enthalten. Die mathematischen Sätze sind unabhängig von dem Inhalt der sinnlichen Erfahrung und können auch deshalb nicht durch sie entschieden werden. Sie liegen eben a priori der menschlichen Erscheinungswelt zugrunde und definieren damit die Eigenschaften des mathematischen und des physikalischen Raumes:

„Die empirische Anschauung ist nur durch die reine (Anschauung des Raumes und der Zeit) möglich; was also der Geometer von dieser sagt, gilt ohne Widerrede von jener.“¹¹

Damit wurde die Geometrie untrennbar an die Anschauungsform des euklidischen Raums geknüpft. Der Raum ist auf diese Weise keine Eigenschaft der „Dinge an sich“, die nach Kant jeder Erscheinung zugrunde liegen sollen. Er ist nur eine Eigenschaft der Dinge, insofern sie für das Subjekt da sind, also ihm erscheinen. Damit legt der Mensch also durch diese Anschauungsformen fest, wie ihm die Dinge erscheinen und mit unserer Verstandestätigkeit subsumieren wir die sinnlichen Anschauungen unter Begriffe und Kategorien, welche nur in der reinen Verstandessphäre gründen.

Abstrahiert man nun von allen im Menschen liegenden, subjektiven Bedingungen der Anschauung, so bliebe auch kein Raum. Die besonderen Bedingungen der Sinnlichkeit haben nichts mit den „Dingen an sich“ zu tun. Sie machen nur möglich, dass dem Mensch überhaupt etwas erscheint. Deshalb muss man schließen, dass uns reale Dinge nur im Raum vorkommen können. Lassen wir aber diese Bedingung der Möglichkeit unserer Erfahrung weg, so ist der Raum ein Nichts. Damit hat Kant aber wie Newton in gewisser Weise auch den Raum als etwas Feststehendes, Absolutes postuliert, allerdings mit der Einschränkung,

¹⁰ vgl. Anm. ¹

¹¹ Aus: Kritik der reinen Vernunft; zitiert nach Mainzer, K. (1980): Geschichte der Geometrie, Mannheim

dass sich diese Aussage nur auf die menschliche Anschauungsformen und damit auf die Welt als Erscheinung, nicht aber auf die Dinge selbst bezieht.¹²

Schon viel früher beschäftigte sich Girard Desargues (1593-1662) mit geometrischen Fragen, deren endgültige Lösung und Weiterführung das beschriebene Raumverständnis in Frage stellen sollte. Desargues war Baumeister und Ingenieur und übernahm die wichtige Rolle eines Bindeglieds zwischen empirischer Praxis und mathematischer Theorie. Er fasste alle so unterschiedlich erscheinenden und entstandenen Zeichenkonstruktionen der Renaissance-Künstler unter geometrisch-mathematischen Gesichtspunkten zusammen. Dabei führte er bei der Zentralprojektion erstmals Fernpunkte als Schnittpunkt zweier paralleler und unendlich langer Geraden ein, die auf die Fluchtpunkte abgebildet wurden. Mit Hilfe dieser Gesetzmäßigkeiten konnte er die ebenen Kurven Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel unter dem einheitlichen Begriff des Kegelschnittes formulieren (1639). Die Implikationen, die diese Begriffsbildung für die Mathematik als Ganze haben sollte, haben er und seine Zeitgenossen lange noch nicht wahrnehmen können.

Selbst Karl Friedrich Gauß (1777-1855), der sich lange mit den Problemen des Parallelenpostulats beschäftigte, zögerte noch etwa 170 Jahre später lange, bevor er seine Ideen veröffentlichte. Sie erschienen ihm zu revolutionär und er scheute das „Geschrei der Bötter“¹³ und die „Wespen“, die ihm um die Ohren fliegen würden, wie er einmal in einem Brief schrieb. Trotzdem ließ sich die Idee einer in sich widerspruchsfreien, nichteuklidischen Geometrie nicht mehr aufhalten, denn Wolfgang und sein Sohn Johann Bolyai (1802-1860) sowie Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792-1856) arbeiteten zeitgleich mit Gauß, aber wahrscheinlich relativ unabhängig voneinander, an denselben Fragen, die im Bereich der Geometrie das rein Begriffliche in Form von Gesetzmäßigkeiten von den Fesseln der sinnlichen Anschauung losreißen sollten. 1826 legte Lobatschewski seine erste Arbeit vor – Bolyai folgte 1831. Das, was die Mathematik im Bereich der Analysis schon über 100 Jahre früher vollbracht hatte, war in der Geometrie viel schwerer zu realisieren, da diese von Beginn an sehr eng auf die Anschauung bezogen war: Das rein Begriffliche und Folgerichtige ist im Bewusstseinsakt vom Vorstellungshaften, das immer sehr überzeugend und unmittelbar einleuchtend erscheint, auch heute immer wieder nur schwer loszulösen. Die Geometrie tritt hier erstmals der sinnlichen Einkleidung enthoben als freie Schöpfung des Gedankenlebens auf, das allein ihrer eigenen Gesetzlichkeit folgt.

¹² Für eine grundlegendere Auseinandersetzung mit den Ansichten Kants ist auch das Studium der erkenntniswissenschaftlichen Schriften Steiners empfehlenswert, um dahingehend dem Unterricht eine philosophische Orientierung und Fundierung zu geben. Vgl. insbesondere Steiner, R. (1892): Wahrheit und Wissenschaft. GA 3, Dornach, 5. Auflage 1980, S. 28ff

¹³ Bötter meint im übertragenen Sinne: denkfauler, schwerfälliger, unkultivierter Mensch

In der neueren Sicht erscheint die euklidische Geometrie neben den verschiedenen nichteuklidischen Geometrien nur als Spezialfall einer viel umfassenderen projektiven Geometrie. Deshalb setzten sich die Ideen nur sehr zögernd und gegen Widerstände durch. Erst um 1860, als ein Briefwechsel von Gauß mit dem Astronomen Hans Christian Schumacher publiziert wurde, war die Öffentlichkeit aufgrund der überragenden fachlichen Autorität, die Gauß zugesprochen wurde, gezwungen, die Entdeckungen wahrzunehmen und anzuerkennen.¹⁴ Das Problem mit dem Parallelenaxiom und die Erkenntnis, dass dieses Axiom nicht notwendigerweise konstitutiv für eine widerspruchsfreie Geometrie dazugehört, hat die damals beteiligten Mathematiker innerlich sehr aufgewühlt: Für sie war das beileibe keine intellektuelle Gedankenspielerei. Wolfgang Bolyai schreibt entsetzt an seinen Sohn Johann, als er erfährt, dass auch er sich mit dem Parallelenproblem auseinandersetzen will:

„Du darfst die Parallelen auf jenem Wege nicht versuchen; ich kenne den Weg bis an sein Ende – auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen, jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden – ich beschwöre dich bei Gott, lass die Lehre von den Parallelen in Frieden. [...] Ich hatte mir vorgenommen mich für die Wahrheit aufzuopfern; ich wäre bereit gewesen zum Märtyrer zu werden, damit ich nur die Geometrie von diesem Makel gereinigt dem menschlichen Geschlecht übergeben könnte. Schauderhafte riesige Arbeiten habe ich vollbracht, habe bei weitem Besseres geleistet als bisher geleistet wurde, aber keine vollständige Befriedigung habe ich je gefunden. [...] Ich bin zurückgekehrt, als ich durchschaut habe, dass man den Boden dieser Nacht von der Erde aus nicht erreichen kann, ohne Trost, mich selbst und das ganze Menschengeschlecht bedauernd. [...] Ich bin bei allen Klippen dieses höllischen toten Meeres vorbeigefahren und von überall kehrte ich mit zerschelltem Mastbaum und zerfetzten Segeln zurück und von da an datiere ich die Verderbnis meines Humors und meinen Fall.“¹⁵

Dem Vater war es also bitterernst. Liest man solche Passagen Schülern vor, kommen sie immer ungläubig ins Schmunzeln. Sie können aber trotzdem die Erkenntnisdramatik ganz fein mitempfinden, aber erst, wenn sie schon in die Gedanken der projektiven Geometrie eingetaucht sind und selbst erste Erlebnisse gemacht haben.

Dieser historische Blick ist hinsichtlich des Charakters und der bewusstseinsgeschichtlichen Bedeutung der projektiven Geometrie und der nichteuklidischen Geometrien sehr aufschlussreich. Auch Steiner hat in seinen Äußerungen sehr vielfältig dazu Stellung genommen und dabei die Beschäftigung besonders mit der projektiven Geometrie einerseits als ein Schulungsinstrument für die übersinnlichen Erkenntnismöglichkeiten des Menschen und andererseits als beispielgebend für die naturwissenschaftliche Methodik überhaupt dargestellt. Er

¹⁴ Zur Rezeptionsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie vgl. Ziegler, R., (1987): Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien und ihre Folgen; Bemerkungen zur Bewusstseinsgeschichte des 19. Jahrhunderts. In: *Elemente der Naturwissenschaft* 2/87

wehrte sich dabei aber vehement gegen den einseitigen Formalismus der Mathematik und die Reduzierung der gesamten Naturerkenntnis auf die mathematische Modellierung und damit gegen die bloße Quantifizierung und Beherrschung der Natur durch Mathematik. Für ihn ist die nichteuklidische Geometrie ein Symptom für die Sehnsucht nach geistiger Erkenntnis:

„Ich will nur auf das Symptomatische dieser Dinge hinweisen, darauf hinweisen, dass gerade auf dem Gebiet, das sich seine wunderbarste innere Stärke bewahrt hat, auf dem mathematischen Gebiete, am klarsten hervorgetreten ist, wie das Denken des 19. Jahrhunderts durch sich selbst reif ist, die Hülle zu sprengen, welche das menschliche Erkenntnissubjekt gegenüber der übersinnlichen Welt abschließt. Und wenn es auch nur Hypothesen sind, manchmal waghalsig behauptet, die rein rechnerisch betrieben worden sind, so müssen wir das, was auf mathematischem Gebiet geschehen ist, doch so nehmen, dass es ein Ausdruck ist für die Sehnsucht des menschlichen Erkennens, hinaus aus der sinnlichen Welt.“¹⁵

Für Steiner zeigt sich gerade in der Tatsache, dass die nichteuklidische Geometrie dem Alleingültigkeitsanspruch des euklidischen Raumbegriffs widerspricht, sondern dass mehr Welten *denkbar* sind, als zunächst vom Menschen erlebt werden. Um nun diese Welten nicht nur denken, sondern auch erleben zu können, müssen die menschlichen Erkenntniskräfte geschult werden. Das

„mathematische Anschauen ist ein Erziehungsmittel zum Leben in der sinnlichkeitsfreien Ideenwelt. Denn die mathematischen Gebilde schweben an der Grenze zwischen der sinnlichen und der rein geistigen Welt. [...] Wenn ich mathematisch denke, denke ich über das Sinnliche, aber ich denke zugleich *im* Sinnlichen. [...] An den mathematischen Gebilden kann ich auf sinnliche Art übersinnliche Tatsachen kennen lernen. [...] Die Idee muss rein geistig angeschaut werden, soll sie in ihrer wahren Wesenheit erkannt werden. Dazu kann man sich erziehen, wenn man im Mathematischen die Vorstufe dazu übt, wenn man sich klar macht, was man eigentlich an den mathematischen Gebilden gewinnt [...]“¹⁶

Damit wird ein Weg durch mathematische Schulung gewiesen, der die Denktätigkeit von sinnlichen Ingredienzien reinigt und befreit. Das liegt einerseits an dem Modus, wie mathematische Begriffe im Bewusstsein leben: zwar auf die Sinneswelt bezogen aber nicht direkt in ihr, und andererseits an der Methode der mathematischen Gedankenbildung, in der die Gedanken nur auf die eigene Ich-Tätigkeit gestützt gemäß ihrem Inhalt vollbewusst in Beziehung gesetzt und verbunden werden. Damit bildet diese Art der Tätigkeit – besonders auf

¹⁵ Zitiert nach Meschkowski, H. (1954): Nichteuklidische Geometrie, Braunschweig

¹⁶ Steiner R. (1910): Wege und Ziele des geistigen Menschen. GA 125, Dornach 1973, 1. Aufl. S. 79

dem Felde der projektiven synthetischen Geometrie – eine erste Stufe zur Imagination.¹⁸ Es wird damit gewissermaßen der Anerkennung eines imaginativen Elementes der Boden bereitet, weil man die geometrischen Gebilde nicht, wie bei der analytischen Geometrie äußerlich und letztendlich nur arithmetisch behandelt, sondern in das Innere, Charakteristische und Wesenhafte solcher Gebilde und Figuren vordringen kann. Natürlich hat die projektive Geometrie auch formalen Werkzeugcharakter, der dem Menschen passende Denkformen bereitstellt, um die Natur äußerlich zu beherrschen. Gleichzeitig muss diese spezifische Form des Mathematisierens aber nicht nur formal-äußerlich bleiben, sondern kann wieder an das Wirkliche anstoßen: Die projektive Geometrie ist nach Steiner, im richtigen Sinne betrieben, das einzige Gebiet der Mathematik, das wieder zur sinnlichen Wirklichkeit auch inhaltlich zurückstrebt. Die Mathematik hat sonst in der menschlichen Erkenntnis immer die Eigenschaft, alles zum Leben dazugehörige auszublenden und nur das Strukturelle oder die geometrischen Lageverhältnisse im Raum zu betrachten. Steiner forderte deshalb in diesem Zusammenhang sogar die Mathematiker auf, die synthetische projektive Geometrie z.B. auf den Bau der menschlichen Organisation anzuwenden:

„[...] dass er [der Mathematiker, S.S.] eine Vorstellung darüber gewinnen kann, wie er durch mathematische Operationen den Herzorganismus umdrehen kann, und wie dadurch die ganze menschliche Gestalt entstehen würde; wenn er eine Anleitung darüber bekäme, so zu mathematisieren, dann würde dieses Mathematisieren in der Wirklichkeit drinnen stehen.“¹⁹

Steiner hat, wie im Eingangszitat aus dem „Lebensgang“ deutlich wird, in jungen Jahren selbst an der projektiven Geometrie Schlüsselerlebnisse gehabt. Die lähmende Leere und unendliche Weite des so vorgestellten Raumes, der für die Geschehnisse der Welt angeblich nur „bereitgestellt“ wird, konnte er jetzt begrifflich anders erfassen und fühlte sich von einer Zentnerlast befreit. Aus diesem Erlebnis ist erklärbar, warum sich Steiner von der projektiven Geometrie „ungeheuer viel für die Gesundheit“ des Menschen erhofft.

Unterrichtliche Konsequenzen

Aus dem oben geschilderten Charakter der projektiven Geometrie und den drei Lehrplanaufgaben ergeben sich Hinweise auf die Art und Weise des Unterrichts und des Unterrichtens.

¹⁷ Steiner R. (1904): Mathematik und Okkultismus. In: Philosophie und Anthroposophie. GA 35, Dornach 1984, 2. Aufl., S. 8f

¹⁸ Als Imagination wird die erste Stufe der übersinnlichen Erkenntnis verstanden, wie sie Steiner z.B. in der Geheimwissenschaft (GA 13, 1977, 29. Auflage, S. 316ff) beschreibt. Der Zusammenhang der Imagination mit dem Mathematisieren beschreibt Steiner z.B. im Vortragszyklus „Naturbeobachtung, Experiment, Mathematik und die höheren Erkenntnisstufen“ (GA 324, Dornach, 1991, 3. Auflage, S. 48ff)

¹⁹ Steiner, R. (1921): Das Verhältnis der verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebiete zur Astronomie. GA 323, Dornach, 2. Aufl. 1983, S. 28

- Die Funktion, die Steiner der projektiven Geometrie hinsichtlich der imaginativen Qualität zuspricht, lässt keinen rein formalen, systematisch von den Axiomen ausgehenden Unterrichtsstil zu. Es liegt nahe, eher das bildhafte Erleben in einem zeichnerischen Umgehen sowie einem sich anschließenden denkenden Betrachten zu pflegen. Deshalb behandle ich die Geometrie fast nur in der Ebene. Steiner selbst schlägt ein Ausgehen von der Zentralperspektive vor – also einen Beginn ganz aus der Anschauung heraus. Der weitere Fortgang könnte dann so gestaltet werden, dass ganz allmählich aus der sinnlich gestützten Anschauung herausgeführt wird und die Fernelemente nicht als abstrakte Adjunktion eingeführt werden, deren Sinn sich einzig in der Nützlichkeit erschöpft. Man kann vielmehr darauf achten, obwohl diese Fernelemente keine sinnliche Qualität mehr haben und als abstrakte Setzungen erscheinen könnten, eine Erlebnisqualität an sie zu binden, die mehr als nur die Gedanken in Anspruch nimmt. Die Forderung lautete ja: „Sie müssen etwas haben, was sie *ganz* in Anspruch nimmt“. Die Schüler werden sich also nur dann neuen Gedankenformen in ihrer Fülle erschließen können, wenn sie vorher so mit diesen Gedanken in Berührung kommen, dass sie bis in ihre Physis hinein sich auf ihre Leiblichkeit abstützen mussten. Die Ausführungen Steiners im zweiten und dritten Vortrags des Ergänzungskurses²⁰ bedeuten meiner Ansicht nach in der projektiven Geometrie, dass von konkreten Einzelercheinungen ausgegangen werden muss, deren Formenreichtum Freude bereitet und mit Interesse wahrgenommen werden soll. Dieselben können deshalb nicht nur als Spezialfälle unter formalen Gesichtspunkten subsummiert werden.

- Ein wesentlicher Gesichtspunkt des Unterrichts ist die Dualität und Polarität der Konfigurationen [vgl. 2) und 3) der Lehrplanangaben]. Normalerweise ist der Mensch geneigt, den Raum oder die Ebene als mit Punkten angefüllt zu denken, die gemäß einem atomistischen Weltbild als Grundbaustein fungieren. Im gewöhnlichen Sprachgebrauch heißt es z.B. immer: Eine Gerade ist aus unendlich vielen Punkten zusammengesetzt. Die Gerade als originäre Qualität wird damit ausgeblendet. Die zu dem gewöhnlichen Punktraum duale Raumgestaltung ermöglicht ganz andere begriffliche Horizonte und Denkformen, derer es sich lohnt, sie zu üben.

- Ein weiterhin zu beachtender Gesichtspunkt ist das zu erzeugende Staunen und das sich anschließende Interesse für Weitergehendes. Und: „Man muss ihnen begreiflich machen, dass es etwas ist, vor dessen Großartigkeit selbst ein Novalis auf den Knien liegen würde“ [vgl. 3) der Lehrplanangaben].

²⁰ Steiner, R. (1921): Menschenerkenntnis und Unterrichtsgestaltung. GA 302, Dornach

Dieses Staunen kann sich auf mehreren Ebenen einstellen: Zunächst können die sorgfältig anzufertigenden Konstruktionen eine aufschließende Qualität des Staunens bewirken. Schließlich kommt es aber darauf an, dass die „Großartigkeit“ und Kühnheit des letztendlich eigenen Gedankenlebens bestaunt wird. Nicht die Wahrheit ist bestaunenswert, sondern die Schönheit der Wahrheit, wie Goethe in den Sprüchen in Prosa formuliert.

Die Entwicklungssituation der 11. Klasse

In welcher Weise begegnet nun die projektive Geometrie der speziellen Entwicklungssituation von Schülern der elften Klasse?

In der 11. Klasse trifft man meist auf eine deutlich beruhigte Situation: Man hat den Eindruck, dass die Schüler reifer, selbstbewusster und gefestigter geworden sind. Im direkten persönlichen Kontakt fordern sie Respekt und individuelle Akzeptanz eines gleichberechtigten Erwachsenen, der ihnen z.T. auch instinktiv gezollt wird. Die negative Kehrseite dieses Zustands ist Antriebsarmut, Müdigkeit und Trägheit. Das Gefühl des Erwachsenseins und das Führen-wollen des eigenen Lebens, bei dem die Eltern bezüglich der Tages- und Nachtgestaltung nur noch sehr bedingt Einfluss nehmen (können), hat oft Konsequenzen auf die körperlichen Voraussetzungen, morgens um acht Uhr am Unterricht sinnvoll teilnehmen zu können. Das erfordert vom Lehrer in noch höherem Maße eine Unterrichtsgestaltung, für die es sich tatsächlich lohnt, früh aufzustehen! Die eigene Wertschätzung und das innerliche Verbundensein mit dem Vorzubringenden, die aus einer vertieften Durcharbeitung entspringen, ist die Grundvoraussetzung dafür, dass Schüler besonders dieser Altersstufe den Unterricht als für sie verbindlich und fruchtbar erleben können.

Mit diesem äußerlichen Zurückziehen ist aber auch eine Verfeinerung im Innern verbunden: Pubertäre Reste verschwinden und die starken Entwicklungsunterschiede in einer Klasse gleichen sich allmählich aus. Die über die bisherige Schulzeit gebildete gefühlsmäßige Einheit der Klasse, von der viele Schüler noch bis in die 10. Klasse hinein getragen wurden, verschwindet nun oft fast völlig. Eine Gemeinschaft beginnt sich aus dem heraus zu bilden, was ihr einzelne Individualitäten zutragen.

Auch im allgemeinen Lernverhalten setzt sich die Individualisierung endgültig durch: Die Klasse spaltet sich zeitweise sehr stark in die Schüler, die ihre Fähigkeiten einsetzen und aus sich heraus etwas in die Hand nehmen und willentlich etwas lernen wollen und in den anderen Teil, der länger braucht, um seinen Denk- und Tatwillen anfänglich selbst zu führen. Dabei wird die Selbsteinschätzung und die Einschätzung der Anderen deutlich realistischer, was vielfach ein schmerzhafter Prozess beim Erleben der eigenen Fähigkeiten und Grenzen ist.

Auch die Jungen wenden sich von der bloßen Beschäftigung mit der äußeren Welt ab und hören verstärkt auf ihr Inneres. Tiefere Fragen und Unterrichtsbeiträge kommen nicht mehr nur noch in Form von provozierenden Spitzen, durch die man als Lehrer hindurchhören muss. Die Gedanken werden mehr als von Innen kommend erlebt und wollen als solche auch persönlich befühlt und beurteilt werden. Das Denken will nicht nur als Machtmittel der Welterklärung und -beherrschung gehandhabt werden, sondern man will die Grenzen erweitern und die Führung der Gedanken erobern. Philosophische und spirituelle Fragen artikulieren sich deutlich.

Diese Situation greift die projektive Geometrie ganz besonders nachhaltig auf, wobei es sich meiner Erfahrung nach als günstig erwiesen hat, die Epoche nicht zu früh im Jahr zu geben. Die Fernelemente erweisen sich ja gerade nur dann als „Realität“, wenn sie sich im *eigenen* Denken selbst als sinnvoll und richtig erwiesen haben. Die Schüler können sich hierbei auf keine Beispiele der sinnlichen Anschauung abstützen - nur auf ihren eigenen Denktakt, in dessen Mitvollzug sie die Sicherheit und Evidenz der Richtigkeit ihrer Gedanken erleben. Das bedeutet aber, dass sie sich erstmals in der Geometrie völlig aus der gewohnten sicherheitsgebenden Anschauung herauslösen und diese Stütze nun im Erleben ihres eigenen Denkens finden müssen.

Verordnet man die Fernelemente axiomatisch, so können die Schüler an der projektiven Geometrie meist nicht mehr erleben, als dass Mathematik wieder einmal unlogisches, willkürliches und strohernes Zeug ist, was man notgedrungen für eine Prüfung lernen muss.

Das muss sich natürlich in dem ‚Wie‘ des Unterrichtens niederschlagen. Das Denken des Schülers muss durch Phantasie beflügelt werden, Grenzen zu sprengen, sich die Wahrheit *selbst* zu erringen. Feststehendes, Fertiges und Objektives darf nur Mittel sein, um die Erscheinungen weiter zu befragen und ihrem geistigen Gehalt nachzulauschen.

Blickt man nun darauf, wie die obigen Betrachtungen zum Charakter der projektiven Geometrie und die Lehrplanangaben Steiners auf die Entwicklungssituation der Jugendlichen der 11. Klasse antworten, kann man verstehen, dass dieser Epoche dort eine Schlüsselfunktion zukommt. Einerseits kann sie durch das viele Konstruieren-müssen und das unmittelbare Erleben daran überhaupt wieder zu einem Bezug zum eigenen, willentlichen Tätigsein bewirken und andererseits werden latent vorhandene Fragen bearbeitet wie:

- „Gibt es sinnlich nicht wahrnehmbare Dinge, die in der Welt leben und wirken?“
- „Habe ich z. B. eine solche Kraft in mir?“
- „Wie steht diese im Weltzusammenhang?“
- „Was kann ich an ihr erleben und wie stelle ich mich dann zu ihr?“

Die denkende Durchdringung und Beurteilung dieser Fragen soll nicht nur einen Erkenntnisfortschritt bringen, sondern auch neue Kräfte, Tätigkeiten und Willensimpulse in den Schülern entfesseln. So kann die projektive Geometrie die großen Fragen der 12. Klasse nach der Entwicklung von Mensch und Welt vorbereiten.

Aus diesen Ausführungen wird vielleicht deutlich, dass diese Ziele nicht in der zehnten Klasse erreicht werden können. Dort wird ja fast gegensätzlich gearbeitet. Denkt man z.B. an das Feldmessen: Das, was in der mathematischen Erkenntnis z.T. sehr anwendungsbezogen in der Trigonometrie errungen wird, dient in erster Linie der verstandesseelenhaften Befestigung der eigenen Seele. Sie wird sogar so weit instrumentalisiert, dass man eine Landschaft messend und berechnend „in den Griff“ bekommt. Sehr verkürzt gesagt geht es also nicht um das sich leise vortastende Denken ins Ungewisse bzw. Unvorstellbare, sondern um das Erlebnis, dass rein rational erworbene Erkenntnisse einen speziellen, eher technisch geprägten Zugriff auf die Welt ermöglichen.

Ich bin sicher, dass sich die projektive Geometrie in der zehnten Klasse z.B. mittels perspektivischer Übungen, Zentralprojektion usw. sinnvoll vorbereiten lässt²¹. Das Einführen und wirkliche gedankliche Durchdringen der Fernelemente habe ich immer erst in der elften Klasse als tragfähig erlebt. In der zehnten Klasse dagegen nahmen die Schüler die Zusammenhänge eher märchenhaft, ungläubig auf, wurden dann z.T. unzufrieden und beschlossen dann eben, dass sich zwei parallele Geraden eben im Unendlichen schneiden würden. Dieses Rezept konnten sie ja dann auch schließlich erfolgreich anwenden. Hier zeigte sich eben wieder die seelische Konfiguration des Zehntklässlers! Die Gespräche um dieses Thema waren teils sehr heftig und kontrovers, drangen aber nicht zum Wesentlichen durch und blieben eher auf der Ebene eines Schlagabtauschs.

Exemplarische Stationen einer Epoche

Methodisch habe ich mich immer an Arnold Bernhard angelehnt. Sein Buch „Projektive Geometrie“²² zeigt an verschiedenen Themenbereichen eine überzeugende Möglichkeit, wie die Forderungen Steiners unterrichtlich umgesetzt werden können.

Die Zentralprojektion und die Zentralperspektive

Beginnt man die Epoche, wie Steiner vorschlägt, mit der Zentralprojektion, kann man die Schüler sehr behutsam und zunächst anschaulich an die projektive Geometrie heranzuführen. Die ersten Aufgaben bestehen immer darin, Punkte, Geraden und dann Figuren von einer

²¹ vgl. dazu z.B. den Beitrag von R. Rosbigalle in diesem Heft.

²² Bernhard, A. (1984): Projektive Geometrie, Stuttgart

Vertikalebene in eine Horizontalebene und umgekehrt zu projizieren²³. Wichtig dabei sind auch exakte Beschreibungen und Begründungen der Konstruktionen. Dabei sind die bekannten Eigenschaften einer Zentralprojektion festzuhalten:

- Punkte werden auf Punkte und Geraden werden auf Geraden abgebildet
- Liegt ein Punkt auf einer Geraden, liegt auch der Bildpunkt auf der Bildgeraden
- Die Schnittgerade der beiden Ebenen z ist Fixpunktgerade; sie bleibt also punktweise fest.

Das Thema der Fluchtpunkte leite ich gerne mit der Frage ein, ob jemand schon einmal parallele Geraden gesehen hätte. Dabei habe ich das Problem, ob man eine Gerade auch immer tatsächlich als Gerade sieht, nicht berührt, weil es von dem Eigentlichen hier etwas wegführt.²⁴ Vielen Schülern ist nicht klar, dass das Sehbild im eigentlichen Sinne keine Parallelität kennt. Es braucht zumeist ein wenig Zeit, bis es wirklich allen klar ist, dass der Mensch fortwährend die Eigenschaft der Parallelität in die Phänomene des Sehraums „hineindenkt“. Auch kurze gerade Stücke, wie zwei Kanten eines vor einem stehenden Tisches, erscheinen nur annähernd parallel, denn weiter entfernte Dinge erscheinen kleiner – ein Grundprinzip unseres Sehens. Die Schüler können sich zumeist ziemlich schnell an das perspektivische Zeichnen der Mittelstufe erinnern, bei dem sich im Sehbild zwei parallele Linien im Fluchtpunkt geschnitten haben. Dabei lag dieser an einem waagrecht gezeichneten Horizont. Ich habe dann oft Zeichnungen eines Schachbrettes o.ä. mit zwei Fluchtpunkten anfertigen lassen, da sich daraus später mannigfaltige Bezüge herstellen lassen (z.B. bei der harmonischen Lage im vollständigen Viereck/Vierseit).

Fragt man nun am nächsten Morgen, wie weit man seinen Blick heben muss, um einen Fluchtpunkt am Horizont – da wo Himmel und Erde sich berühren – anzuvisieren, so können sehr lebhaftes Gespräche entstehen: Man muss etwa gerade schauen. Was sieht man denn eigentlich, wenn der Blick parallel läuft, Himmel oder Erde? Erde doch nicht mehr, weil der Sehstrahl nicht mehr auf den Erdboden auftritt! Also den Himmel. Sieht man denn die Erde gar nicht mehr? Nein, denn man blickt ja über die Erde hinweg. Also muss ich, um die Grenze zwischen Himmel und Erde zu sehen, den Blick senken? Führe ich das aus, sehe ich aber

²³ ebd. S. 17ff

²⁴ Wir sehen keineswegs alle Geraden der Welt auch als „gerade Geraden“: Steht man z.B. auf einem Bahnsteig und blickt nach links an den Horizont, so laufen dort die Schienen zusammen. Direkt unten vor einem erscheinen sie parallel. Schwenkt man den Blick nun nach rechts, treffen sich die Schienen wiederum in der Ferne am Horizont. Die Gleise sind also im Sehbild nach unten gekrümmt, da man den Blick vom Horizont, der in Augenhöhe erscheint, nach unten und wieder zum Horizont nach oben schwenken muss. Ebenso erscheinen sie bei diesem Schwenk mondsichelförmig. Trotzdem ist es vernünftig, jede Gerade auch gerade zu zeichnen, da sich der Mensch immer so zu den Geraden der Welt stellen kann, dass sie gerade erscheinen (vgl. Maier, G. (1993): Optik der Bilder, Dürnau, S. 54)

nur Erde, solange mein Blick nach unten geht. Da kann ich den Blick noch ein wenig heben und sehe immer nur noch Erde. Wird meine Blickrichtung parallel zum Erdboden, sehe ich nur noch Himmel!? Gibt es eigentlich dann eine solche Grenze? Wie muss ich da schauen? Ist sie verschwommen oder scharf abgrenzend? Wo sind denn eigentlich die Urbildpunkte des Horizontes? usw.

Ich problematisiere hier immer sehr stark, um die Schwierigkeit dieser Angelegenheit den Schülern scharf umrissen vor Augen zu führen.

Wichtig ist dabei, dass am Ende herauskommt, dass es nur *einen* Sehstrahl gibt, der auf den Fluchtpunkt am Horizont gerichtet ist. Dieser Sehstrahl, als Gerade gedacht, geht durch unser Auge. Wir „sehen“ diese Gerade also nur als Punkt (Fluchtpunkt). Dieser muss natürlich waagrecht über der Horizontalebene und parallel zu den Parallelen dieser Ebene sein. Und das eigentlich Überraschende ist, dass man einen Punkt (Fluchtpunkt) als Schnittpunkt zweier Geraden und eine Gerade (Horizont) sieht, die „draußen in der Welt“ bzw. in der Horizontalebene gar nicht auffindbar sind.

Will man nun die Fluchtpunkte auch in einer räumlichen Konfiguration konstruktiv gewinnen, kann man z.B. gegebene Dreiecke aus der Horizontalebene in das Sehbild, die Vertikalebene, projizieren, wobei Z der Augpunkt ist. (vgl. Abbildung 1).

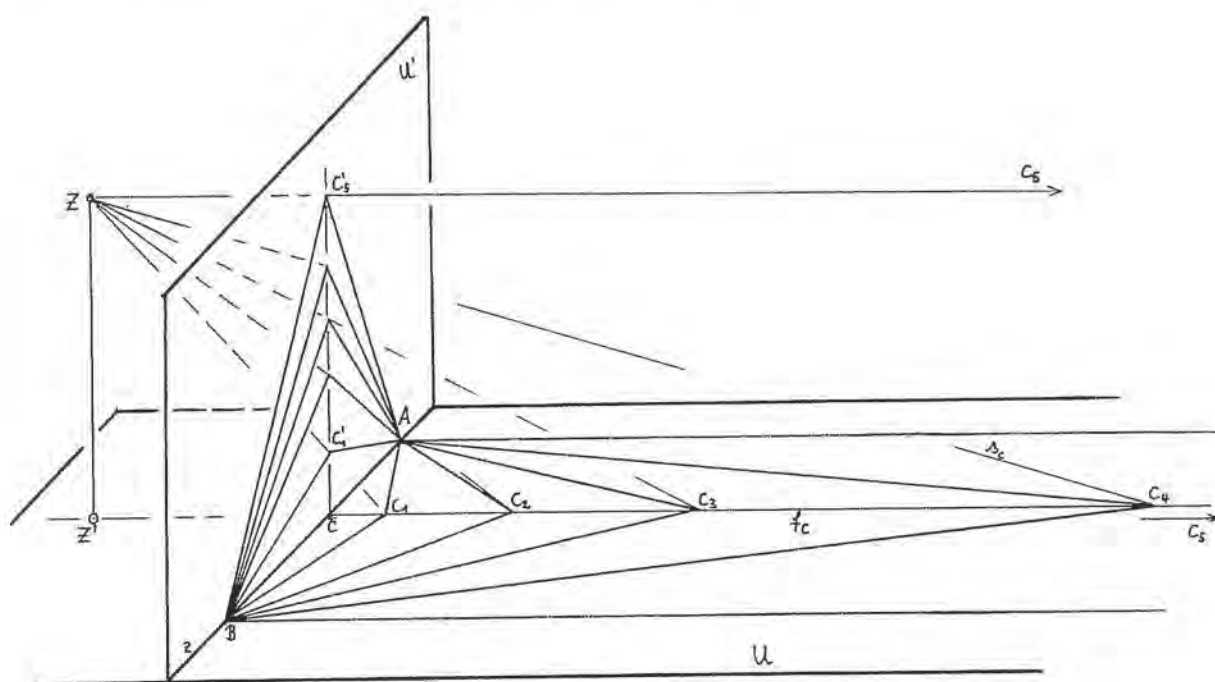


Abbildung 1

Das Zeichnen der Punkte C_1' bis C_4' und der zugehörigen Bilddreiecke fällt nicht weiter schwer und ist eine Wiederholung. Wie muss man aber das „Bilddreieck“ Nummer 5 zeichnen? An dieser Stelle führe ich eine sehr gründliche, ausführliche und lebhafte Diskussion mit den Schülern, die etwa folgende Gesichtspunkte anspricht:

- Der Punkt C wandert auf f_c mit einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit nach rechts. Damit wandert der Bildpunkt von C auf einer Senkrechten (warum?) zur Achse z nach oben und verlangsamt dabei seine Geschwindigkeit. Diese Wanderung soll kontinuierlich vorgestellt werden.
- Welche Bewegung macht bei dieser Wanderung z.B. die Ebene E_1 durch B, C und C' sowie die durch A, C und C'? Lässt sich durch ihre Lage begründen, dass bei C_5 s_c parallel zu f_c sein muss?
- Der Sehstrahl s_c durch Z beschreibt ein Strahlenbüschel durch Z. Der Sehstrahl muss bei C_5 parallel zur Urbildebene U und damit parallel zu f_c sowie den beiden Dreiecksschenkeln verlaufen, damit er f_c nicht mehr schneidet.
- Damit ist das Konstruktionsprinzip für Fluchtpunkte gewonnen: Ziehe den Grundrissstrahl f_c und Sehstrahl s_c parallel zu den gegebenen Parallelen; da, wo f_c z schneidet, sei $\bar{C}$. Errichte eine Senkrechte zu der Achse z auf $\bar{C}$. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Sehstrahl zu C_5 ist der gesuchte Fluchtpunkt C_5' . Durch diesen geht waagerecht, parallel zu z, der Horizont.

Die Frage, wo denn dieser Urbildpunkt C_5 bei Parallelität der Dreiecksseiten ist, wird von Schülern immer mit: „Er ist im Unendlichen“ oder: „Den gibt es nicht mehr“ beantwortet. Ich ermuntere sie dann immer, sich den Vorgang des Verschwindens genau vorzustellen: Wenn man den Punkt C als Schnittpunkt der Geraden AC und BC bewusstseinsmäßig auf seiner Wanderung nach rechts begleitet, wie ist es dann vorstellbar, dass er ins Unendliche verschwindet? Wie sieht der Moment aus, in dem die beiden Geraden parallel werden, ich aber den Punkt im Bewusstsein halten will? Schüler schildern ihre Erlebnisse an dieser Grenze als ein Flackern, sie kämen ins Taumeln, es würde ihnen schwindlig. Diese äußerste Grenze, wo die Vorstellung an das Unvorstellbare angrenzt, ist der Graubereich, in dem die noch physisch abgestützte Tätigkeit des Menschen versucht, einen Zipfel des rein gedanklichen, geistigen Bereichs zu erhaschen. Das Erlebnis, das die Schüler dabei haben können, erwies sich immer als nachhaltig wirkend, weil sie dann die weiteren rein *gedanklichen* Schritte als Befreiung erleben konnten.

Was die Schüler zu diesem Zeitpunkt ganz sicher wissen und festhalten können, ist, dass wenn die Geraden parallel werden, es keinen Schnittpunkt im Endlichen mehr gibt. In welchem Sinne es ihn gibt oder nicht, lasse ich hier offen. Ist C_5 aber ins Unendliche verschwunden, lässt er im Endlichen die zwei parallelen Geraden zurück. C_5 ist also nur als zuende gekommener Prozess des Verschwindens bzw. Parallelwerdens der Geraden zu denken. Damit wird aber eine eindeutige Richtung festgelegt.

Es bietet sich jetzt an, die Sprechweise „Der Punkt C_5 ist in Richtung f_c in das Unendliche verschwunden“ einzuführen. Das Verschwinden hat ja zwei Aspekte: Einerseits kann man darunter verstehen, dass der Punkt nicht mehr existiert (in welchem Sinne auch immer) und

andererseits lässt es sich auch so deuten, dass er nur verborgen, also nicht mehr wahrnehmbar ist. Jeder Schüler kann sich in diesem Stadium die ihm gemäße Lesart heraussuchen. Keinesfalls darf der Unterricht so angelegt werden, dass den Schülern die Fernelemente „verordnet“ werden, so dass sie an deren womöglich noch vorstellbare Existenz glauben sollen.

Auf die nähere begriffliche Bestimmung des Unendlichen verzichte ich an dieser Stelle völlig. Ich versuche durch die Methodik und die weitere Stoffauswahl so vorzugehen, dass diese Frage für die Schüler als drängend erlebt wird und dass zumindest geahnt wird, dass von der Art der Antwort viel abhängt – einerseits innermathematisch und andererseits auf das Vertrauen bezogen, dass sie zu ihrem Denken gewinnen wollen. Mit der Einsicht und dem Gefühl, dass man diese Frage überhaupt beantworten muss, steht und fällt das Erlebnis an den Fernelementen.

Überlegungen zur Gliederung des Hauptunterrichtes am Beispiel der zentriert-linierten Kollineation

Aus der Zentralprojektion ergibt sich ganz natürlich durch kontinuierliches Absenken des Projektionszentrums bzw. Augpunktes die zentriert-linierte Kollineation. Nach Vorübungen²⁵ bearbeite ich dann mit den Schülern eine Zeichnung, bei der ein Dreieck von der Vertikalebene in die Horizontalebene projiziert wird und das Zentrum Z die ganze senkrechte Gerade durch Z und Z' durchläuft (vgl. Abbildung 2²⁶).

²⁵ Bernhard (1984), S. 45ff

²⁶ ebd. S. 46, leicht abgewandelt

Konstruiert man nun das vierte Dreieck auf gleiche Weise, gehen die Seiten A_4C_4 und B_4C_4 nach vorne auseinander. Jetzt finden wir den Schnittpunkt C_4 , da keine Parallelität mehr vorliegt, hinter der Vertikalebene. Das kann man ganz nüchtern feststellen, da es sich aus der kontinuierlich zu denkenden Bewegung der Dreiecksseiten ergibt. In diesem Moment führt die Zeichnung aus dem Anschaulichen heraus und in das abstrakte Geometrische hinein, folgt man doch hier nur noch der Vorgabe, dass sich die beiden Schenkel des Bilddreiecks in einem Punkt C_4 auf f_C schneiden müssen, da sie nicht parallel sind. Diese Klippe muss man mit den Schülern mit viel Schwung nehmen. Im Erleben des Formverwandlungsprozesses deutet sich ja immer die nächste Form an. Die Dreiecksschenkel *müssen* sich also irgendwann vorne öffnen und die Spitze C_i ergibt sich dann als ihr Schnittpunkt. Keinesfalls darf das hier problematisiert werden, sondern erst am nächsten Tag. Dies gelingt vor allem dann gut, wenn die Schüler stark in diesem Formverwandlungsprozess leben. Dazu ist auch eine sehr saubere, schöne Tafelzeichnung nötig, die die Prozesse übersichtlich darstellt und den gemeinsamen Wahrnehmungsprozess auf sich zentriert. Sehr wichtig ist dabei, dass kein Schüler mitzeichnet, wenn an der Tafel etwas entwickelt wird. Ebenso wichtig sind umfassende Anweisungen vor einer Stillarbeit, so dass die Schüler dann auch ungestört arbeiten können und so beides Mal in einen wirklichen Wahrnehmungsprozess kommen.

Bei der fünften Station erkennt man, dass der Sehstrahl durch A parallel zu f_A ist: A_5 ist also ins Unendliche verschwunden. Der Schnittpunkt der Parallelen zu f_A durch F_{AC} mit f_C ist der Punkt C_5 . Da die Verbindungsgerade von F_{BC} und C_5 parallel zu f_B ist, stellt man fest, dass B_5 auch im Unendlichen verschwunden ist.

Projiziert man das Dreieck von Z_6 aus, ist das Bilddreieck wieder im Endlichen, aber hinter der Vertikalebene. Liegt das Zentrum Z nun unterhalb der Horizontalebene (Z_7), erscheint das Bilddreieck zwischen Z' und der Vertikalebene. Die Seite A_7B_7 hat aber die Ecke C_7 „überholt“.

In diesem „Darstellungsteil“ treten die neuen Phänomene, also die Dreiecke, die durch das Unendliche hindurchgehen, für den Schüler auf, ohne dass sie schon in einen gedanklichen Rahmen eingeordnet wurden: also nicht Theorie-geleitete Wahrnehmung und Prüfung schon vorher aufgestellter Hypothesen, sondern direkter Anprall von Neuem, Dunklem in direkter Unmittelbarkeit. Dabei muss darauf geachtet werden, dass es nicht nur zu einer blassen Vorstellungstätigkeit kommt, oder zu einer halbbewussten Urteilsbildung, die die Vorstellungsbilder gruppiert und zusammenstellt. Die Schüler müssen zu einem „Schluss“ kommen, an dem „der ganze Mensch“ beteiligt ist.²⁸ Sie müssen das Erlebnis haben: „So ist das also, wenn sich das Zentrum Z nach unten bewegt.“ Dazu braucht es eine konzentrierte, ruhige Stimmung und Zeit. Der Lehrer darf nicht zu viel erklären müssen, unnötiges Reden ist zu vermeiden. Die Sache spricht für sich – spricht sich selbst aus. Alle Elemente und die Ent-

²⁸ Steiner, R.: GA 302, Dornach, Aufl. von 1951, S. 42f

hungsweise der Figur sind für die Schüler klar durchschaubar. Sie konnten sie „verständlich“ wahrnehmen.

Dabei sind in diesem Falle die Phänomene einerseits die äußerlich produzierte Zeichnung mit den verschiedenen Stadien der Dreiecksverwandlung und andererseits die Erlebnisse und Gedanken, die der Schüler beim Zeichnen an seiner Tätigkeit in sich selbst wahrnimmt. In der sich anschließenden Charakterisierung muss nun der ganze Bewegungsvorgang der Dreiecke noch einmal an die Erinnerung appellierend durchgegangen werden. Bei Klassen, die sehr stark in der geometrischen Vorstellung leben können, kann man dies auch bei weggeklappter Tafelzeichnung tun, so dass die Rekapitulation ganz ohne äußere Anschauung geschieht. Ich habe immer versucht, dass die Schüler die Bewegung kontinuierlich verlaufend, die einzelnen Stationen als Momentaufnahmen eines Ganzen erfassend, erleben. Dabei ist es aber wichtig, dass zuvor die Bewegungsverhältnisse im Einzelnen in den Blick genommen werden, ohne aber schon begrifflich exakt Gesetze zu formulieren:

- Betrachtet man nur die Bewegungen des Dreiecks in der Horizontalebene, sieht man, dass bei den ersten vier Stationen der Bildpunkt von C viel schneller auf seinem Fixstrahl f_C wandert als die Bildpunkte von A und B auf ihren Fixstrahlen. Ab einem bestimmten Punkt kehren sich die Verhältnisse um, und die Bildpunkte von A und B werden schneller als der Bildpunkt von C. Das Bilddreieck verschwindet zwischen Station 6 und 7 im Punkt Z' und kommt wieder zum Vorschein. C_7 liegt jetzt hinter der Seite A_7B_7 . Die Bildpunkte von A und B bewegen sich eine Zeitlang schneller als der von C, was sich aber wiederum umdreht, wenn das Bilddreieck auf der Achse z zu liegen kommt.
- Als nächster Schritt kann noch die Bewegungsgeschwindigkeit von Z auf der senkrechten Geraden h zu der Bewegung des Bilddreiecks in Bezug gesetzt werden: Wo sind Bereiche, in denen Z sehr schnell wandert, das Bilddreieck sich aber kaum bewegt, und wo ist es genau anders herum?
- Wie verändern sich die Winkel bei der Bewegung?²⁹

Bei der Charakterisierung können auch gefühlsmäßige Anteile und Humoriges betont werden. Wo haben wir uns ganz besonders geplatzt? Was ist das nicht für ein geradezu skurriles Dreieck Nummer vier, das durch das Unendliche hindurchgeht! usw. Es kann innerlich ein wenig gemütlich werden. Die Schüler sollen die „Schlüsse“, die sie im Darstellungsteil gezo-

²⁹ Dieses Thema bietet auch Anlass zur Vertiefung: Sind die beiden Geraden AC_i und BC_i parallel, so ist der Winkel $\gamma = 0$ und $\alpha = \beta = 90^\circ$. Die Winkelsumme ist auch in diesem Fall noch 180° . Kommt C_i hinter der Vertikalebene wieder, werden die Winkel α und β jeweils größer als 90° . Denkt man nun den Prozess des Kleinerwerdens des Winkels γ kontinuierlich weiter, so muss sein Winkelbeitrag bei der Winkelsumme negativ in Anschlag gebracht werden. Auch dann ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Das stimmt auch insofern, als sich die Orientierung von γ beim Gang durchs Unendliche umgedreht hat.

gen haben, innerlich „befühlen“, so dass sie einen persönlicheren Bezug zu den Tatsachen bekommen, denen sie sonst fremder gegenüberstehen würden. Die strenge Fesselung des Ichs an die äußeren Tatsachen wird durch die Phantasietätigkeit wieder ein wenig gelöst und belebt.

Man kann immer noch einer gelungenen Charakterisierung an den Schülern wahrnehmen, dass sie unmittelbar zufrieden sind und sich wohlfühlen. Der Darstellungsteil hat immer etwas Anstrengendes, Forderndes, das die Charakterisierung ein wenig zu lösen vermag. Es ist für die Schüler ein zunächst Abgeschlossenes entstanden, was nicht unmittelbar einlädt, intellektuell befragt zu werden. Wollen die Schüler jetzt schon mit der gedanklichen Bearbeitung beginnen, ist entweder das sinnliche Eintauchen und die Schlussbildung nicht intensiv genug, also nur vorstellungshaft und damit blass geblieben, oder die Charakterisierung nicht gefühlsmäßig zufriedenstellend, nicht abrundend und zusammenfassend gelungen.

Den Hauptunterricht des nächsten Tages beginne ich mit dem Betrachtungsteil. Dieser ist immer ein wenig antipathisch geprägt; die Schüler sollen ihre Gedankenschärfe erproben können, sie sollen „gestupft“, „sich selbst ad absurdum führen“, „sich selbst aufsitzen“ können.³⁰ Der gedankliche Zusammenhang und Kern der Dinge sollen hier in den Blick genommen werden. Dabei ist vor allem wichtig, was die Schüler selbst an Begriffen und Urteilen bilden, welche Zusammenhänge ihnen aufgehen und nicht, was der Lehrer sagt oder was schon seit Generationen in Schulbüchern wiedergekaut wurde. Dabei ist weniger daran gedacht, schnell und ökonomisch das mathematisch Wesentliche aus den Schülern herauszufragen, sondern in echtem Dialog die Phänomene zu betrachten, von verschiedenen Seiten zu beleuchten und die Konsequenzen der gebildeten Gedanken nach außen und innen abzuwägen: Was bedeutet ein Dreieck, das durch das Unendliche geht, für die Geometrie, die bisher gelernt wurde?³¹ Was bedeutet es für mich, der ich es denke? Muss ich dann auch andere Vorstellungen von der Welt revidieren, verändern und erweitern? Es soll sich eine gemeinsam erlebbare geistige Atmosphäre bilden, an der auch die Schüler, die gedanklich nicht in alle Verästelungen mitgehen können, Anteil nehmen und sich daran entwickeln können. Verspätet eintreffende Schüler stören diesen Prozess sehr, so dass ich dazu übergegangen bin, diese erst nach dem Betrachtungsteil, also unter Umständen erst um 8.45 Uhr, hereinzubitten.

In dem hier dargestellten Fall bietet die Figur der Abbildung 2 für einen Betrachtungsteil unerschöpflich viel Stoff. Ich habe u.a. folgende mathematische Aspekte bearbeitet:

- Die Menge aller Sehstrahlen durch A bilden eine Ebene, die senkrecht auf der Horizontalebene steht und durch die Gerade h geht, auf der die Zentren liegen. Diese E-

³⁰ Steiner, R.: GA 300b, S. 95f. Steiner äußert sich hier in Bezug auf den Vortragszyklus, Menschenkenntnis und Unterrichtsgestaltung (GA 302)

³¹ vgl. z.B. Fußnote ²⁹

bene schneidet sich mit der Horizontalebene in f_A . Alle Bildpunkte liegen demzufolge auf Geraden, die durch Z' gehen.

- Die Ebene E_i , die von der Dreiecksseite AC und dem jeweiligen Zentren Z_i aufgespannt wird, schneidet die Horizontalebene in der Geraden durch die jeweiligen Punkte A_i und C_i . Da E_i auch Punkt F_{AC} enthält, der auf der Achse z liegt, gehen alle Geraden A_iC_i durch den Punkt F_{AC} .
- Den genauen Bewegungsmodus der Punkte und Geraden des Dreiecks kann man also so zusammenfassen:

Punkte wandern auf Geraden, die durch einen Punkt gehen und Geraden drehen sich um Punkte, die auf einer Geraden liegen.

Hier deutet sich schon die Dualität an, die ich aber meist erst am nächsten Tag im Betrachtungsteil begrifflich fasse und beim Thema „Kern und Hülle“ vertiefe.

- Dieser Bewegungsmodus trifft auch auf die Geraden durch A_i und B_i zu, da diese alle durch den Punkt F_{AB} gehen, der in ihrer Richtung, also auch in der Richtung der Achse z , ins Unendliche verschwunden ist. Der Drehung der Geraden A_iB_i um diesen Punkt entspricht in diesem Fall eine Parallelverschiebung dieser Geraden.

Folgende eventuell aufkommende Fragen behandle ich nicht begrifflich genauer, sondern halte sie nur als solche fest:

- Z durchläuft die senkrechte Gerade genau einmal, wenn der Sehstrahl z.B. durch Punkt A eine 180° Drehung macht (keine Voldrehung!). Dabei macht das Bilddreieck aber einen kompletten Verwandlungszyklus durch.
- Betrachtet man die Station 4 anschaulich und stellt sich vor, dass man A , B und C punktweise abgebildet hat, so werden A_4 und B_4 auf die *Oberseite* der Horizontalebene projiziert. Denkt man jetzt aber konsequent weiter, so projiziert man C_4 auf die *Unterseite* der Horizontalebene (vgl. Abbildung 3)

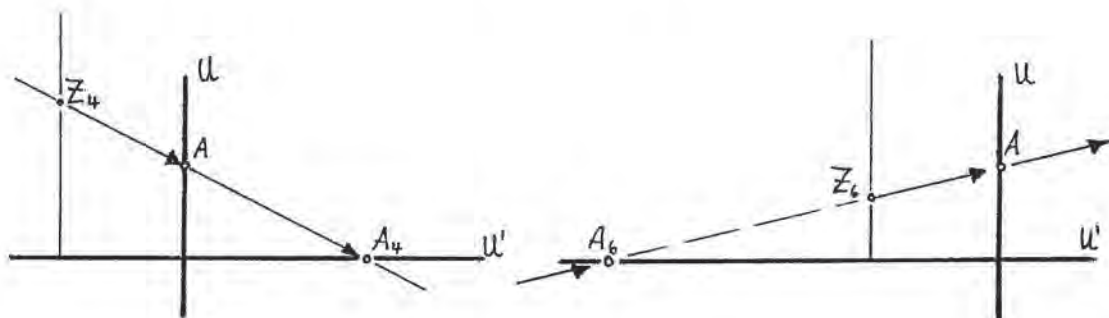


Abbildung 3

Bild- und Urbildebene im Querschnitt gesehen

- Wenn Punkt A und B im Unendlichen verschwunden sind, was ist dann mit der Verbindungsgerade von A und B? Ist sie vollständig im Unendlichen? Ist sie eindeutig bestimmt?

Nach diesem Betrachtungsteil folgt im sich anschließenden Darstellungsteil die Behandlung der zentriert-linierten Kollineation in der Ebene nur aus ihrem eigenen Bewegungsmodus heraus. Dabei lege ich die Zeichnung als Vorlage so an, dass die Stationen der Dreiecke genau denen der vorigen entsprechen. Dazu müssen die „Anführerpunkte“ entsprechend gewählt werden (vgl. Abbildung 4).

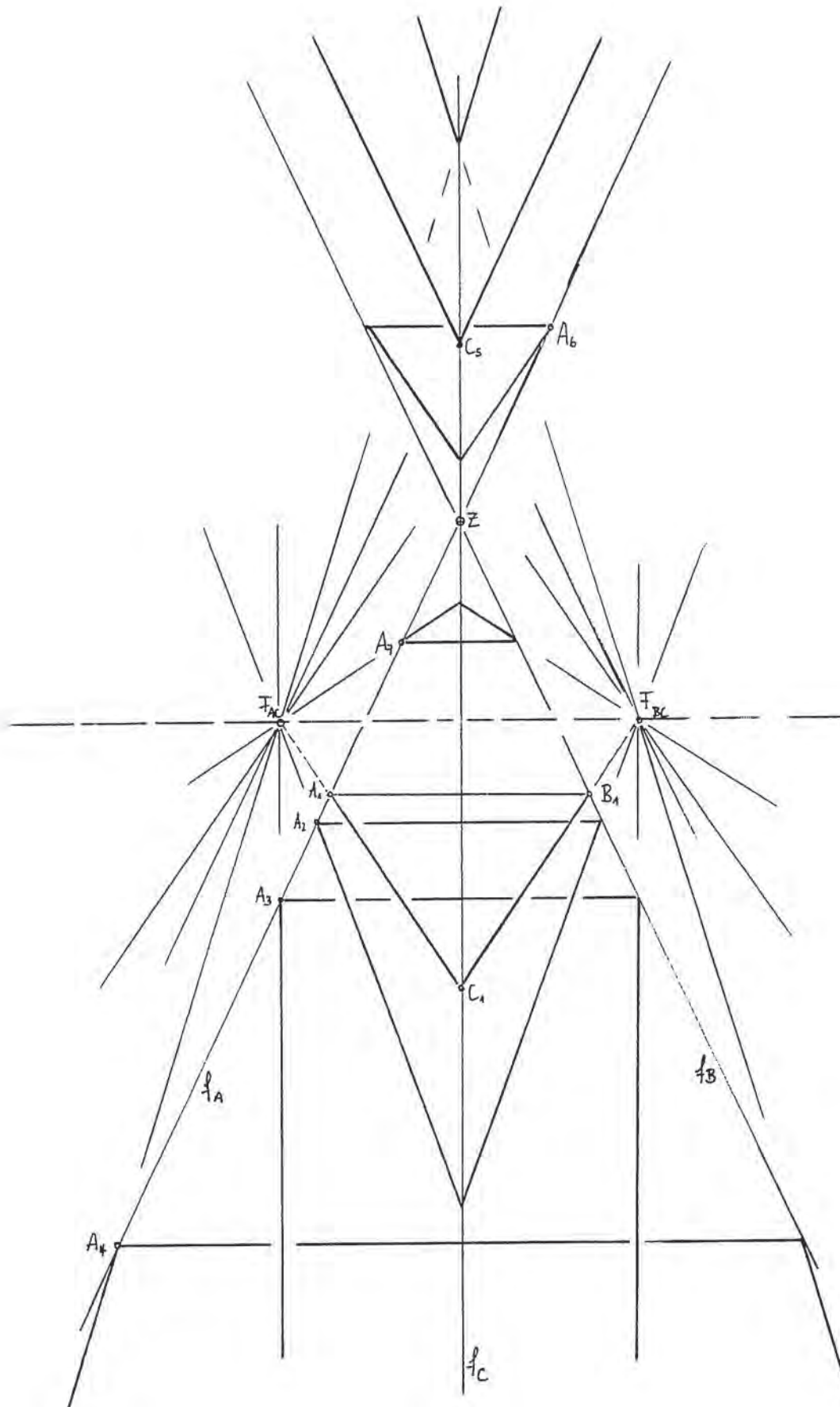


Abbildung 4³²; vorgegeben sind A_1 , B_1 und C_1 ; Anführerpunkte sind A_2 , A_3 , A_4 , C_5 und A_6 .

³² leicht verändert nach Bernhard (1984), S. 48

Weitere Übungen schließen sich an, ebenso wie die Spezialfälle, die sich je nach Lage des Zentrums Z und der Achse z bezüglich der Ferngeraden ergeben. Damit können die verschiedenen Abbildungsarten, die seit der Mittelstufe gelernt wurden, unter dem einheitlichen Gesichtspunkt der zentriert-linierten Kollineation gefasst werden.³³

Spätestens dabei wird die Redewendung „ein Punkt ist in einer bestimmten Richtung im Unendlichen verschwunden“ abgekürzt, in dem nur noch von „Fernpunkten“ gesprochen und die dazugehörige Richtung gekennzeichnet wird. Aber auch hier ist darauf zu achten, dass es immer wieder Schüler geben wird, die zu diesem Zeitpunkt noch kein echtes Erlebnis der Realität im eigenen Denken an den Fernelementen haben konnten. Deshalb kann man für sie das Fernelement als *Redewendung* betonen und nicht so sehr als konkretes Ding. Vielleicht stellt sich das Erlebnis erst viel später ein.

An dieser Stelle drängen aber die Schüler meist nach der weiteren begrifflichen Durchdringung des Unendlichen. Hier ist dann vor allem herauszuarbeiten und festzuhalten, dass auf jeder Geraden nur ein Fernpunkt liegt und dass alle Fernpunkte auf einer Geraden, der Ferngeraden, liegen.

Ersteres ist aus allem Vorigen klar. Für Letzteres ergeben sich zwei Aspekte:

- Da bei der Zentralprojektion Punkte auf Punkte und Geraden auf Geraden abgebildet werden, muss der Horizont als Träger aller Fluchtpunkte im Sehbild Bild einer Geraden sein, deren Punkte alle Fernpunkte sind: die Ferngerade.
- Mit Einführung der Fernpunkte ist als grundlegende Erkenntnis deutlich, dass zwei Geraden immer genau einen Schnittpunkt haben und dass es zu zwei Punkten immer genau eine Verbindungsgerade gibt. Die Ferngerade erfüllt nun genau dieses Kriterium auch und gliedert sich damit gedanklich zusammenhängend in die Gesetze der bisherigen Geometrie ein. Oft kommt der Einwand der Schüler, alle Fernpunkte lägen auf einem Kreis mit unendlich großem Radius. Die Verbindungslinie der Fernpunkte sei also als Kreis zu denken. Damit würde man aber die verschiedenen Lagebeziehungen zwischen Kreis und Geraden zu berücksichtigen haben. Da aber jede Gerade mit der Ferngeraden *einen* Fernpunkt gemeinsam hat und jeder Fernpunkt sich mit jedem endlichen Punkt mittels genau einer Geraden verbinden lässt, muss auch die Verbindung zweier Fernpunkte eine Gerade sein.

Gelingt dieser dreistufige Aufbau mit Darstellungs-, Charakterisierungs- und Betrachtungsteil und dazwischenliegender Nacht, bekommt das Unterrichtsgeschehen eine besondere Dynamik und entwickelt einen starken Zug. Die Schüler verbinden sich mit dem sich entfaltenden Inhalt und können darin und damit leben. Das zeigen auch die tiefen Fragen, die die Schüler gerade in dieser Epoche teilweise unverhüllt stellen, die meist auf das Verhältnis des

³³ ebd. Kap. 15

eigenen Ichs zum Denken zielen und in einem nächsten Schritt ausblickhaft nach dem Zusammenhang des Ichs zur Welt und zur Wirklichkeit suchen.

Kern und Hülle – die Struktur der projektiven Ebene

In einem nächsten Schritt habe ich immer das Thema der Zerlegung des Punktfeldes mittels einer Anzahl von Geraden sowie das duale Problem der Zerlegung des Geradenfeldes durch eine Anzahl von Punkten behandelt.³⁴ Einerseits entwickle ich an diesem Thema die topologische Struktur der Ebene und andererseits lässt sich damit ganz besonders gut der Dualitätsgedanke verdeutlichen: Eine mit Geraden als selbständig aufgefasste Entitäten angefüllte Ebene, in der Geradenfelder durch Punkte voneinander abgegrenzt werden, die zwar dann disjunkt sind, sich aber doch für unser „Punktbewusstsein“ überschneiden, verlangt die Fähigkeit, Bekanntes einmal völlig anders anzuschauen.

Ich will jetzt hier aber nur einen an das Vorhergehende anschließenden Aspekt herausgreifen. Betrachtet man die Gliederung des Punktfeldes durch drei Geraden, ergeben sich vier dreiseitige Gebiete: eines ganz im Endlichen liegend und drei über die Ferngerade hinweg sich erstreckende. Geht man nun einmal in Gedanken um das Gebiet Nummer II herum: Man beginne im Punkt A, gehe zu B und dann nach unten Richtung C aber über die Ferngerade hinüber. Dabei zeige man mit dem rechten Arm in das Innere des Bereiches. Hat man nun die Ferngerade überschritten, deutet man immer noch mit demselben Arm in das Innere der Figur. Scheinbar ist es jetzt aber der linke Arm geworden. Ebenso hat sich der Drehsinn des Dreiseits umgekehrt.

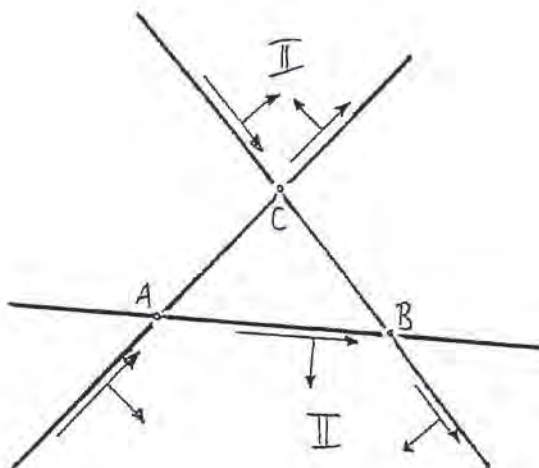


Abbildung 5: Die Teilung des Punktfeldes durch drei Geraden

³⁴ Die mathematischen Hintergründe lese man z.B. nach bei Bernhard (1984), S. 53ff; Locher-Ernst, L. (1957): Raum und Gegenraum, Dornach, S. 47ff; Burkhardt, R. (1986): Elemente der euklidischen und polareuklidischen Geometrie, Stuttgart, S. 14ff

Um diesen Widerspruch aufzulösen, muss man sich vorstellen, dass man sich auf der „Rückseite“ der Ebene befindet. Das erscheint auch plausibel, da wir bei der zentriert-linierten Kollineation schon auf solche Phänomene gestoßen sind. Der Drehsinn der Dreiecke drehte sich um, wenn sie die Ferngerade überschritten hatten. Die Sehstrahlen durch die Urbildpunkte A, B und C müssen also eine Volldrehung machen, wenn das Dreieck wieder an der gleichen Stelle ankommen soll (vgl. Abbildung 2), denn nach einer 180° -Drehung befindet sich das Dreieck tatsächlich auf der „Unterseite“ der Ebene (vgl. Abbildung 3).

Um die Phänomene im Endlichen der Vorstellung zugänglich zu machen, demonstriere ich Beispiele solcher Ebenen, bei denen man ohne einen Rand zu überschreiten „die Seite wechseln“ kann: Einmal das Möbiusband und das andere Mal die Kleinsche Flasche. Diese Modelle werden von den Schülern allerdings berechtigterweise ambivalent erlebt: Einerseits erkennen sie die geniale Einfachheit der Entsprechung und andererseits spüren sie sehr stark den Modellcharakter dieser Flächen. Sie geben die Verhältnisse doch nur sehr unvollkommen wieder. Und man muss aufpassen, dass sich keine falschen Vorstellungen einschleichen, die die Schüler verwirren könnten. Nach dem Zauber der erstaunlichen Erkenntnisse wirken diese vollständig dem vorstellenden Verstand zugänglichen Flächen auf alle Fälle etwas ernüchternd.

Weitere mögliche Themen der Epoche

Die Wahl der weiteren zu behandelnden Themen hängt möglicherweise davon ab, ob man die projektive Geometrie als Prüfungsthema für das Abitur wählen will und kann.

Ich habe immer noch gerne den Satz von Desargues als Grundbaustein vieler Figuren behandelt und seine Verbindung mit den zentriert-linierten Kollineationen hergestellt.

Ein weiteres sehr ergiebiges Thema sind die projektiv erzeugten Kegelschnitte, weil die Schüler nochmals von einer ganz anderen Perspektive das Dualitätsprinzip kennen lernen können. Es kann außerdem exemplarisch gezeigt werden, wie von einem höheren (projektiven) Standpunkt konkrete Einzelercheinungen (die drei sehr unterschiedlich erscheinenden Kurven Ellipse, Parabel, Hyperbel) unter einen allgemeinen Begriff gefasst werden können. Das Thema schließt auch unmittelbar an das Geometrische Zeichnen (Darstellende Geometrie) der 9. Klasse an, wo Ellipse, Parabel und Hyperbel als Ortskurve, Symmetrale usw. gezeichnet und besprochen wurden. Ferner lernen die Schüler diese Kurven auch noch einmal im Rahmen der analytischen Geometrie kennen.

Daran anschließend sind die Sätze von Pascal und Brianchon und ihre Sonderfälle sehr lohnenswert, auch weil sich hieraus zahlreiche Konstruktionsaufgaben bearbeiten lassen, die als Abiturthemen durchaus brauchbar sind.

Das Thema Pol und Polare behandle ich nicht nur vom projektiven Standpunkt sondern parallel dazu vom analytischen aus, um den Kontrast deutlich hervortreten zu lassen.

Bei der noch zu verlängernden Liste auch mathematisch äußerst ertragreicher Themen habe ich versucht, immer so auszuwählen, dass für die Schüler deutlich werden kann, wie das Unendliche urbildlich für das umkreishaft-peripherisch Geistige mit den Einzeldingen des Endlichen zusammenklingt bzw. wie sich Allgemein-Begriffliches als Wesen im Sinnlichen, der Erscheinung, ausgestaltet und differenziert.

Projektive Geometrie – eine Epoche in der 11. Klasse

Karl-Friedrich Georg

Vorbemerkung

Zusätzlich zu den Lehrplanangaben Rudolf Steiners zur 11. Klasse hat in den Waldorfschulen eine Epoche „projektive Geometrie“ ihren Platz gefunden, meistens anstelle der damals angeregten „Kugelgeometrie“. Durch diese Erweiterung der euklidischen Gedankenwelt lassen sich Beziehungen entdecken, die durch bloße Sinneswahrnehmung nicht gegeben sind und sich nur durch denkendes Betrachten ergeben. Durch synthetisches Vorgehen werden mit den geometrischen Elementen – ganz unabhängig von jeder Metrik – die Lagebeziehungen erfasst und geübt, diese in der Vorstellung in Bewegung zu bringen. Auf diesen Grundlagen kann in der 13. Klasse (wenn kein Zentralabitur vorgeschrieben ist) die Zentralprojektion metrisch behandelt und durch anspruchsvolle Aufgaben (rechnerisch und konstruktiv) in vielerlei Beziehungen geübt werden.

Seit den Anregungen, die Rudolf Steiner den Mathematikern gab, die projektive Geometrie als Grundlage für eine neue Denkungsart zur naturwissenschaftlichen Forschung zu erarbeiten, wurde dies insbesondere von George Adams (1933: „Strahlende Weltgestaltung“), Louis Locher-Ernst (1944: „Projektive Geometrie“, 1957: „Raum und Gegenraum“) und speziell als Grundlage für den Unterricht von Arnold Bernhard (1984: „Projektive Geometrie“) durchgeführt.

In drei Jahrzehnten hat sich mir immer wieder in verschiedener Weise gezeigt, dass diese Epoche eminent wichtig ist. Wenn auch die Begriffe der projektiven Geometrie nicht schwierig sind, sind sie jedoch in ihrer Art ganz neu und verlangen eine Denkungsweise, die durch das euklidische Denken und die analytische Methode nicht gegeben ist, nämlich ein qualitatives Verständnis der mathematischen Form. Somit können die Schüler Gedankenformen üben, die sie anders fordern und fördern, als dies mit den üblichen Lehrinhalten des Mathematikunterrichts der Fall ist.

Die folgenden Ausführungen entsprechen dem Inhalt und Gang einer vierwöchigen Epoche. In manchen Teilen habe ich mich an dem Buch von Arnold Bernhard orientiert, dessen Stofffülle gewaltig ist. Ich hoffe, dass dieser Epochengang besonders für anfangende Lehrer eine brauchbare Hilfe darstellt.

Gott gründ't sich ohne Grund und misst sich ohne Maß:

Bist du ein Geist mit ihm, Mensch, so verstehst du das.

Angelus Silesius (1624 - 1677)

Die Tätigkeit des Raumes und der Zeit ist die Schöpfungskraft,
und ihre Verhältnisse sind die Angel der Welt.

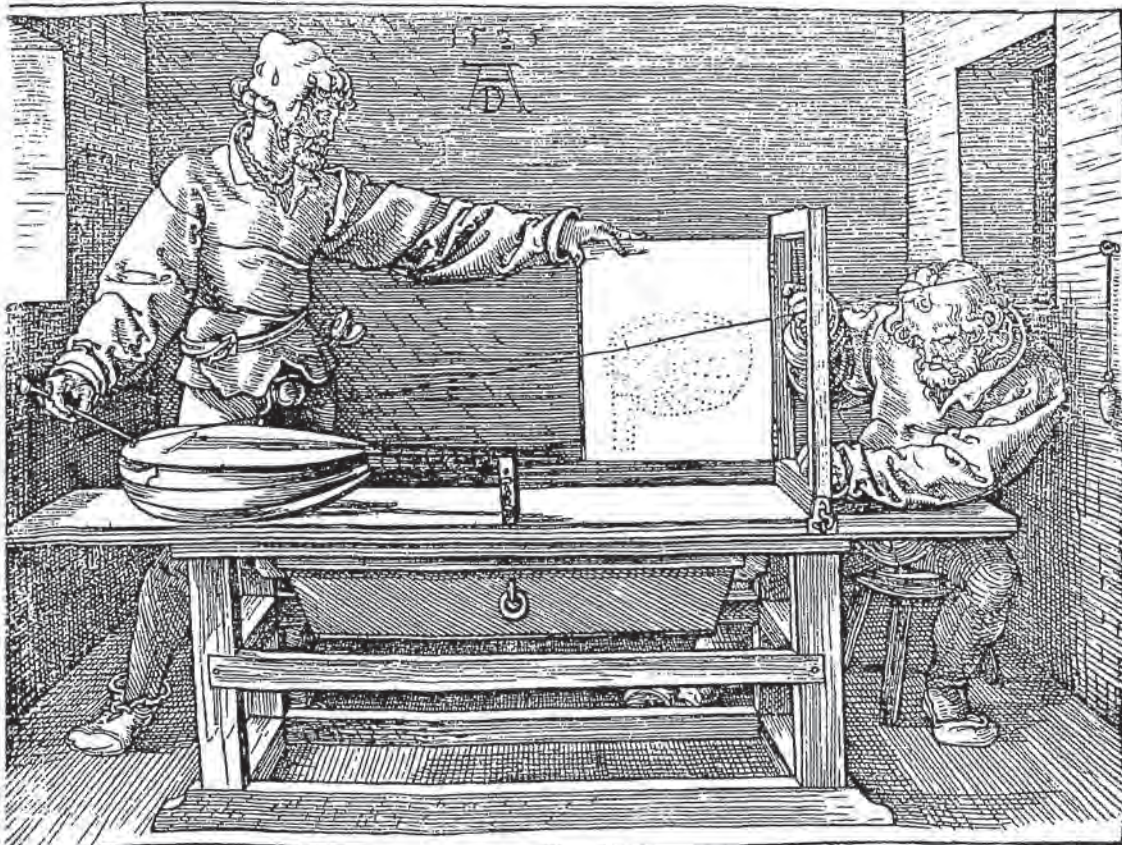
Novalis (1772 - 1801)

Was im Denken erfasst wird, ist auch in der Welt wirksam. Was in
der Welt lebt, kommt auch im Denken zur Offenbarung.

Louis Locher-Ernst (1906 - 1962)

1. Zentralprojektion

Unsere bisherigen geometrischen Betrachtungen befassten sich mit endlich großen Figuren. Etwa seit der Renaissance beschäftigten sich die Geometer und Künstler immer mehr mit geometrischen Fragestellungen, welche den Rahmen des Endlichen sprengen. Die Maler waren bestrebt, Bauwerke und andere räumliche Figuren so darzustellen, dass der räumliche Eindruck des Bildes übereinstimmt mit dem Eindruck der sinnenfälligen Wirklichkeit; dieses Problem lösten sie mit Hilfe der Perspektive. Wir werden sehen, dass die Perspektive nichts anderes ist als eine Zentralprojektion. Albrecht Dürer hat die Technik der Zentralprojektion in einer Abbildung anschaulich dargestellt:



Aus: Albrecht Dürer, "Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und dem Richtscheit",
Nürnberg, 1525

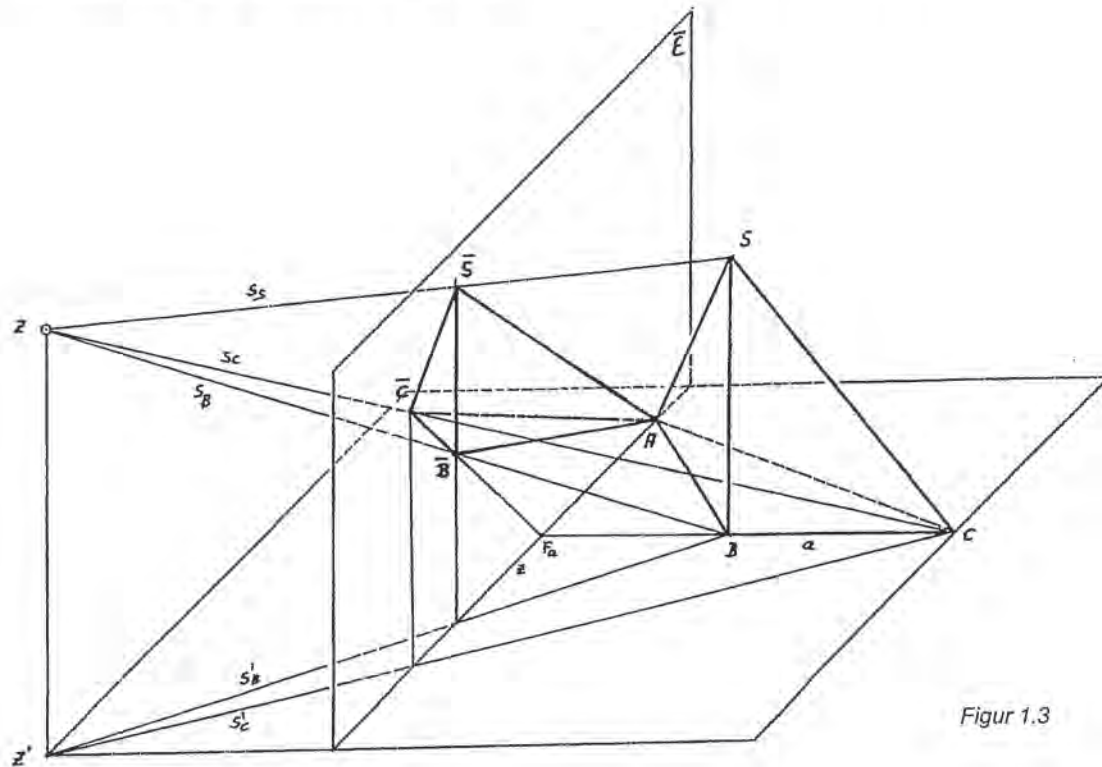
Von einem Zentrum aus (Ring an der Wand) wird ein Faden zu jedem Punkt eines darzustellenden Gegenstandes hingeführt. Zwischen Zentrum und Gegenstand wird eine Bildebene gestellt. Wo der Faden durch die Bildebene geht, wird ein Punkt markiert; er ist der Bildpunkt des Punktes am Gegenstand. Bringen wir unser Auge an die Stelle des Zentrums, so sehen wir jeden Bildpunkt mit seinem Urbildpunkt in derselben Richtung. In der Sprache der Geometrie: Die Menge der Urbildpunkte (meist räumlich angeordnet) und die Menge der Bildpunkte (immer in der Ebene angeordnet) sind zentriert zueinander; jeder Urbildpunkt liegt mit seinem Bildpunkt im selben Projektionsstrahl durch das Zentrum. Diesen Abbildungsvorgang nennen wir eine **Zentralprojektion**.

Bei der Fotografie und beim Diaprojektor handelt es sich auch um Zentralprojektionen.

1. Aufgabe: Projiziere das gegebene Dreieck ABC der Ebene ε in die Horizontalebene $\bar{\varepsilon}$.
(Figur 1.1)
2. Aufgabe: Projiziere das Dreieck ABC von Z aus in die Horizontalebene $\bar{\varepsilon}$. (Figur 1.2)

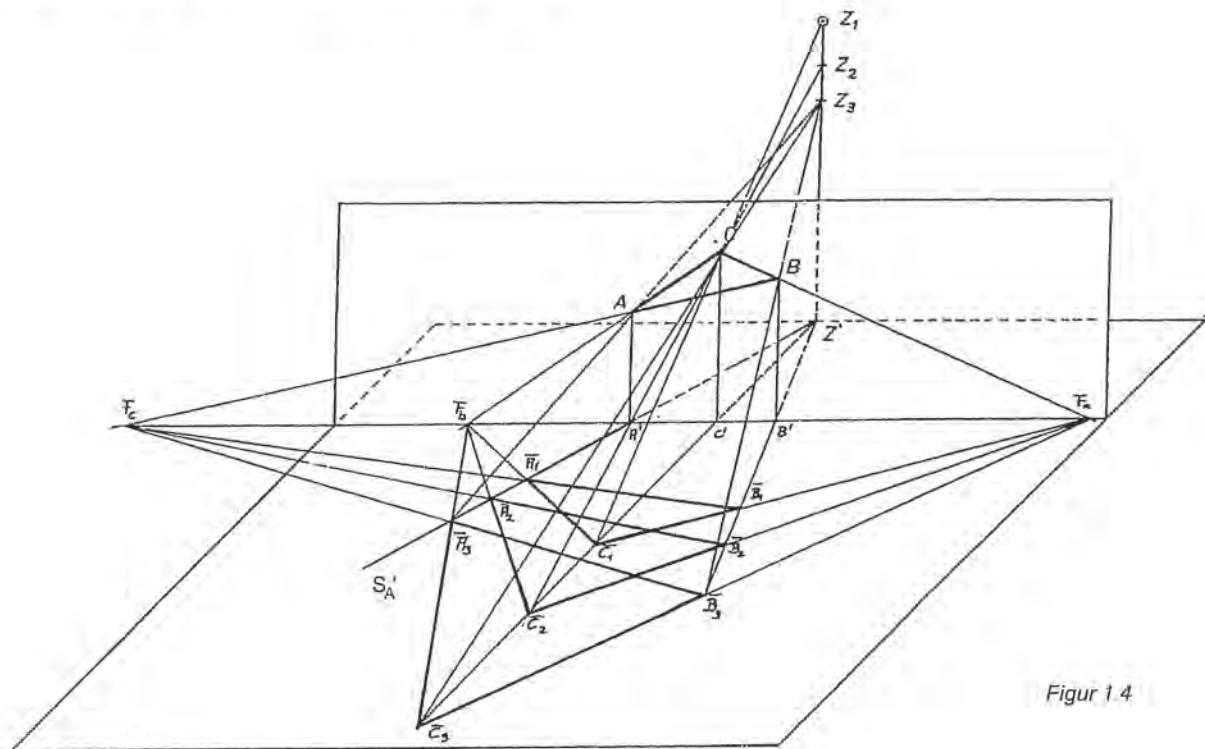
Die verlängerten Dreiecksseiten a, b, c in ε und ihre Bilder $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ in $\bar{\varepsilon}$ schneiden sich in der „Achse“ z . Während jeder Punkt der Geraden a auf einen entsprechenden Bildpunkt in $\bar{a}$ abgebildet wird, ist der gemeinsame Punkt von a und $\bar{a}$ in der Achse z der einzige

3. Aufgabe: Auf der Tischfläche stehe die Pyramide $ABCS$ ($S \perp$ über B). Sie soll von Z in die „Wand“ projiziert werden. (Figur 1.3)



Figur 1.3

4. Aufgabe: Projiziere das Dreieck ABC von Z aus in die Horizontalebene und lasse dann die „Kerze“ Z_1Z' herunterbrennen! (Figur 1.4)



Figur 1.4

Wir richten unsere Aufmerksamkeit einmal auf den Punkt A: Wenn Z_1 sinkt (Stationen Z_2 und Z_3), so bewegen sich die Bildpunkte $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ in der festbleibenden Projektion s'_A der sich um den Punkt A drehenden Projektionsstrahlen. Entsprechendes gilt für die Ecken B und C. Die Dreiecksseiten drehen sich um ihre Fixpunkte F_a, F_b und F_c .

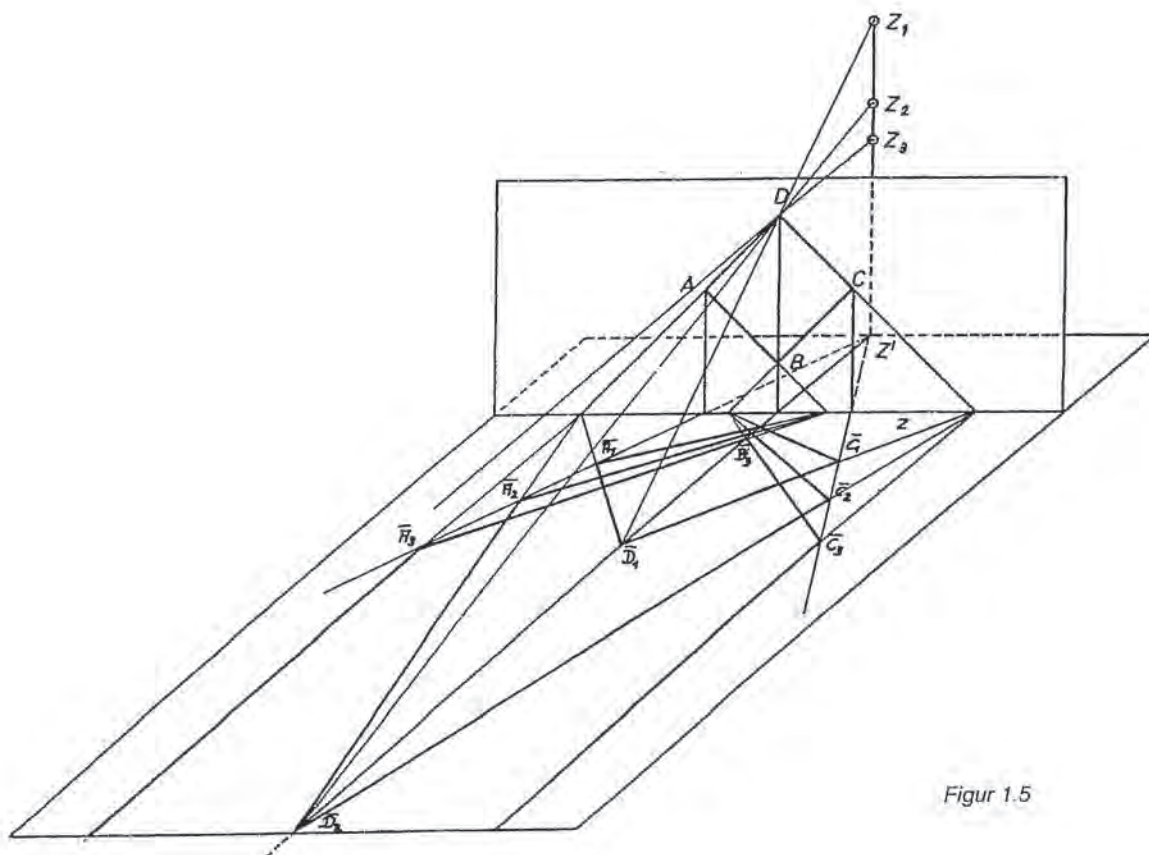
Wir können zwei Gesetze formulieren:

1. Die Ecken des Dreiecks laufen in Geraden (Fixgeraden), die durch ein Zentrum Z' gehen.
2. Die Seiten des Dreiecks drehen sich um Fixpunkte, die in einer Linie (Achse) z liegen.

Eine so gesteuerte Bewegung nennt man eine **zentriert-linierte Kollineation**.

Ein zweites Beispiel einer zentriert-linierten Kollineation ist die

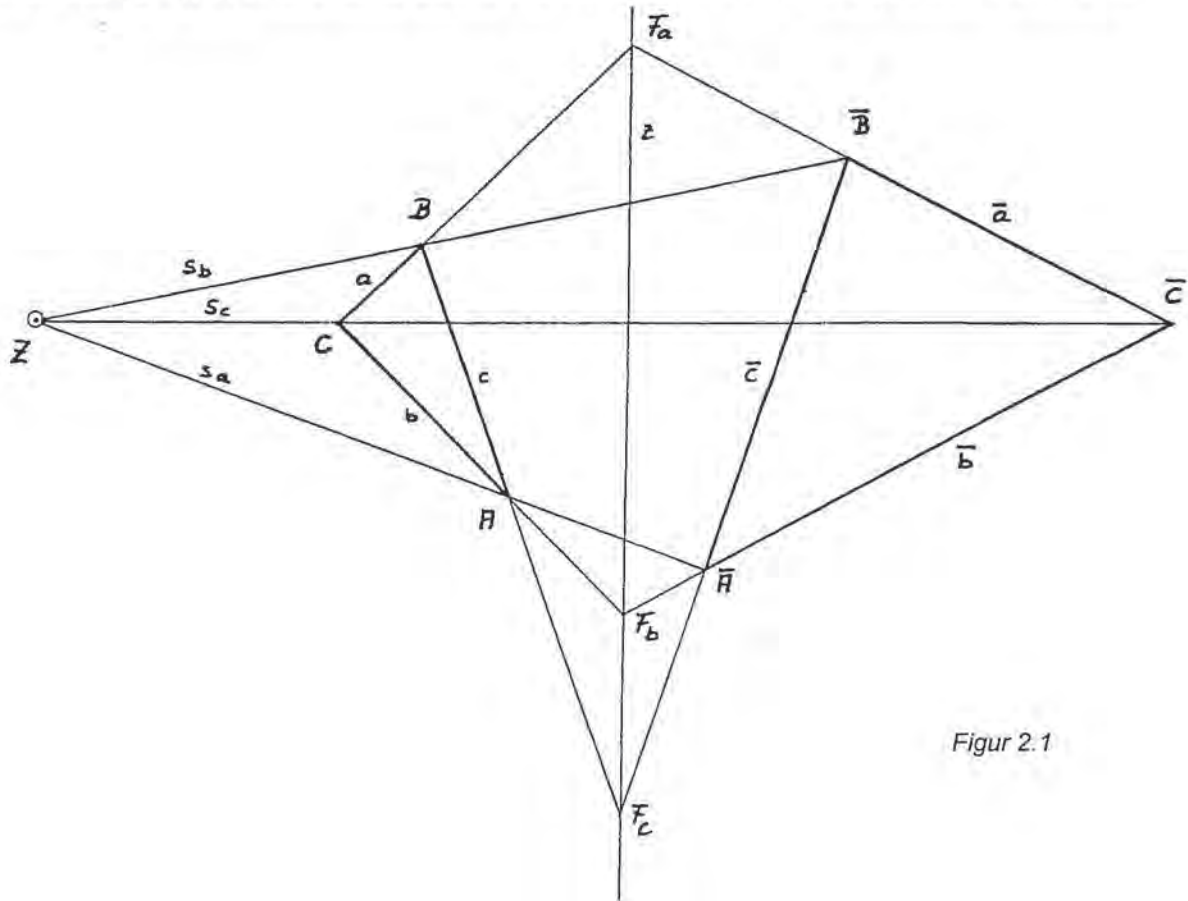
5. Aufgabe: Man projiziere das Quadrat ABCD vom Zentrum Z_1 aus in die Horizontalebene und lasse dann das Zentrum auf die Stationen Z_2 und Z_3 absinken (Z_3 hat eine besondere Lage!).



Figur 1.5

2. Der Satz von Desargues

Wenn wir die gesamte Anordnung der Figur 1.2, also Urbilddreieck ABC , Bilddreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, das Zentrum Z , die Achse z , die Geraden a, b, c und die Projektionsstrahlen s_a, s_b, s_c , die Fixpunkte F_a, F_b, F_c in eine dritte Ebene projizieren, so kann man folgendes Bild erhalten:



Und wir erkennen, dass in der Ebene gelten muss:

Können die Ecken zweier Dreiecke so verbunden werden, dass die Verbindungsgeraden durch ein Zentrum Z gehen, so liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Achse z .

Diese Gesetzmäßigkeit wurde von dem französischen Architekten Girard Desargues (1591 - 1661) im Jahre 1639 entdeckt und ist in der projektiven Geometrie als der „Satz von Desargues“ bekannt:

Gehen die Verbindungsgeraden sich entsprechender Ecken zweier einander zugeordneter Dreiecke durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte sich entsprechender Dreiecksseiten in einer Geraden – und umgekehrt.

In den folgenden Figuren 2.2 und 2.3 haben wir zwei verschiedene Anordnungen der Desargues'schen Konfiguration. Wir ändern nun teilweise die bisherigen aus der Zentralprojektion verwendeten Bezeichnungen:

die Verbindungsgeraden zugeordneter Dreiecksecken: p, q, r .

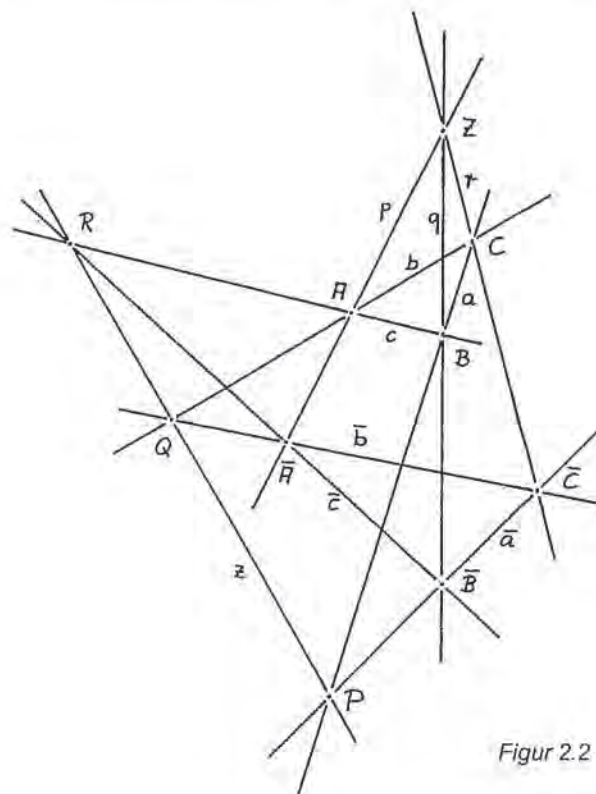
die Schnittpunkte sich entsprechender (verlängerter) Dreiecksseiten: P, Q, R .

p, q, r gehen durch Z ; P, Q, R liegen in z .

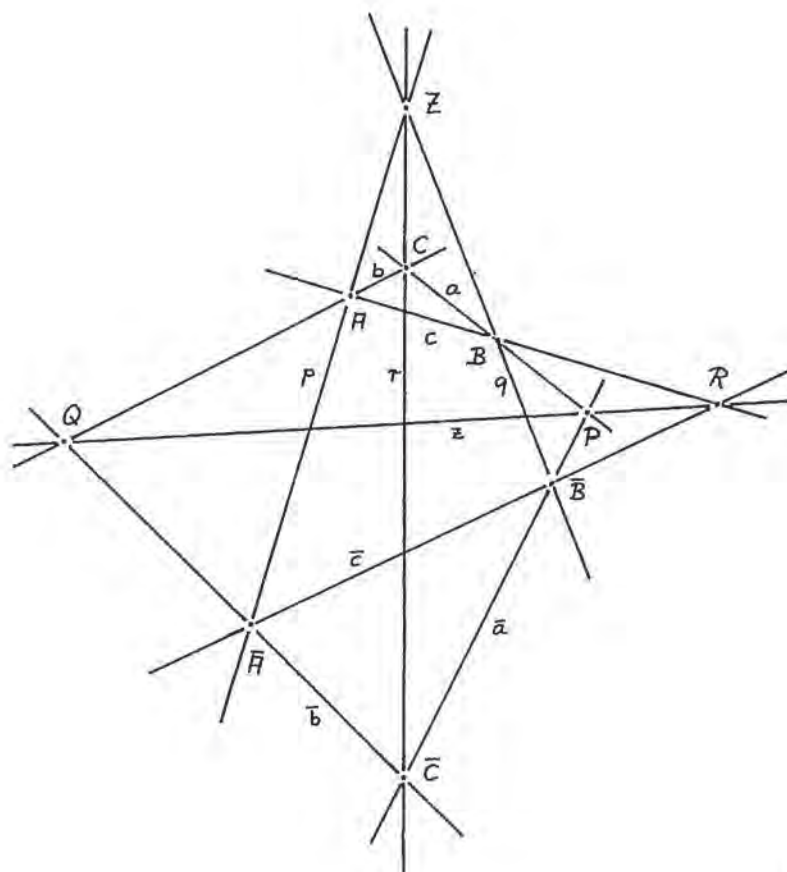
Auch wenn die Lage der Dreiecke verändert wird, die Gesetzmäßigkeit bleibt bestehen.

Beim Betrachten der Desargues'schen Konfiguration erkennen wir einige Besonderheiten:

1. Symmetrie im Aufbau: 10 Punkte ($A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, P, Q, R, Z$);
10 Geraden ($a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, p, q, r, z$).
2. Es liegen in jeder der 10 Geraden genau 3 dieser Punkte,
es gehen durch jeden der 10 Punkte genau 3 dieser Geraden.
3. Jede dieser Konfigurationen von 10 Punkten und 10 Geraden kann auf 10 verschiedene Arten als Zuordnung entsprechender Dreiecke aufgefasst werden: Jeder Punkt kann die Rolle jedes beliebigen anderen Punktes übernehmen, und für die Geraden gilt das Gleiche. So kann z. B. jeder der 10 Punkte die Bedeutung von Z als Schnittpunkt der Verbindungsgeraden sich entsprechender Ecken haben, dabei erhält jede Gerade einmal die Bedeutung von z als die Verbindungsgerade der Schnittpunkte sich entsprechender Seiten (dies wird in den Figuren 2.4 bis 2.13 als Übung ausgeführt, die hier nicht abgebildet sind).



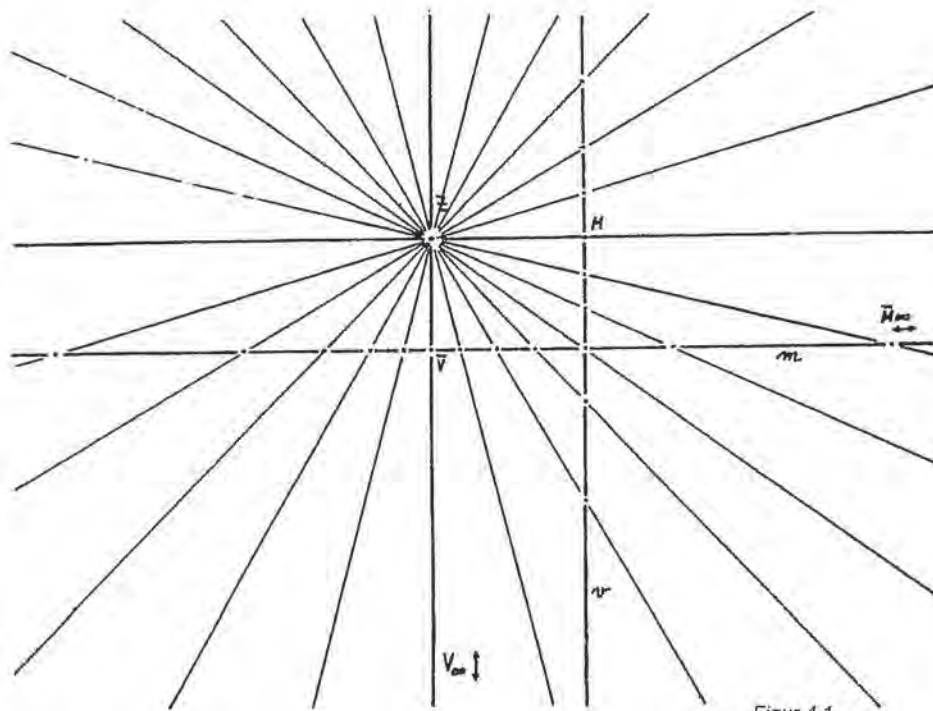
Figur 2.2



Figur 2.3

3. Wachsende Dreiecke

Wir lassen jetzt das Dreieck ABC der Figur 1.1 in die Höhe wachsen, und zwar so, dass es gleichschenkelig bleibt. (Figur 3.1). Erreicht die Spitze des Urbilddreiecks die Stelle C_4 (gleich hoch wie das Zentrum Z), dann ist der Projektionsstrahl parallel zur Geraden m und bleibt oberhalb der Horizontalebene. Die Ränder des Bilddreiecks liegen auch parallel zu m . Der Projektionsstrahl zu C_5 trifft die Horizontalebene $\bar{\varepsilon}$ in $\bar{C}_5$. Die nach rechts verlaufenden Dreiecksseiten sind nun „überparallel“, die Fläche verschwindet rechts in der Ferne und erscheint links aus der Ferne.



Figur 4.1

Die hier beschriebene Zuordnung zwischen Punkten der Punktreihen v und m , vermittelt durch das Geradenbüschel Z , nennen wir eine perspektive Abbildung der Punktreihen aufeinander.

Die Punktreihen m und v haben je einen unendlich fernen Punkt (Fernpunkt), der der Vorstellung prinzipiell nicht mehr zugänglich ist, der nur durch das Denken erfasst werden kann.

4.2. Die unendlich ferne Gerade (Fernergerade) einer Ebene

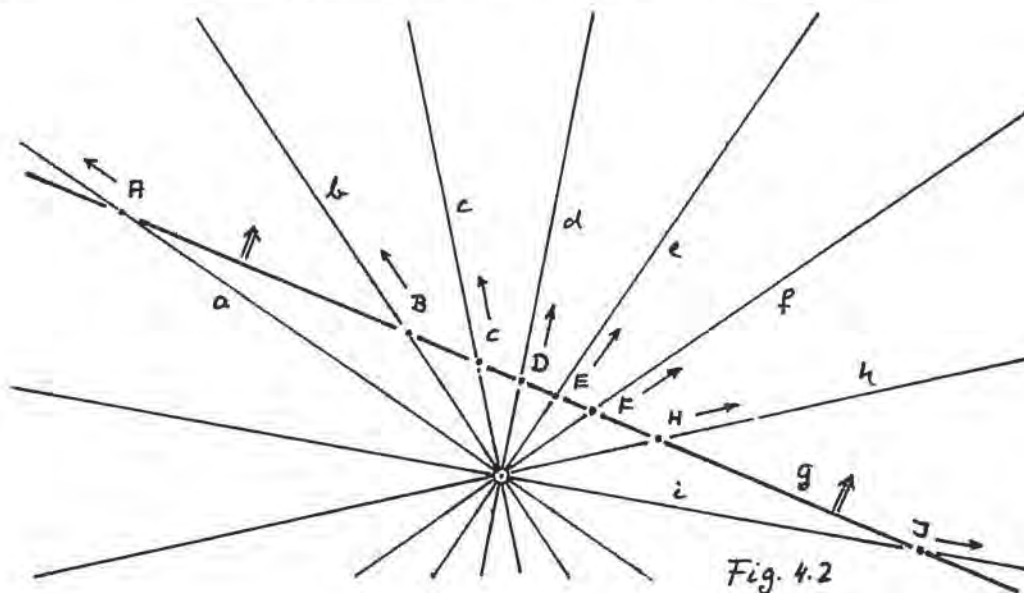


Fig. 4.2

Eine beliebige Gerade g der Ebene schneidet jede Gerade eines Geradenbüschels in einem Punkt. Lässt man g immer weiter nach außen laufen, so werden diese Schnittpunkte, die ja in g liegen, im Grenzfall zu Fernpunkten der Ebene. Da die Eigenschaft, dass g eine Gerade

ist, nicht verloren gehen soll, kann man durch eine solche Betrachtung zu der Auffassung gelangen, dass die Menge aller Fernpunkte der Ebene die Ferngerade (unendlich ferne Gerade) als Trägergerade habe. Diese Ferngerade der Ebene hat mit jeder anderen Geraden der Ebene genau einen Punkt gemeinsam, und zwar jeweils den Fernpunkt (allerdings hat sie selbst keine bestimmte Richtung).

Zur folgenden Konstruktion (Figur 4.3): Die Spitze eines Dreiecks wandere in einer Horizontalen g , in der Höhe des Zentrums Z . Alle Punkte der Geraden g werden auf unendlich-ferne Punkte (Fernpunkte) abgebildet. Umgekehrt liegt das Urbild jedes Fernpunktes in g . Da die Zentralprojektion einer Geraden selbst eine Gerade ist, liegt das Urteil nahe: Die unendlich fernen Punkte einer Ebene liegen alle in einer Geraden, der unendlich fernen Geraden (Ferngerade) der Ebene (siehe oben). Die Geraden des Parallelgeradenbüschels haben einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt. Er ist der Träger des Parallelgeradenbüschels.

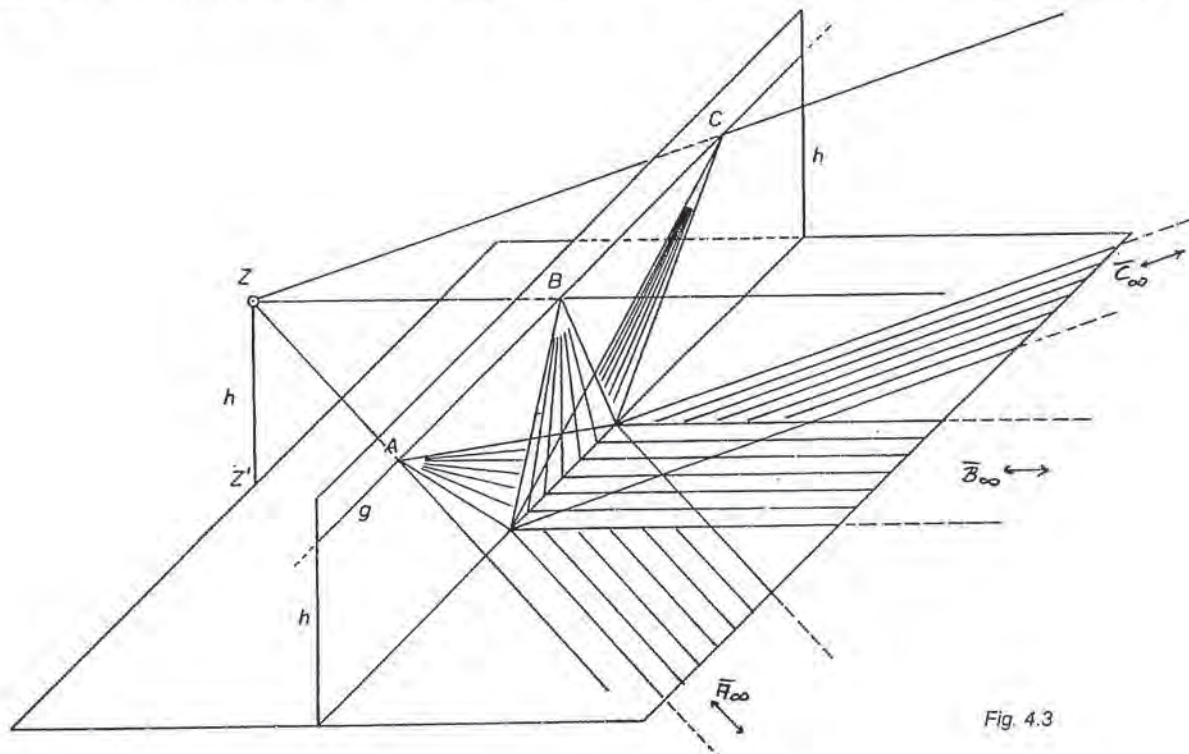


Fig. 4.3

Betrachten wir in einer Ebene wachsende konzentrische Kreise um einen festen Mittelpunkt mit ihren Tangenten. In Figur 4.4 sind in einigen Kreispunkten die Tangenten angedeutet. Die Tangenten wandern parallel zu sich selbst nach außen. Werden die Kreise immer größer, so nimmt die Krümmung der Kreislinie ab. Im Grenzfall, wenn der Kreistradius unendlich groß ist, gibt es keine Krümmung mehr und Kreislinie und sämtliche Tangenten liegen in der Ferngerade g_∞ der Ebene. Da unter den Tangenten sämtliche Richtungen vertreten sind, nimmt g_∞ alle diese Richtungen in sich auf.

Beim Wachsen der Kreise werden von den Tangenten alle Geraden der Ebene einmal durchlaufen und die Kreise überstreifen alle Punkte der Ebene.

Die Gesamtheit aller Geraden der Ebene nennen wir **Geradenfeld**, die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene nennen wir **Punktfeld**. Denken wir die Geraden- und Punktfeldgesamtheit derselben Trägerebene zugleich, so sprechen wir einfach vom ebenen Feld. Das ebene Feld ist der Schauplatz der ebenen Geometrie.

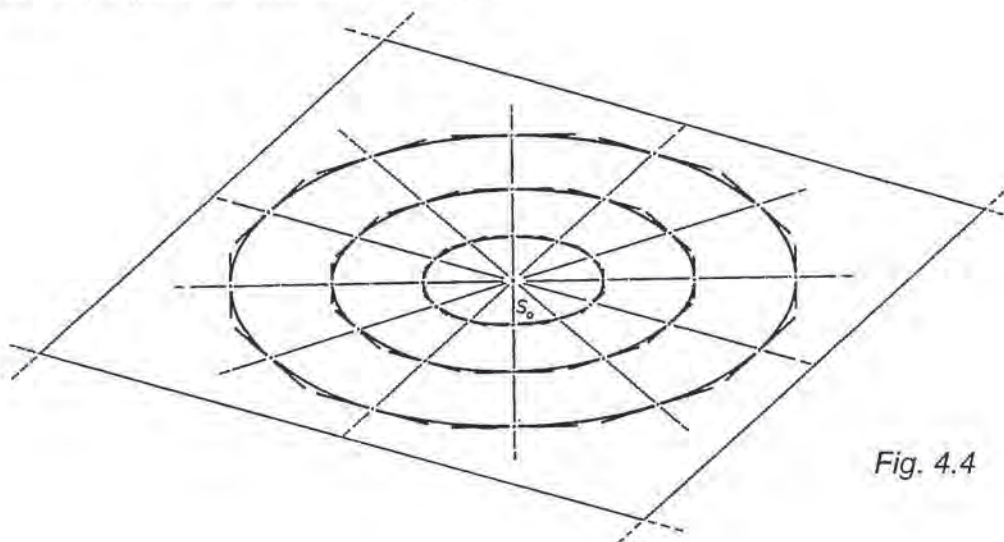


Fig. 4.4

4.3. Die unendlich ferne Ebene (Fernebene) des Raumes

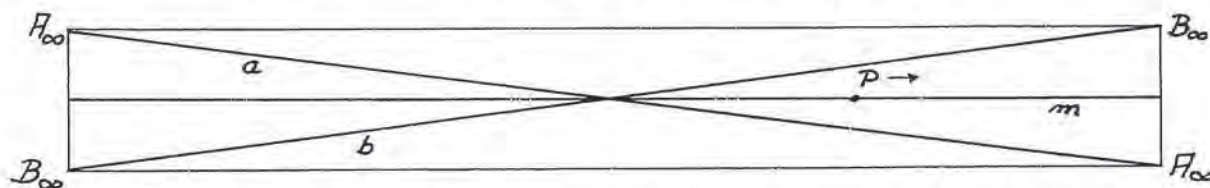
Es ergibt sich eine interessante Fragestellung: welcher Art ist das Gebilde, das die Gesamtheit aller Fernpunkte des Raumes sowie alle Ferngeraden erfasst? – Zunächst wissen wir, dass jede Gerade des Raumes genau einen Fernpunkt hat. Außerdem hat jede Ebene des Raumes genau eine Ferngerade. Durch eine kleine Überlegung erkennen wir unmittelbar, dass irgend zwei Ferngeraden sich stets in einem Fernpunkt schneiden, die beiden Ferngeraden spannen so – ideell – eine Ebene auf. Um dies einzusehen, betrachten wir zwei "normale" Ebenen, die sich in einer Geraden g schneiden. Zunächst wissen wir Folgendes: Die Ferngerade der einen Ebene schneidet die Schnittgerade g in ihrem Fernpunkt. Das Gleiche tut die Ferngerade der anderen Ebene. Damit gehen die Ferngeraden beider Ebenen durch ein und denselben Punkt hindurch, den Fernpunkt der Geraden g .

Es erscheint somit sinnvoll, die Fernelemente des Raumes als in ein und derselben Ebene liegend zu denken (nicht vorzustellen!). Diese Ebene bezeichnet man als Fernebene (unendlich ferne Ebene) des Raumes. Sie erscheint uns, wie alle anderen Ebene, in einem doppelten Aspekt: einmal als ebenes Punktfeld der Fernpunkte, das andere Mal als ebenes Geradenfeld der Ferngeraden. Diese Ebene – als ideelles Gebilde – grenzt den Raum ab, erweitert den „euklidischen Raum“, aber um dieses ideelle Gebilde. Man sagt, der euklidische Raum ist durch diese Fernebene des Raumes zum „projektiven Raum“ erweitert.

Durch die bisherigen Betrachtungen haben wir unser Bewusstsein über den ganzen Raum erweitert. Am Beispiel des geometrischen Vorstellens haben wir damit etwas erlebt, was im Erkennen überhaupt möglich ist: Bewusstseinsenerweiterung.

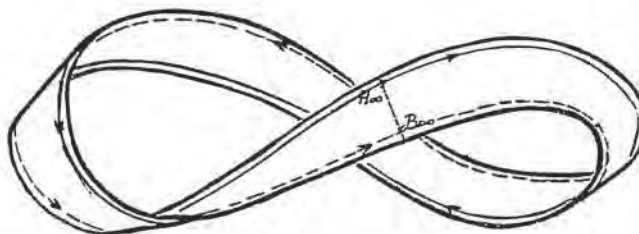
4.4. Die Struktur der Ebene. Das Möbius-Band

Nehmen wir einen langen rechteckigen Streifen Papier, so können wir ihn zu einem Ring zusammenkleben: ein geschlossenes Band, das eine Innen- und eine Außenfläche hat.



Wenn man den Papierstreifen als endlichen Ausschnitt einer Ebene ansieht, mit den Geraden a , b und m und ihn nun so zusammenklebt, dass der Fernpunkt A_∞ bzw. B_∞ jeweils zusammenfällt, so muss man den Streifen erst um 180° drehen: Wir haben nun das sog. Möbius-Band erhalten, das Aug. Ferd. Möbius

(1790-1868) im Jahre 1865 entdeckte: dieses Band hat nur eine Seite! Jeder Punkt kann in die „andere“ Seite gelangen, ohne den Rand zu überschreiten! Es hat folglich keine „Innen- oder Außen-



seite“, sondern es hat eine geschlossene Seite. Es besitzt auch nur einen Rand: Von einem Punkt des „oberen“ Randes ausgehend erreicht man einen Punkt des „unteren“ Randes, der dem Ausgangspunkt genau gegenüber liegt und man kommt schließlich am Ausgangspunkt wieder an.

Das Möbiusband stellt eine einseitige Fläche dar und es besitzt nur eine geschlossene Randlinie.

Denken wir uns da Band breiter, so haben wir das Modell einer Ebene. Sie ist als Ganzes einseitig, d. h. bei einem Durchgang der Ebene durch das Unendliche kommt man immer in die „andere“ Seite. Ein zweiter Durchgang ist nötig, um zum Ausgangspunkt zu kommen. Wir müssen folgern: die ganze Ebene ist eine einseitige Fläche.

5. Übungen

5.1. Wenn man die Fernelemente mit einbezieht ...

... kann man erkennen, dass der Desargues'sche Satz seine Gültigkeit behält.

1. Übung: Man zeichne die Desargues'sche Konfiguration mit $c \parallel \bar{c}$. Ergebnis: $R \rightarrow R_\infty$ (R wird zum Fernpunkt) (Fig: 5.1; diese und die folgenden sind nicht abgebildet).
2. Übung: Wie oben, jedoch zusätzlich $a \parallel \bar{a}$. Ergebnis: $z \rightarrow z_\infty$, ähnliche Dreiecke in perspektiver Lage (Fig. 5.2).
3. Übung: Z sei Fernpunkt. Ergebnis: affine Dreiecke in axialer Lage Fig. 5.3).

4. Übung: Z und z sind Fernelemente. Ergebnis: kongruente Dreiecke in verschobener Lage (Fig. 5.4).

Diese Übungen können auch umgekehrt begonnen werden: Z. B. unter welcher Bedingung sind die Dreiecke ähnlich? Unter welcher Bedingung sind sie kongruent?

5.2. Dreiecksverwandlung

Die Punkte A und B bleiben fest, C wandere in einer senkrechten Geraden.

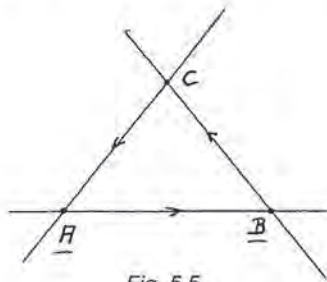


Fig. 5.5

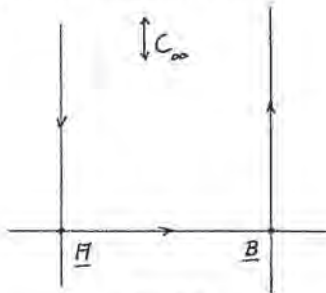


Fig. 5.6

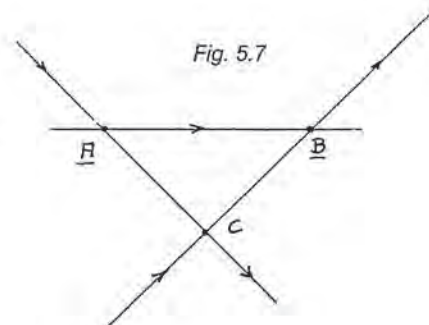


Fig. 5.7

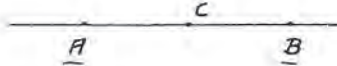


Fig. 5.8

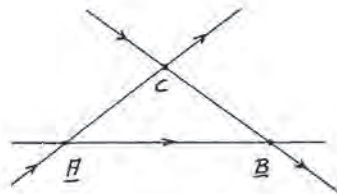


Fig. 5.9

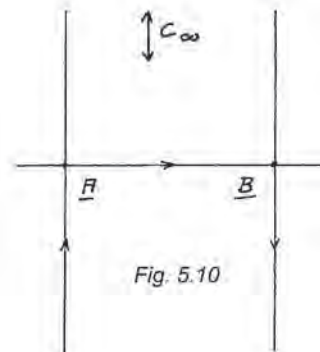


Fig. 5.10

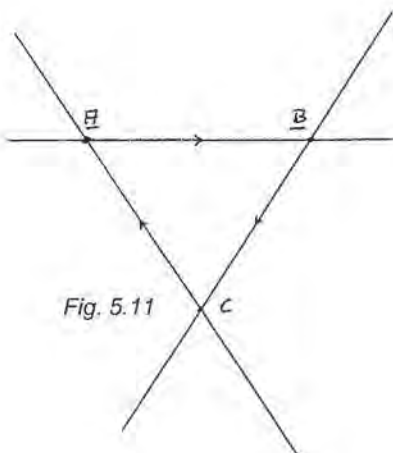


Fig. 5.11

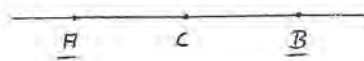


Fig. 5.12

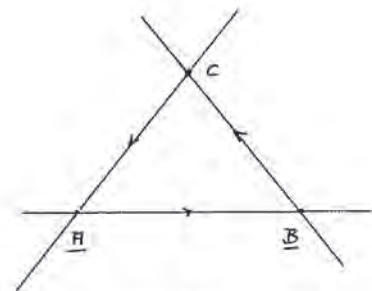


Fig. 5.5

Nach 5.7 kann man auch anders fortsetzen, z. B.

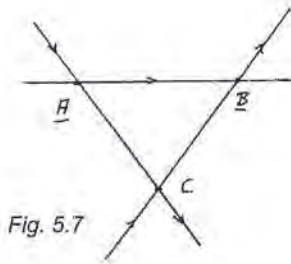


Fig. 5.7

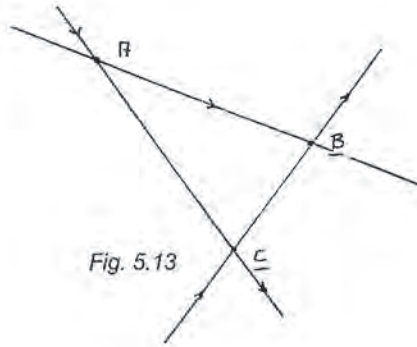


Fig. 5.13

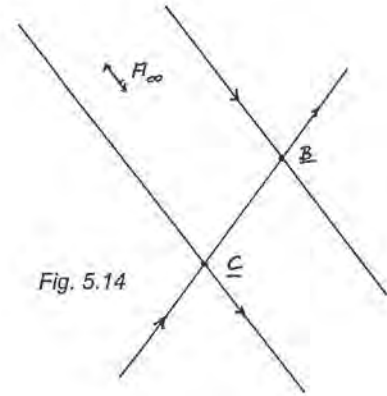
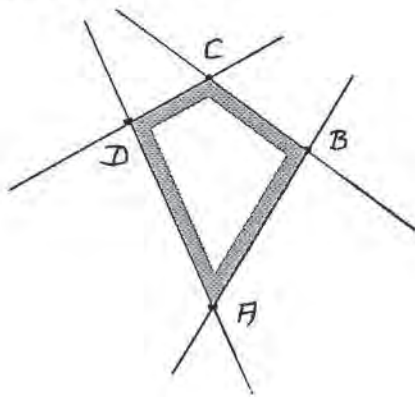


Fig. 5.14

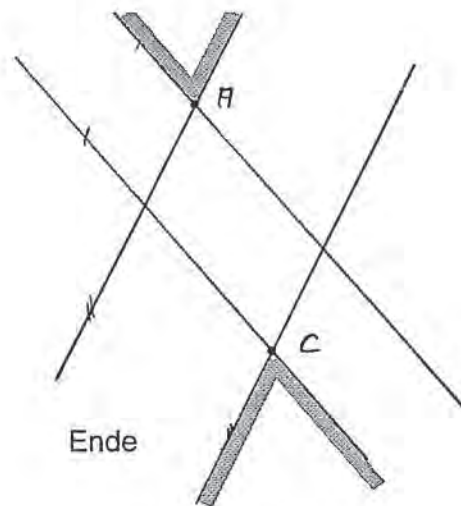
5.3. Vierecksverwandlungen

Auch die Verwandlung von Vierecken kann auf mannigfaltige Weise geübt werden. Eine Aufgabenstellung kann z. B. folgendermaßen lauten:

Gegeben sind die Anfangs- und die Endgestalt einer Metamorphose. Gesucht sind wesentliche Zwischenstufen.



Anfang



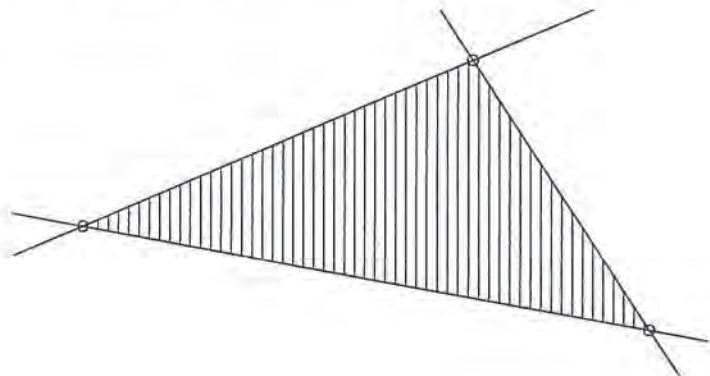
Ende

Zu den Dreiecksverwandlungen

Die gezeichneten Dreiecksfiguren weichen z. T. von der gewöhnlichen Vorstellung, die wir von Dreiecken haben, ab. Gewöhnlich stellen wir uns ein Dreieck etwa folgendermaßen vor:

- Es ist durch drei endliche Strecken begrenzt,
- es hat eine bestimmte Fläche,
- die Winkelsumme beträgt 180° .

Bei der nebenstehenden Skizze wäre der schraffierte Inhalt der drei Geraden ein bekanntes Dreieck.



Bei unserer Dreiecksverwandlung führen die Stadien 5.7 und 5.8 zu einer wesentlichen Gestaltveränderung: Wir würden die im gewöhnlichen Sinne nicht zu den Dreiecken zählen. Wesentliche Kennzeichen des Dreiecks 5.7 sind: Über das Unendliche führende Begrenzungsstrecken, die unendlich große Fläche und die Winkelsumme, die über 180° (bis zu 540°) anwachsen kann.

Eine mögliche Fortsetzung von Fig. 5.7: B und C bleiben fest und A läuft in der Geraden AC ins Unendliche (Fig. 5.14). Dieses Dreieck ist so wesentlich von der Gestalt des Ausgangsdreiecks verschieden, dass wir es kaum noch als Dreieck erkennen. Eine solche Gestaltverwandlung nennen wir eine

Metamorphose.

Metamorphosen sind Veränderungen, wo innerhalb des Veränderlichen etwas Gleichbleibendes beobachtet werden kann. Vergleicht man bei unserer Dreiecksmetamorphose die Anfangsgestalt (5.5) mit der Endgestalt (5.14), erkennt man, dass ein tiefgehender Gestaltwandel eingetreten ist.

Berühmt sind die Untersuchungen Goethes über Metamorphosen im Pflanzenbereich: Keimpflanze – Blattpflanze – Blütenpflanze – Fruchtpflanze sind ein und dieselbe Pflanze, obwohl (jahreszeitlich bedingt) ganz verschiedene Gestalten auftreten. Die Veränderungen können dabei ganz extrem sein, wenn nur der Gesichtspunkt, unter dem die Veränderung stattfindet, erkennbar bleibt, wie auch das Prinzipielle des veränderten Objekts.

6. Harmonische Teilung

6.1. Definition der harmonischen Teilung

Wird eine Strecke $\overline{AB}$ innen und außen im gleichen Verhältnis geteilt, so spricht man von einer harmonischen Teilung.



C ist der innere Teilungspunkt und D ist der äußere Teilungspunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Es gilt somit für die einzelnen Teilstrecken:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \quad (1)'$$

Aus (1) kann man durch Multiplikation erhalten:

$$\begin{aligned} \overline{CB} \cdot \overline{AD} &= \overline{AC} \cdot \overline{BD} \quad | : (\overline{AD} \cdot \overline{BD}) \\ \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \quad (2) \end{aligned}$$

(2) kann nun so angesehen werden, als ob $\overline{CD}$ die zu teilende Strecke, B der innere und A der äußere Teilungspunkt st.

Ergebnis: Wird $\overline{AB}$ durch C und D harmonisch geteilt, so wird auch $\overline{CD}$ durch A und B harmonisch geteilt.

Ein Spezialfall:

Lassen wir den Punkt D sich nach rechts bewegen, so erkennen wir: Wenn $D \rightarrow D_\infty$, dann liegt C in der Mitte von $\overline{AB}$. Entsprechend: wenn $A \rightarrow A_\infty$, dann liegt B in der Mitte von $\overline{CD}$.



6.2. Das Doppelverhältnis

Obige Gleichung (1) führt auf $\frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}} = 1$. (3)

Auf der linken Seite von (3) haben wir das Verhältnis zweier Verhältnisse. Wir bezeichnen dieses Verhältnis als „Doppelverhältnis“ von den 4 Punkten A, B, C, D in einer Geraden und schreiben dafür verkürzt $(A, B, C, D) = 1$. Nur bei harmonischer Lage hat das Doppelverhältnis den Wert 1!

6.3. Harmonische Teilung als Invariante bei der Projektion

Satz: Sind A, B, C, D vier Punkte in harmonischer Lage in g , so liegen bei einer Zentralprojektion auch ihre vier Bildpunkte $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ harmonisch in der Geraden $\overline{g}$.

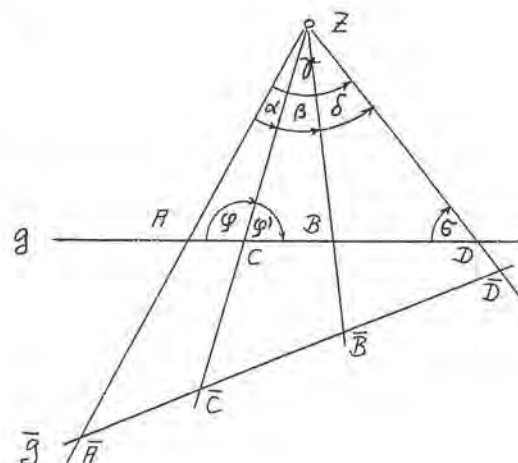
Beweis: Aus der Zeichnung ist zu erkennen, dass nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AZ}}{\sin \varphi} \rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{AZ} \cdot \sin \alpha}{\sin \varphi};$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{BZ}}{\sin \varphi'} \rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{BZ} \cdot \sin \beta}{\sin \varphi'};$$

da $\sin \varphi' = \sin \varphi$, folgt

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AZ} \cdot \sin \alpha}{\overline{BZ} \cdot \sin \beta} \quad (4)$$



¹ Es werden die absoluten Strecken ins Verhältnis gesetzt, ohne Orientierung durch ein Vorzeichen.

Ferner:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\sin \gamma} &= \frac{\overline{AZ}}{\sin \sigma} \rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AZ} \cdot \sin \gamma}{\sin \sigma} \\ \frac{\overline{BD}}{\sin \delta} &= \frac{\overline{BZ}}{\sin \sigma} \rightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{BZ} \cdot \sin \delta}{\sin \sigma} \end{aligned} \right\} \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AZ} \cdot \sin \gamma}{\overline{BZ} \cdot \sin \delta} \quad (5)$$

Aus (4) und (5) erhält man das Doppelverhältnis für die 4 Punkte A, B, C, D:

$$(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}}{\frac{\sin \gamma}{\sin \delta}} \quad (6)$$

Wir erkennen in (6), dass kein Bezug auf die Gerade g genommen wird, dass also das Doppelverhältnis nur von den Winkeln in Z abhängt.

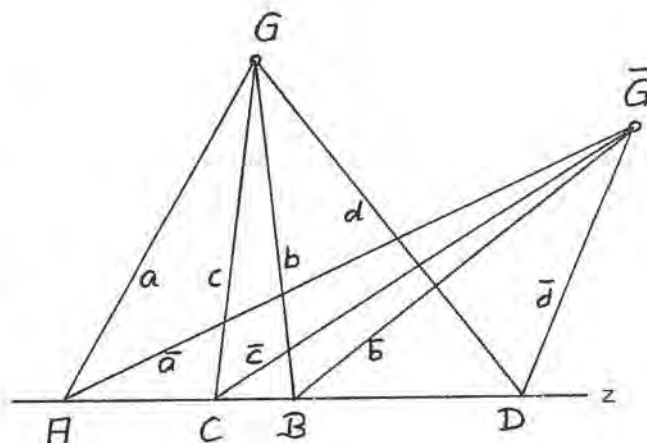
Wiederholen wir die ganze Herleitung unter Verwendung der Punkte in der Geraden $\bar{g}$, so würde alles genauso laufen, und wir würden bei

$$\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{BC}}} = \frac{\overline{\overline{AD}}}{\overline{\overline{BD}}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{enden, was besagt, dass das Doppelverhältnis bei der Projektion invariant bleibt.}$$

Hat das Doppelverhältnis den Wert 1, dann handelt es sich um die harmonische Teilung, für die diese Invarianz natürlich auch gilt.

Wir definieren nun:

Ziehen wir von einem Punkt G durch vier harmonische Punkte A, B, C, D einer Geraden z die vier Geraden a, b, c, d, so nennen wir diese vier harmonische Geraden. Man sagt auch: die beiden Geraden a und b werden durch die Geraden c und d harmonisch geteilt.



Entsprechend dem obigen Vorgang folgern wir (die Beweisführung ist erst später nach dem Kapitel 7.5. „Das Dualitätsprinzip“ möglich): Die vier Geraden $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ und $\bar{d}$ sind auch vier harmonische Geraden.

Und der oben formulierte Satz führt zu dem „dualen“ Satz: Sind a, b, c, d vier harmonische Geraden durch G, so gehen bei einer Linearprojektion auch ihre vier Bildgeraden $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ harmonisch durch den Punkt $\bar{G}$.

7. Vollständiges Viereck und vollständiges Vierseit

– die harmonische Grundfigur

7.1. Das vollständige Viereck

Ein vollständiges (ebenes) Viereck wird gebildet aus vier Erstopunkten (Grundecken) A, B, C, D und deren sechs Verbindungsgeraden (Seiten). Diese sechs Seiten haben drei weitere Schnittpunkte (Nebenecken) P, Q, R, deren Verbindungsgeraden die Nebenseiten p, q, r sind. Nebenecken und Nebenseiten zusammen nennen wir **Nebendreieck**. (Fig. 7.1)

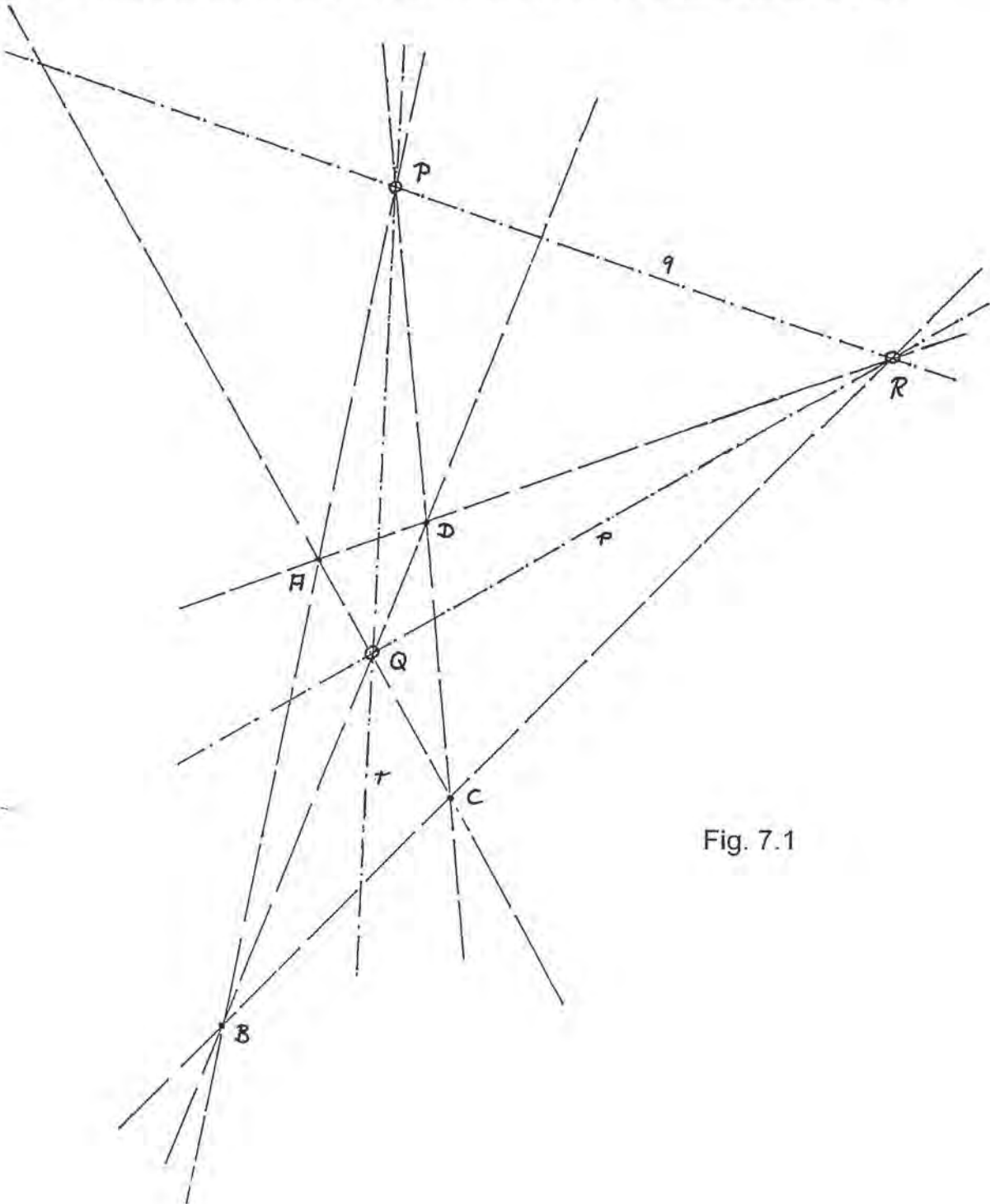


Fig. 7.1

Anmerkung: Zum besseren Erkennen der Zusammenhänge (und auch als Hilfe für den Schüler) lasse ich die Zeichnungen zum vollständigen Viereck (Figur 7.1 und folgende) wie auch zum vollständigen Vierseit (ab 7.4) farbig ausführen. So z. B. die vier Erstpunkte schwarz, die 6 Verbindungsgeraden blau, die drei Nebenecken grün und die drei Nebenseiten rot. In Figur 7.4 sind die vier Erstgeraden schwarz, die 6 Schnittpunkte violett, die drei Nebenseiten rot und die drei Nebenecken grün. Wenn dann in Fig. 7.6 bzw. 7.7 die harmonische Grundfigur gezeichnet wird, dann sind alle diese Farben in ihr vertreten. Auch lassen sich dann Beweisführungen (z. B. in Fig. 7.8) leichter durchschauen. Diese Farbgebung wird dann in Kapitel 12 wieder aufgegriffen, im Text und in der beschriebenen Figur 12.3.

7.2. Harmonische Punkte im vollständigen Viereck

Im vollständigen Viereck sehen wir: In jeder Nebenseite liegen zwei Nebenecken und zwei Schnittpunkte mit den beiden restlichen Seiten des Vierecks.

Es gilt die Gesetzmäßigkeit: Diese vier Punkte liegen immer harmonisch, unabhängig von der Lage der vier Eckpunkte!

Man kann somit zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt mithilfe eines vollständigen Vierecks konstruieren.

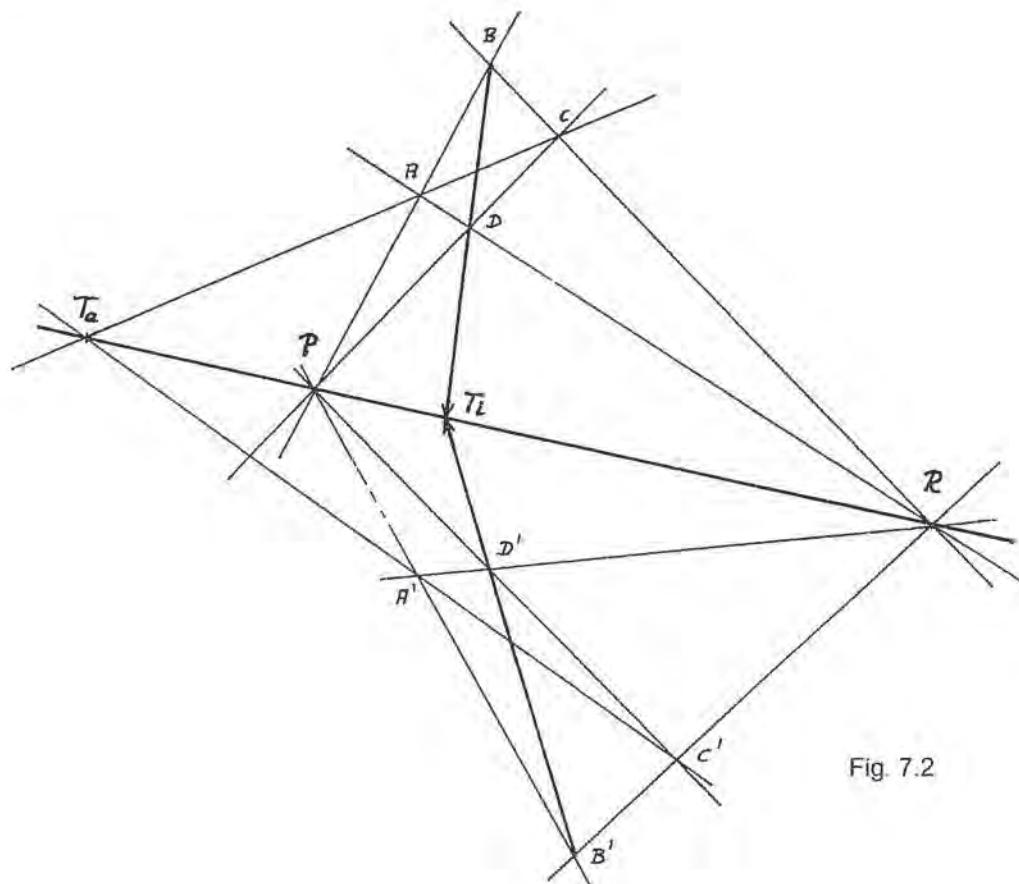


Fig. 7.2

Wir erkennen: Jedes weitere so aufgebaute Viereck führt zum selben Punkt T_l .

Nun soll gezeigt werden, dass T_i tatsächlich der vierte harmonische Punkt zu P , R und T_a ist (zur Vereinfachung nehmen wir B als B_∞ an).

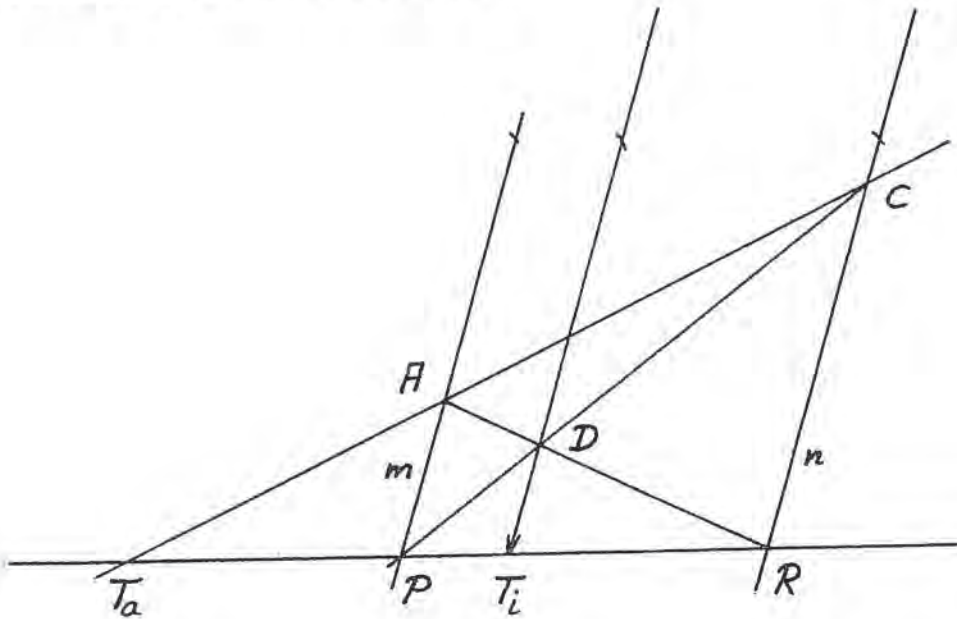


Fig. 7.3

Nach den Strahlensätzen gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\overline{PT_a}}{\overline{RT_a}} = \frac{m}{n} \\ \frac{\overline{PT_i}}{\overline{RT_i}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n} \end{array} \right\} \frac{\overline{PT_a}}{\overline{RT_a}} = \frac{\overline{PT_i}}{\overline{RT_i}} \quad (\text{q. e. d.}).$$

Auch die Punktvierlinge in den sechs Vierecksseiten (in Fig. 7.1) liegen harmonisch. Sie sind Projektionen der Punktvierlinge in den Nebenseiten (z. B. wird q mittels des Zentrums Q in die Seite $\overline{AD}$ projiziert).

7.3. Das vollständige Vierseit

Ein vollständiges (ebenes) Vierseit wird gebildet aus den vier Erstgeraden (Grundseiten) a , b , c , d und deren sechs Schnittpunkten (Ecken). Diese sechs Ecken haben drei weitere Verbindungsgeraden (Nebenseiten) p , q , r , deren Schnittpunkte die Nebenecken P , Q , R sind. Nebenseiten und Nebenecken nennen wir **Nebendreieit** (Fig. 7.4).

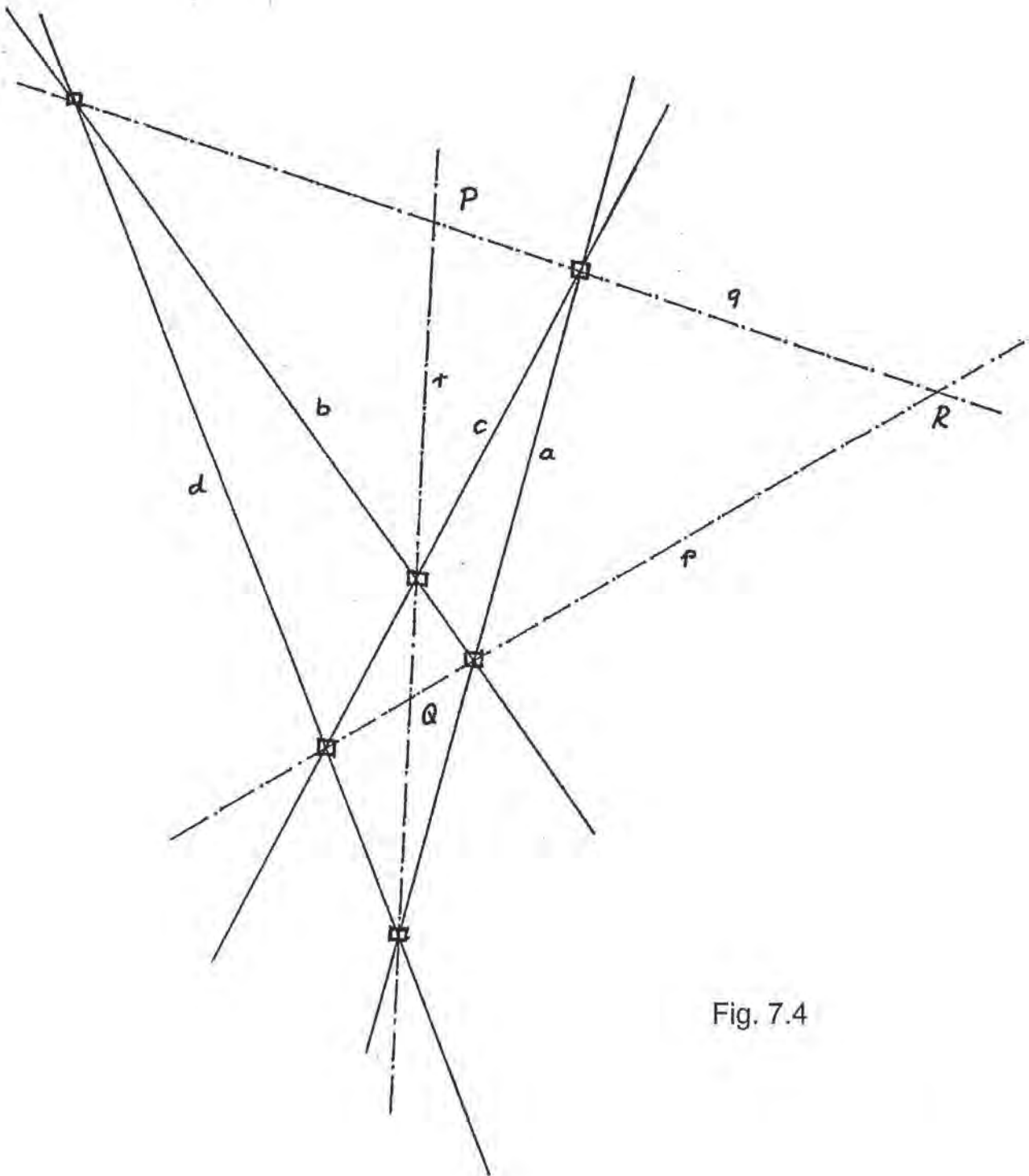


Fig. 7.4

7.4. Harmonische Geraden

Das vollständige Vierseit schafft harmonische Geradenpaare: Verbindet man eine Nebenecke (z. B. Q) mit den Teilungspunkten T_a und T_i in q, so sind diese Verbindungsgeraden (gestrichelt) zusammen mit den zwei andern Nebenseiten (r und p) vier harmonische Geraden (Figur 7.5).

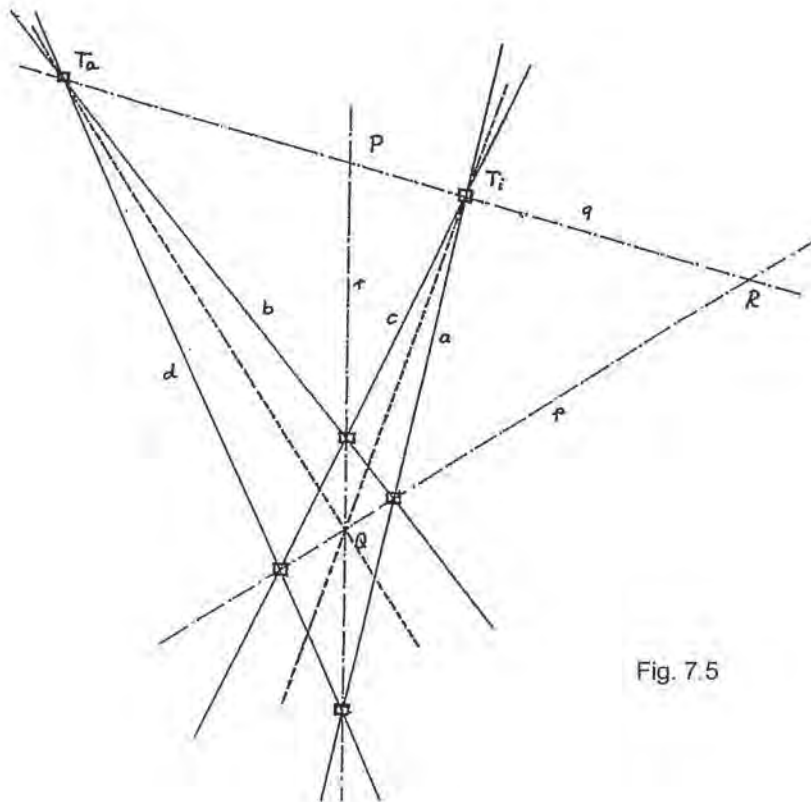


Fig. 7.5

Zeichnen wir nun in allen Nebenecken des vollständigen Vierseits die sechs harmonischen Teilgeraden, so schneiden sie sich in vier Punkten: A, B, C, D. Man erkennt, dass diese „Endpunkte“ die Erstpunkte eines vollständigen Vierecks sind! Und umgekehrt: Würden wir mit diesen Punkten als Anfangspunkten beginnen und das sich ergebende vollständige Viereck weiterführen, indem wir die harmonischen Teilungspunkte einer Nebenseite mit Teilungspunkten der anderen Nebenseiten verbinden, so erhielten wir vier Geraden: a, b, c, d. Diese „Endgeraden“ sind nun die Erstgeraden eines vollständigen Vierseits.

Die Figur, in der ein vollständiges Viereck und ein vollständiges Vierseit mit gemeinsamem Nebendreieck bzw. Nebendreiseit ineinander verwoben sind, heißt **harmonische Grundfigur** (Fig. 7.6 und 7.7).

Harmonische Grundfigur

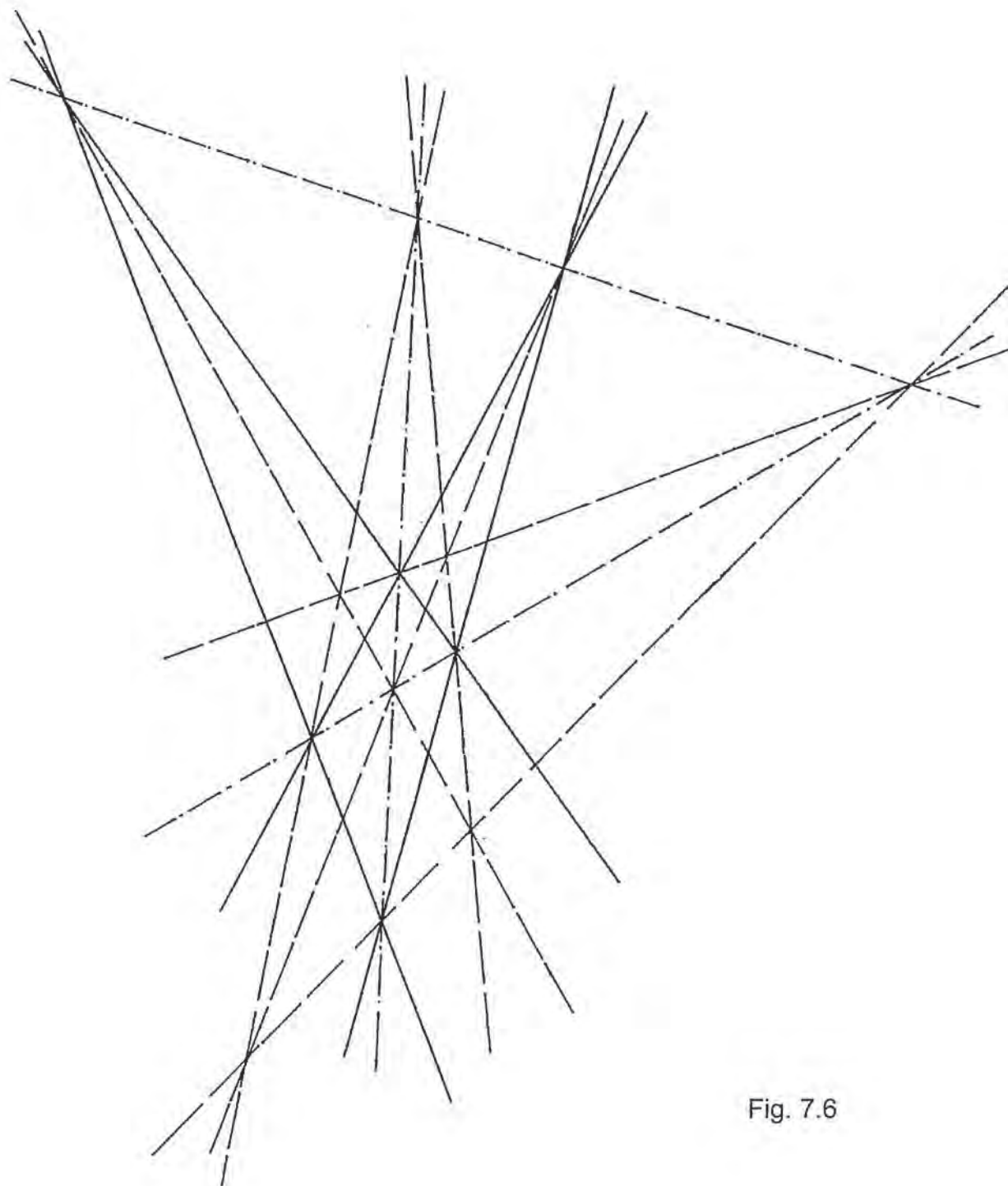


Fig. 7.6

Harmonische Grundfigur (mit Bezeichnungen)

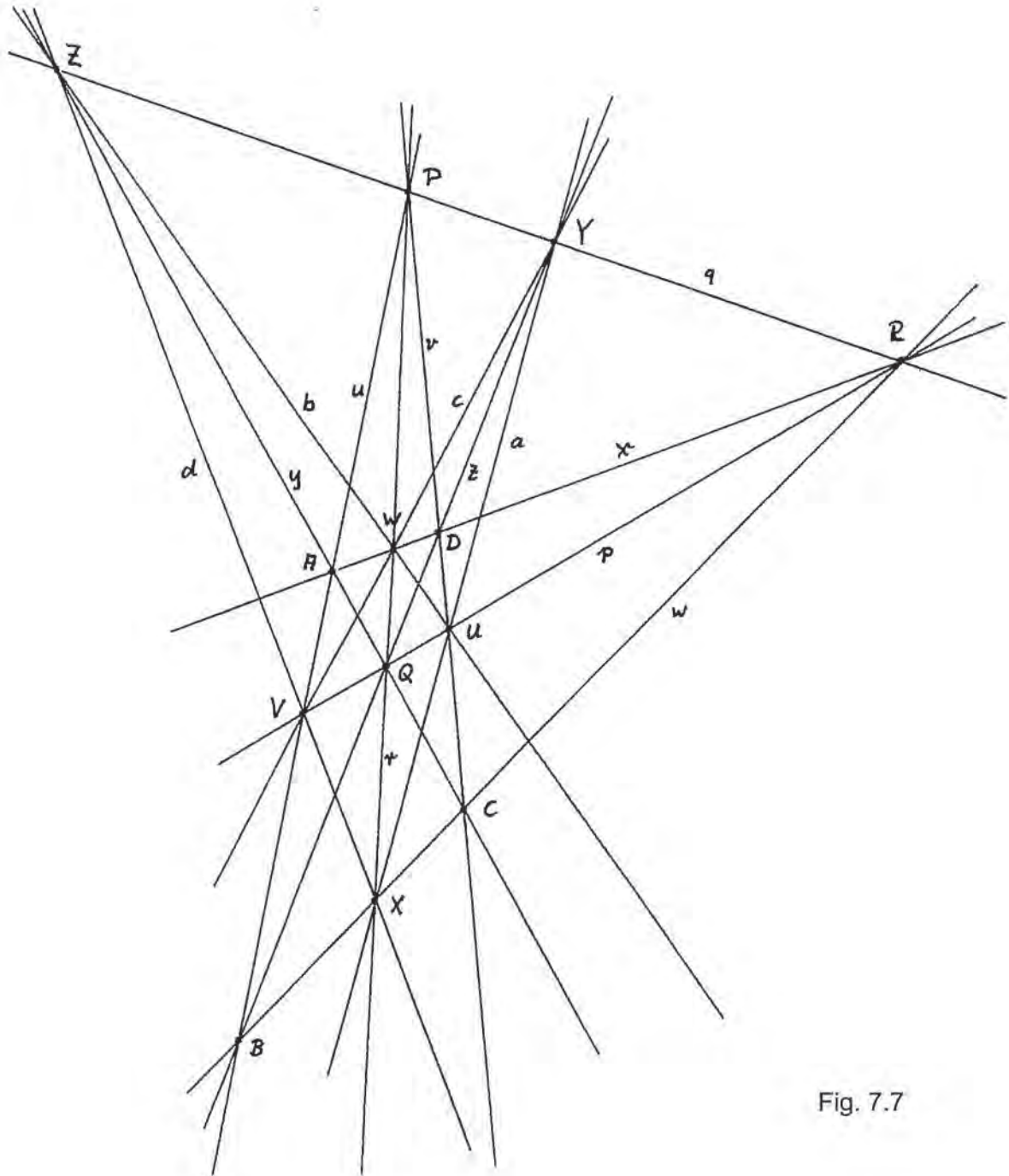


Fig. 7.7

Ihre Entstehung weist auf ein wichtiges Prinzip hin, das in der ganzen projektiven Geometrie gültig ist:

7.5. Das Dualitätsprinzip

In allen Lehrsätzen der projektiven Geometrie der Ebene, in denen ausschließlich von Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden und von den Operationen des Schneidens und Verbindens die Rede ist, gibt es die dualen „Gegen-Sätze“ im Sinne der folgenden Aufstellung:

Grundgebilde	Punkt	Gerade
Grundoperation	Verbinden	Schneiden
Lagebeziehungen	in einer Gerade liegen	durch einen Punkt gehen

Ist ein Satz der projektiven Geometrie bewiesen, so ist das duale Gegenstück aufgrund des Dualitätsprinzips ebenfalls ein richtiger Satz und bedarf keines Beweises mehr.

Die duale Symmetrie im Aufbau der harmonischen Grundfigur können wir durch die Bezeichnungen von Punkten und Geraden verdeutlichen (Figur 7.7):

vollständiges Viereck	4 Punkte : A, B, C, D	vollständiges Vierseit
	6 Verbindungsgeraden : u, v, w, x, y, z	
	3 Nebenecken : P, Q, R	
	3 Nebenseiten : p, q, r	
	6 Schnittpunkte : U, V, W, X, Y, Z	
	4 Geraden : a, b, c, d	

Da insgesamt 13 Punkte und 13 Geraden in dieser besonderen Weise verwoben sind, wird diese Konfiguration auch das „13er-Gebilde“ genannt.

Wir können notieren:

durch A gehen y, u, x	in a liegen Y, U, X
durch B gehen u, w, z	in b liegen U, W, Z
durch C gehen v, w, y	in c liegen V, W, Y
durch D gehen v, x, z	in d liegen V, X, Z
durch U gehen a, b, v, p	in u liegen A, B, V, P
durch V gehen c, d, u, p	in v liegen C, D, U, P
durch W gehen b, c, x, r	in w liegen B, C, X, R
durch X gehen a, d, w, r	in x liegen A, D, W, R
durch Y gehen a, c, z, q	in y liegen A, C, Z, Q
durch Z gehen b, d, y, q	in z liegen B, D, Y, Q

7.6 Harmonische Grundfigur und Desargues'sche Konfiguration

Aus der harmonischen Grundfigur (Figur 7.6) betrachten wir einen Ausschnitt:

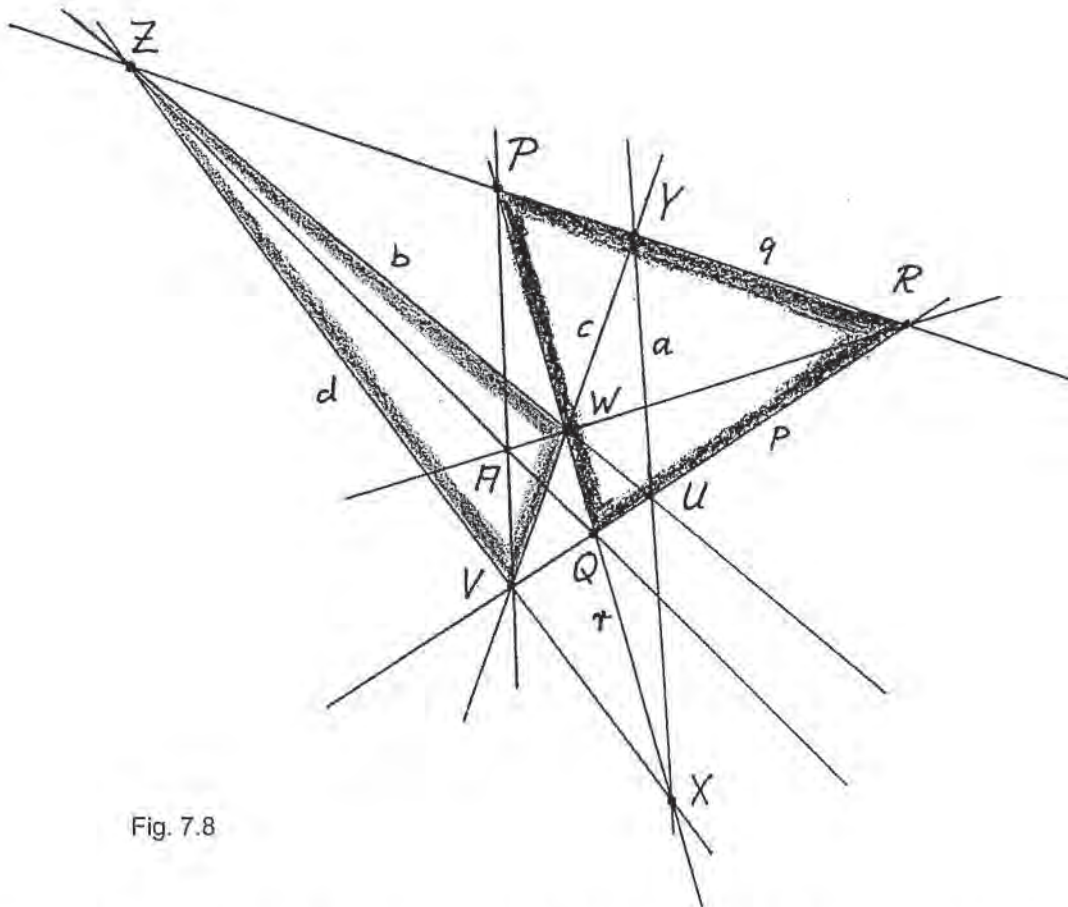


Fig. 7.8

Wir können erkennen, dass in dieser Figur eine Desargues'sche Konfiguration enthalten ist: Punkt A ist Zentrum, die beiden zugeordneten Dreiecke sind markiert und die Gerade a ist die zum Zentrum A gehörige Desargues'sche Gerade. Entsprechendes lässt sich finden, wenn man die restlichen drei Punkte B, C und D als Zentrum wählt.

7.7. Übungen zur Zentralperspektive

7.7.1 Wir denken uns in Figur 7.2 bzw. 7.5 die Nebenseite als Horizontlinie h , in der wir die (Flucht-)punkte A, B, D festlegen. Durch das Viereck 1, 2, 3, 4 erhalten wir den vierten Horizontpunkt C .

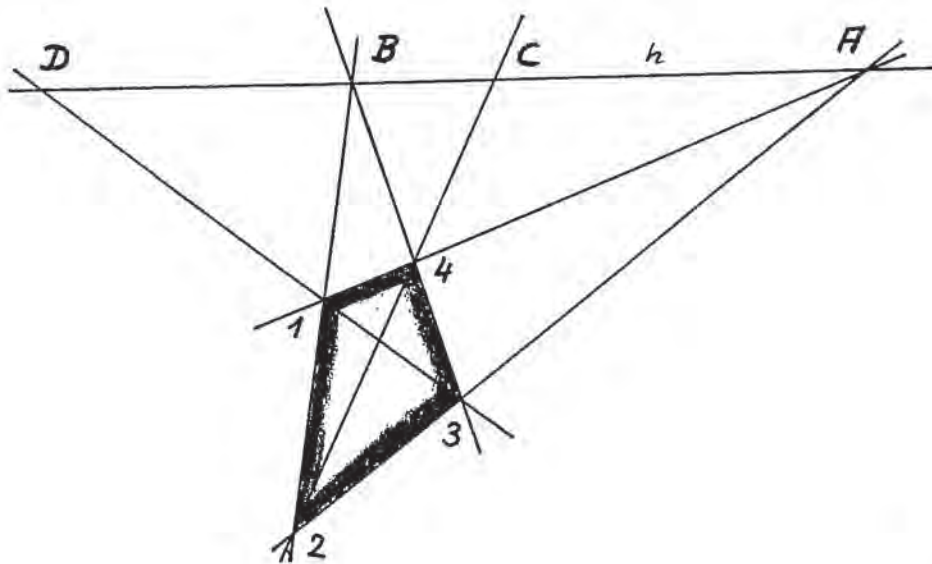


Fig. 7.9

7.7.2 Wie bei der obigen Zeichnung, jedoch $D \rightarrow D_\infty$. C ist dann der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

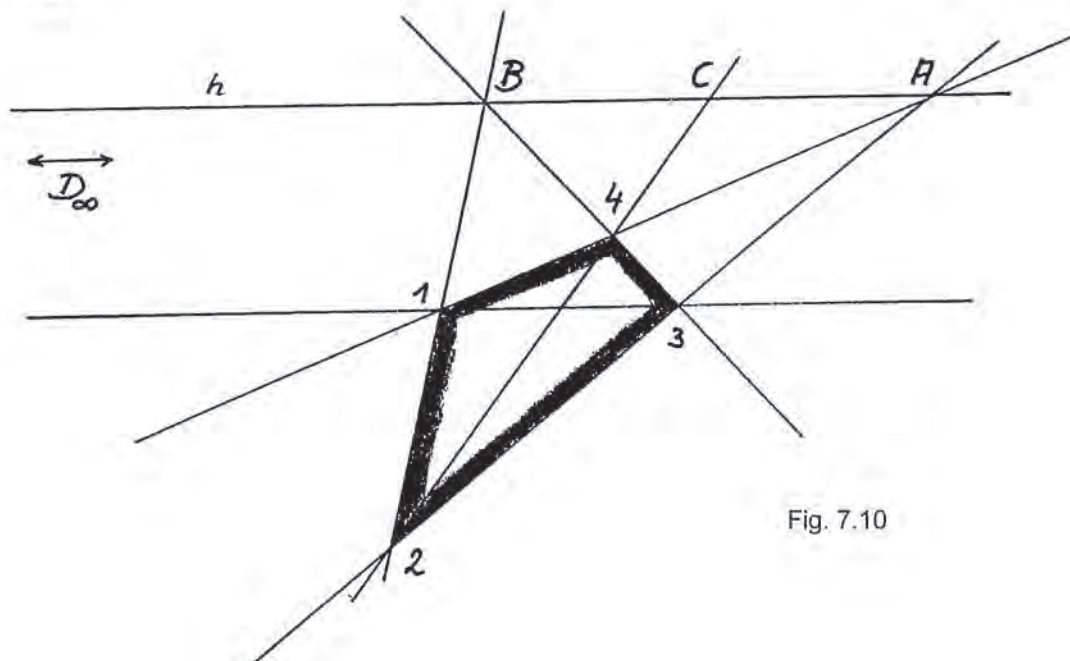


Fig. 7.10

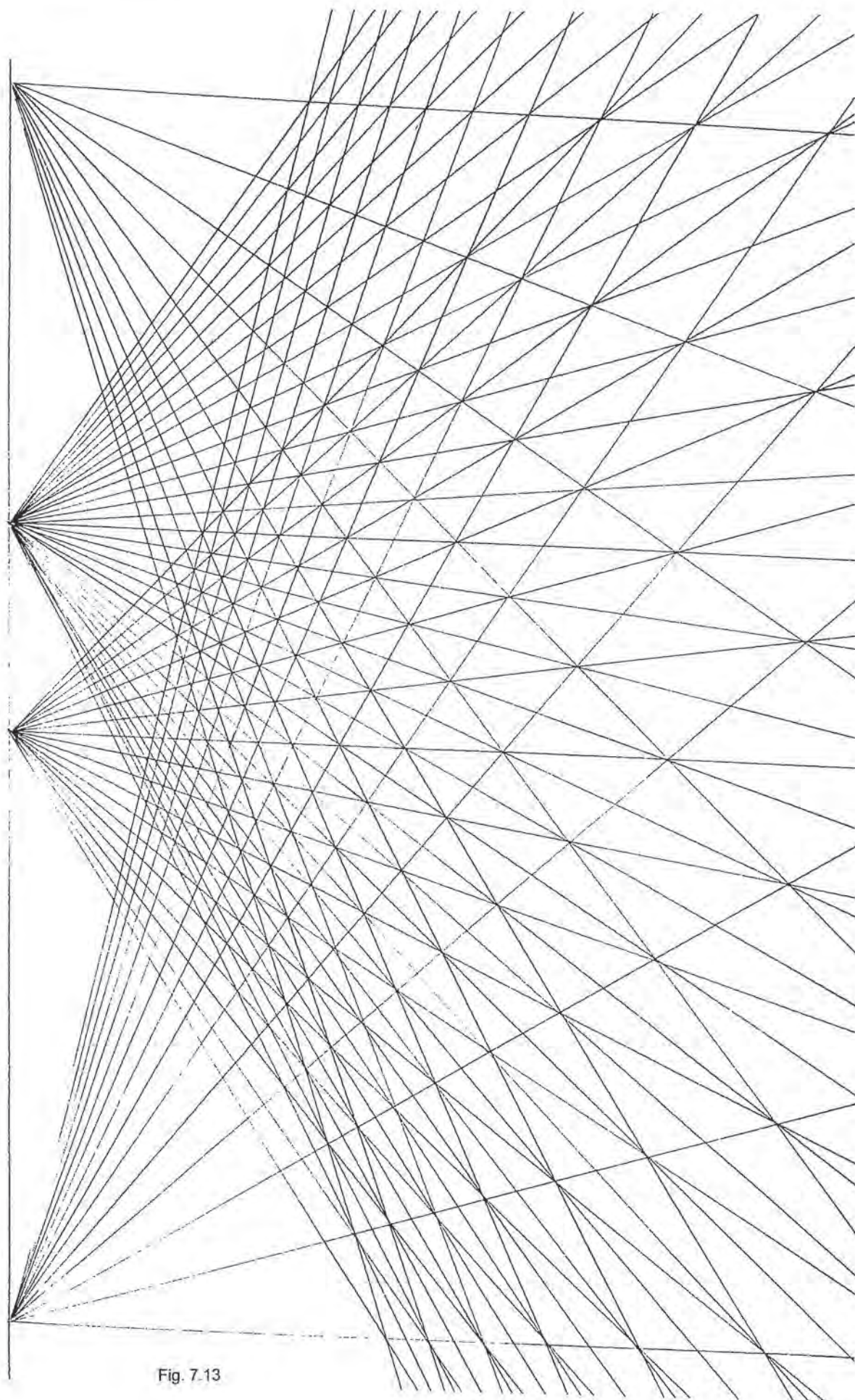


Fig. 7.13

Als Übungen:

7.7.6 Harmonische Grundfigur aus einem Trapez aufgebaut: Fig. 7.14

7.7.7 Harmonische Grundfigur aus einem Rechteck aufgebaut: Fig. 7.15

7.7.8 Harmonische Grundfigur aus einem Quadrat aufgebaut: Fig. 7.16

7.7.9 Zum Dualitätsprinzip

Seit dem Altertum ist der Satz von Pappos bekannt: Liegen drei Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Geraden a und drei Punkte C_1, C_2, C_3 in einer Geraden c , dann liegen die drei Schnittpunkte entsprechender Verbindungsgeraden A_2C_3 und A_3C_2 , A_3C_1 und A_1C_3 , A_1C_2 und A_2C_1 in einer Geraden.

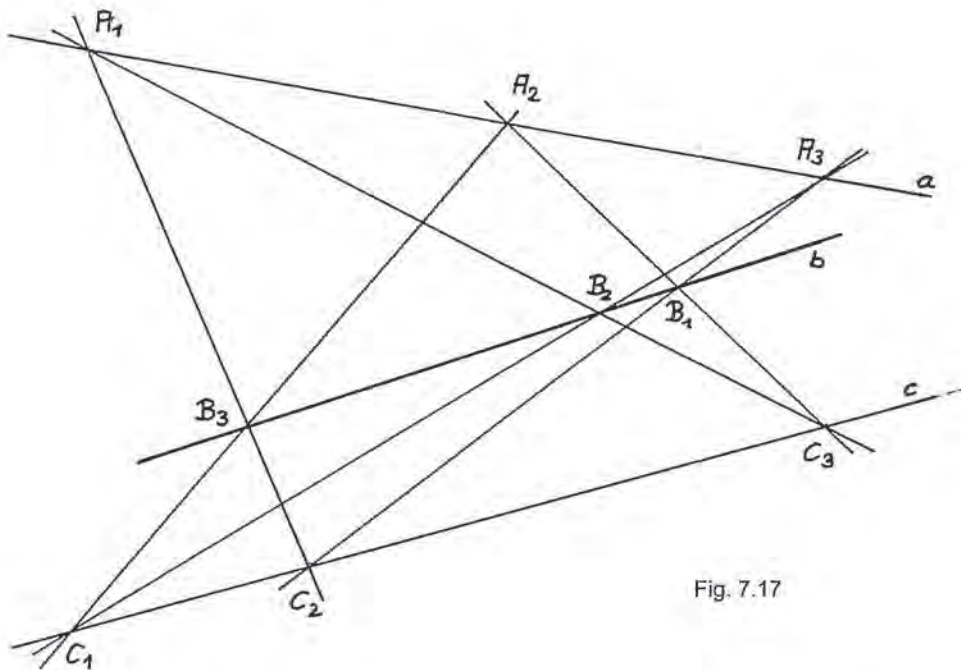


Fig. 7.17

Man kann die Richtigkeit dieses Satzes folgendermaßen einsehen: Wenn der Satz wahr ist, so können wir statt a und c mit ihren Dreipunktreihen ebenso gut a und b bzw. b und c aufeinander beziehen, und wir erhalten jeweils als Ergebnis, dass die Schnittpunkte in einer Geraden liegen.

Aufgabe: Bilde den dualen Satz zum Satz von Pappos und zeichne ihn.

Gehen drei Geraden a_1, a_2, a_3 durch einen Punkt A und drei Geraden c_1, c_2, c_3 durch einen Punkt C, dann gehen die drei Verbindungsgeraden entsprechender Schnittpunkte a_2c_3 und a_3c_2 , a_3c_1 und a_1c_3 , a_1c_2 und a_2c_1 durch einen Punkt.

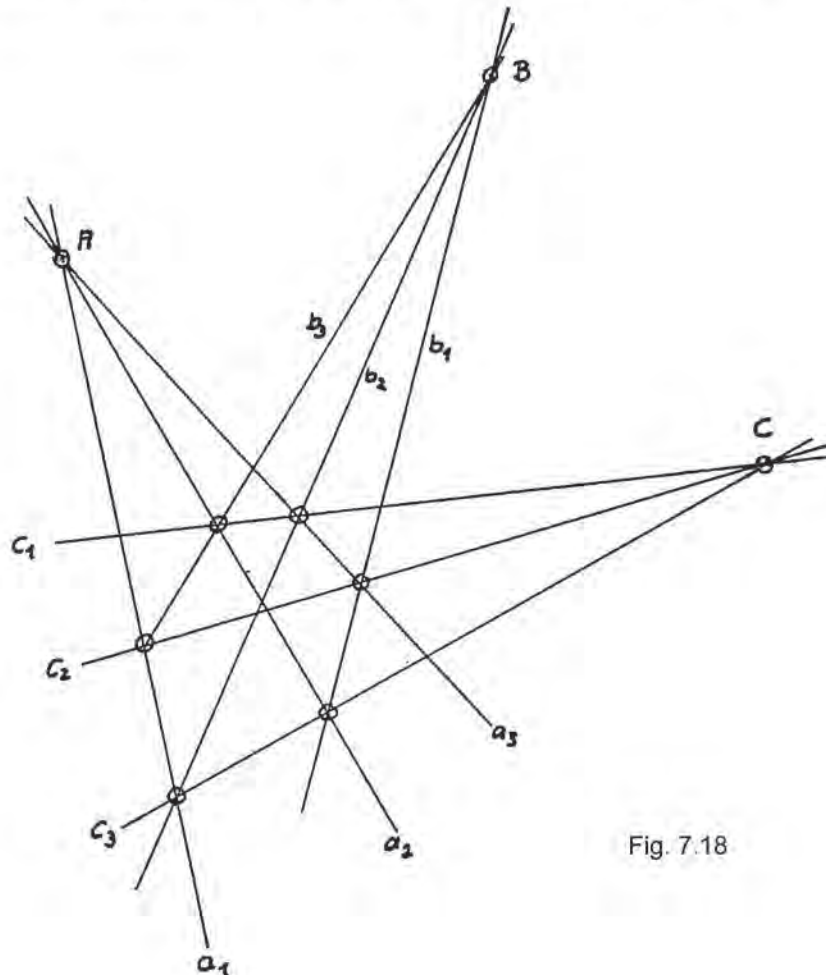
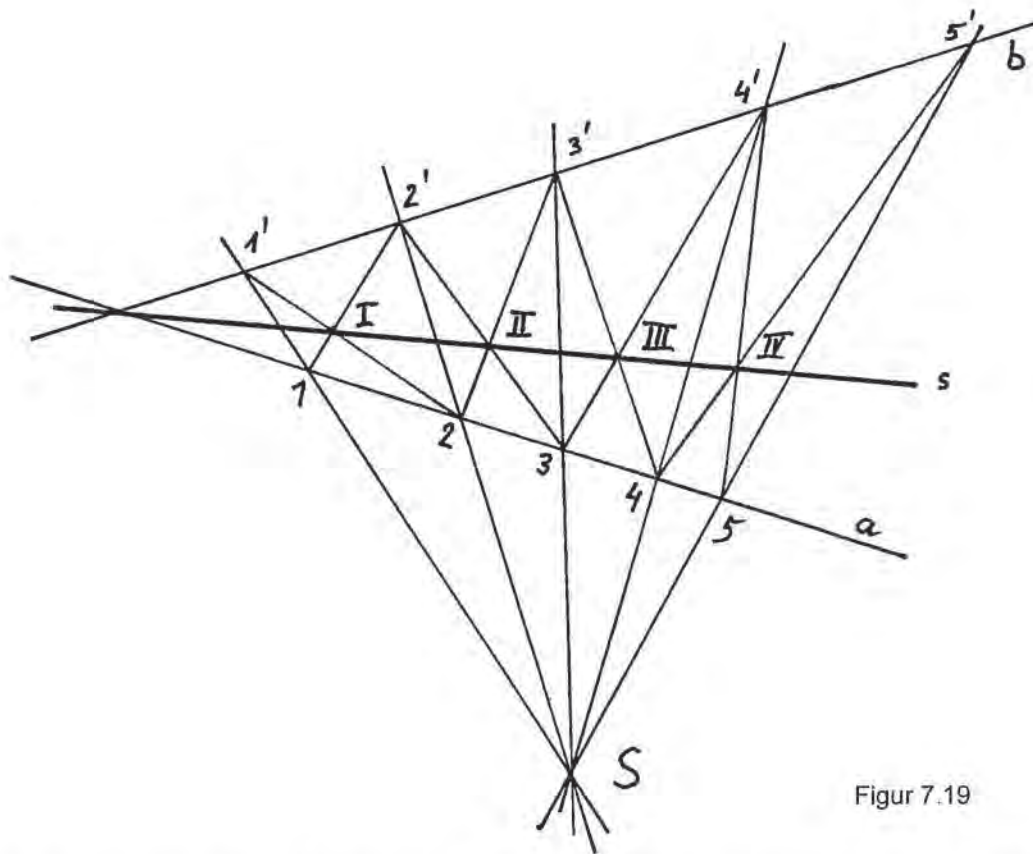


Fig. 7.18

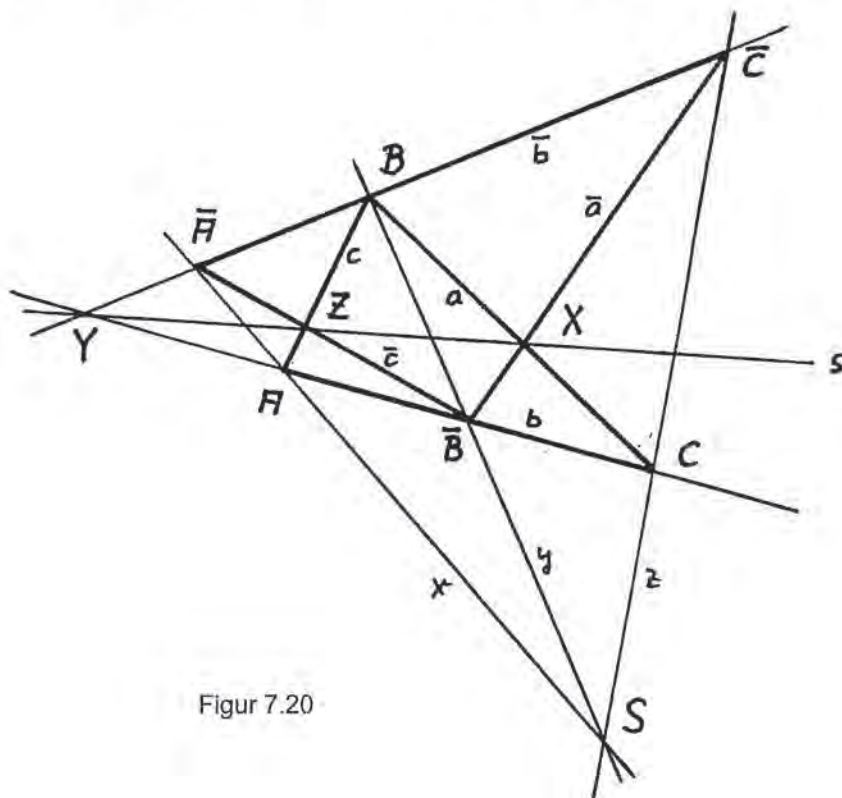
7.7.10 Zweites Beispiel zum Dualitätsprinzip:

Man dualisiere folgenden Sachverhalt: Werden die Geraden eines Geradenbüschels S von zwei Geraden a und b geschnitten, so erhält man die Schnittpunkte $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ in a und $1', 2', 3', 4', 5', \dots$ in b . Man schneidet die Geraden $12'$ und $1'2, 23'$ und $2'3$ usw. und erhält die Schnittpunkte $I, II, III, \dots$. Diese Schnittpunkte liegen in einer Geraden, die durch den Schnittpunkt von a und b geht.



Figur 7.19

Zuerst der Beweis von Figur 7.19 (dass s durch den Schnittpunkt ab geht) mit dem Satz von Desargues. Es werden drei beliebige Geraden des Büschels betrachtet.

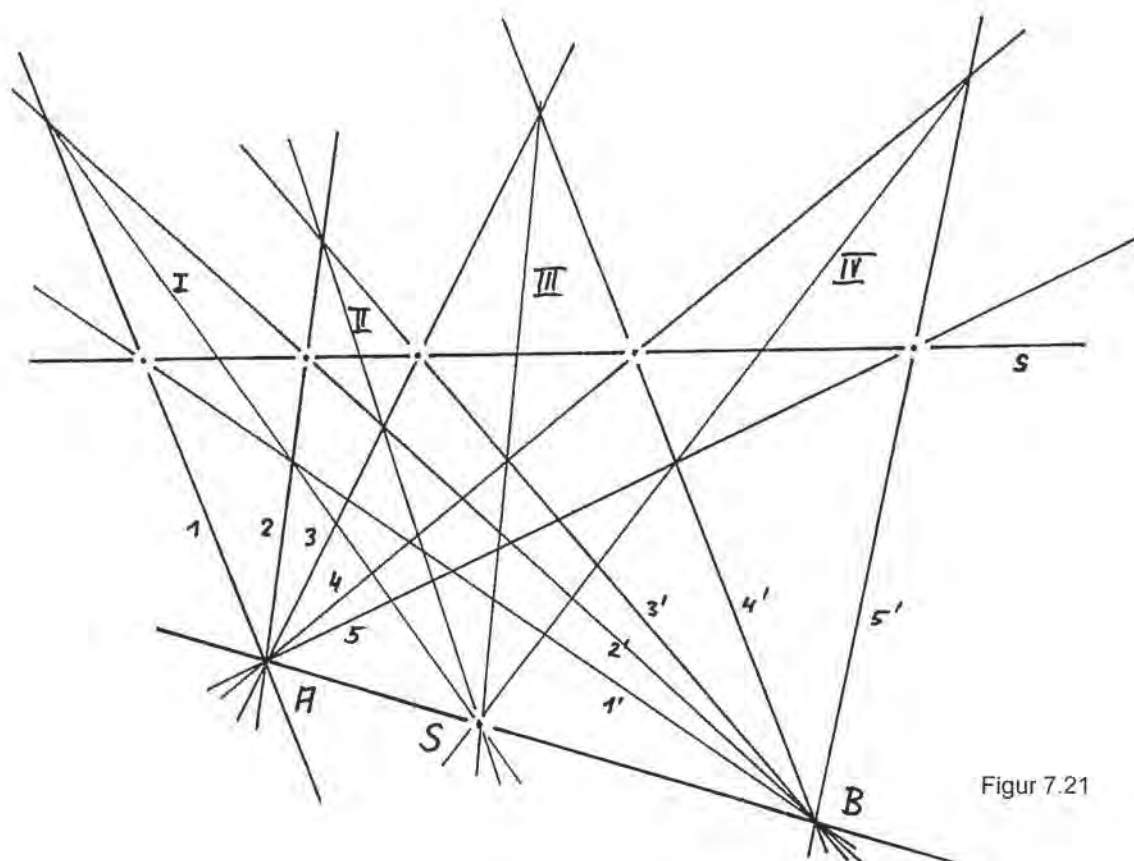


Figur 7.20

Somit gilt dieser Zusammenhang für alle Geraden des Büschels.

Und der dualisierte Sachverhalt lautet:

Werden die Punkte einer Punktreihe s mit zwei Punkten A und B verbunden, so erhält man die Verbindungsgeraden $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ durch A und $1', 2', 3', 4', 5', \dots$ durch B . Man verbindet die Punkte $12'$ und $1'2$, $23'$ und $2'3$ usw. und erhält die Verbindungsgeraden $I, II, III, \dots$. Diese Verbindungsgeraden gehen durch den Punkt S , der in der Verbindungsgeraden von A und B liegt.



Figur 7.21

8. Grundelemente und Grundgebilde der projektiven Geometrie

Punkt, Gerade und Ebene sind die elementaren Bausteine der Geometrie. Man nennt sie **Grundelemente**. Sie sind ideale Gebilde, obwohl sie zunächst an der Welt der Erfahrungen gewonnen werden. Denken wir z. B. an den Begriff einer Geraden, so sehen wir, dass nirgends in der Sinnenwelt eine solche gerade Linie direkt vorkommt. Versuchen wir uns die Grundelemente im Einzelnen vorzustellen, so stoßen wir auf eine bemerkenswerte Tatsache: Keines der Grundelemente lässt sich als Ganzes vorstellen; z. B. können wir uns nur eines endlichen Ausschnitts der Ebene bemächtigen. Dieser feine Unterschied zwischen Vorstellung und Idee muss sehr genau betrachtet werden!

Die drei Grundelemente können auch als Gebilde entstehen, und zwar jedes vom Aspekt der beiden anderen:

1. Wir betrachten die Ebene vom Aspekt der Punkte:
Die Ebene ist dann die Trägerebene für alle die Punkte, die in ihr liegen. Das Gebilde nennt sich ebenes **Punktfeld** und wird $\varepsilon(P)$ bezeichnet.
2. Wir betrachten den Punkt vom Aspekt der Ebenen:
Der Punkt ist dann Trägerpunkt für alle die Ebenen, die durch den Punkt gehen. Das Gebilde wird **Ebenenbündel** genannt und $P(\varepsilon)$ bezeichnet.
3. Wir betrachten die Gerade vom Aspekt der Punkte:
Die Gerade ist dann Trägergerade für alle die Punkte, die in ihr liegen. Das Gebilde wird **Punktreihe** genannt und $g(P)$ bezeichnet.
4. Wir betrachten den Punkt vom Aspekt der Geraden:
Der Punkt ist dann Trägerpunkt für alle die Geraden, die durch den Punkt gehen. Das Gebilde wird **Geradenbündel** genannt und $P(g)$ bezeichnet.
5. Wir betrachten die Ebene vom Aspekt der Geraden:
Die Ebene ist dann Trägerebene für alle die Geraden, die in ihr liegen. Das Gebilde wird **Geradenfeld** genannt und $\varepsilon(g)$ bezeichnet.
6. Wir betrachten die Gerade vom Aspekt der Ebenen:
Die Gerade ist dann Trägergerade für alle die Ebenen, die durch die Gerade gehen. Das Gebilde wird **Ebenenbüschel** genannt und $g(\varepsilon)$ bezeichnet.
7. Wir betrachten die Ebene vom Aspekt aller Geraden, die in ihr liegen und durch einen Punkt gehen:
Die Ebene ist dann Trägerebene von Punkt und Geraden. Das Gebilde wird **Geradenbüschel** genannt und $\varepsilon(g; P)$ bezeichnet.
8. Wir betrachten den Punkt vom Aspekt aller Geraden, die durch den Punkt gehen und in einer Ebene liegen:
Der Punkt ist dann Trägerpunkt von Geraden und Ebene. Das Gebilde wird **Geradenbüschel** genannt und $P(g; \varepsilon)$ bezeichnet.

Wir erkennen, dass die Gebilde unter 7. und 8. identisch sind.

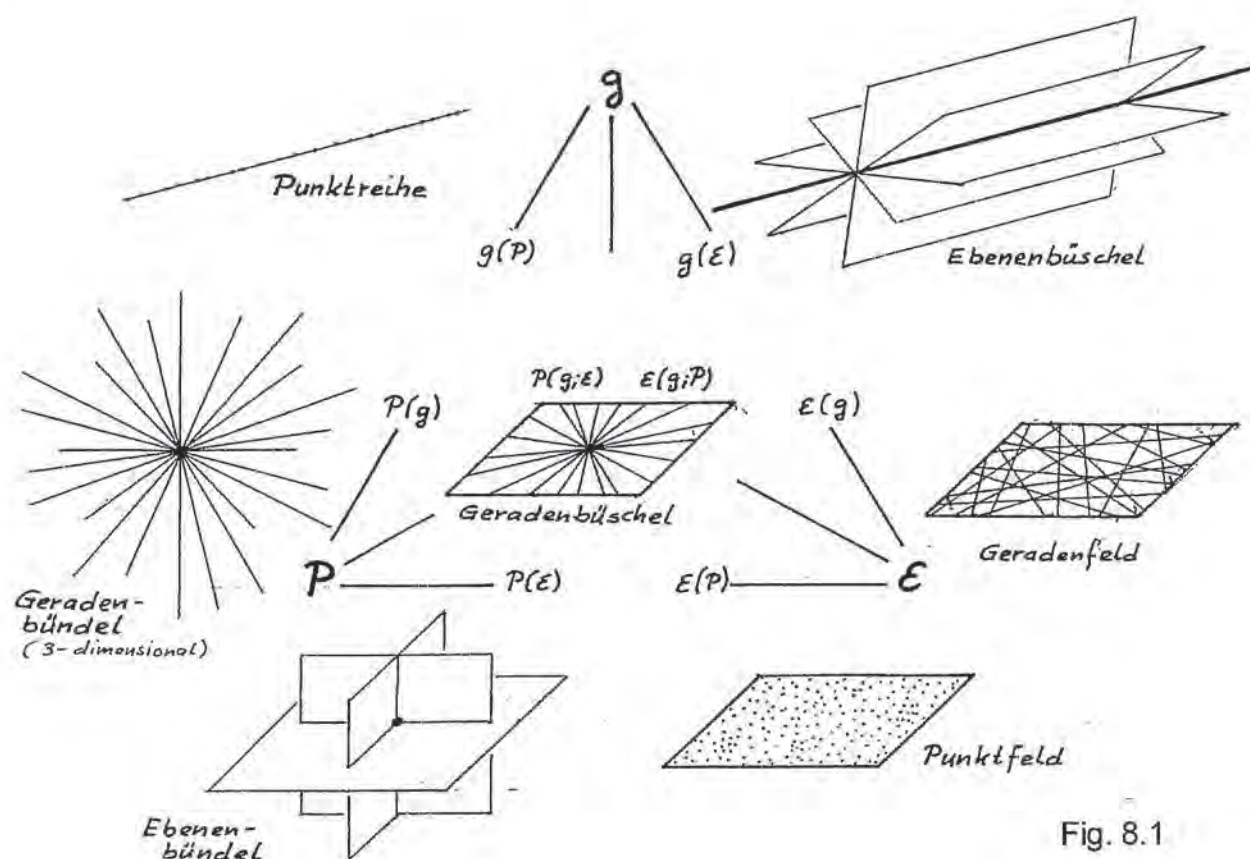


Fig. 8.1

Übungen: Die gemeinsamen Elemente zweier Grundgebilde

Jedes Grundgebilde besteht aus unendlich vielen gleichartigen Elementen und einem Träger (eine Ausnahme: das Geradenbüschel hat zwei Träger). So sind z. B. beim Geradenfeld die Geraden die Elemente und eine Ebene ist der Träger.

Sind zwei Grundgebilde gegeben, die aus gleichen Elementen entstanden sind, so entsteht die Frage nach gemeinsamen Elementen beider Gebilde.

- (1) Zwei Ebenenbündel haben alle Ebenen eines Büschels gemeinsam. Träger dieses Büschels ist die Verbindungsgerade der Trägerpunkte beider Bündel:

$$P_1(E) \cap P_2(E) = g(E)$$

- (2) Zwei Geradenbündel haben genau eine Gerade gemeinsam: die Verbindungsgerade der beiden Trägerpunkte.

$$P_1(g) \cap P_2(g) = g$$

- (3) Zwei Ebenen als Punktfelder haben alle Punkte einer Punktreihe gemeinsam, deren Träger die Schnittgerade beider Ebenen ist:

$$E_1(P) \cap E_2(P) = g(P)$$

- (4) Zwei Ebenen als Geradenfelder haben genau eine Gerade gemeinsam, die Schnittgerade beider Trägerebenen:

$$E_1(g) \cap E_2(g) = g$$

- (5) Zwei Geraden als Punktreihen haben genau einen Punkt gemeinsam, wenn sie in einer Ebene liegen: ihren Schnittpunkt.

$$g_1(P) \cap g_2(P) = P$$

- (6) Zwei sich schneidende Geraden als Ebenenbüschel haben eine Ebene gemeinsam: Ihre Verbindungsebene.

$$g_1(\varepsilon) \cap g_2(\varepsilon) = \varepsilon$$

- (7) Ein Punkt als Ebenenbündel und eine Gerade als Ebenenbüschel haben genau eine Ebene gemeinsam, wenn die Gerade nicht durch den Punkt geht:

$$P(\varepsilon) \cap g(\varepsilon) = \varepsilon, \text{ wenn } P \notin g$$

- (8) Ein Punkt als Ebenenbündel und eine Gerade als Ebenenbüschel haben das Ebenenbüschel gemeinsam, wenn die Gerade durch den Punkt geht:

$$P(\varepsilon) \cap g(\varepsilon) = g(\varepsilon), \text{ wenn } P \in g$$

- (9) Eine Ebene als Punktfeld und eine Gerade als Punktreihe haben genau einen Punkt gemeinsam, wenn die Gerade nicht in der Ebene liegt.

$$\varepsilon(P) \cap g(P) = P, \text{ wenn } g \notin \varepsilon$$

- (10) Eine Ebene als Punktfeld und eine Gerade als Punktreihe haben die Punktreihe gemeinsam, wenn die Gerade in der Ebene liegt.

$$\varepsilon(P) \cap g(P) = g(P), \text{ wenn } g \in \varepsilon$$

- (11) Ein Punkt als Geradenbündel und eine Ebene als Geradenfeld haben ein Geradenbüschel gemeinsam, wenn der Punkt in der Ebene liegt. Diese beiden sind die gemeinsamen Träger des Geradenbüschels:

$$P(g) \cap \varepsilon(g) = P(g)\varepsilon, \text{ wenn } P \in \varepsilon$$

- (12) Ein Punkt als Geradenbündel und eine Punkt / eine Ebene als Geradenbüschel haben

- a) das Geradenbüschel gemeinsam, wenn die beiden Punkte zusammenfallen:

$$P_1(g) \cap P_2(g)\varepsilon = P_2(g)\varepsilon, \text{ wenn } P_1(g)\varepsilon \subset P_2(g)$$

- b) eine Gerade gemeinsam, wenn die beiden Punkte nicht zusammenfallen, aber der Bündelpunkt in der Büschelebene liegt:

$$P_1(g) \cap P_2(g)\varepsilon = g, \text{ wenn } P_1 \neq P_2, \text{ aber } P_1 \in \varepsilon$$

- c) keine Gerade gemeinsam, wenn die beiden Punkte nicht zusammenfallen und der Bündelpunkt auch nicht in der Büschelebene liegt:

$$P_1(g) \cap P_2(g)\varepsilon = \emptyset, \text{ wenn } (P_1 \neq P_2), P_1 \notin \varepsilon$$

- (13) Eine Ebene als Geradenfeld und eine Ebene / ein Punkt als Geradenbüschel haben

- a) das Geradenbüschel gemeinsam, wenn die beiden Ebenen zusammenfallen:

$$\varepsilon_1(g) \cap \varepsilon_2(g)P = \varepsilon_2(g)P, \text{ wenn } \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

- b) eine Gerade gemeinsam, wenn die beiden Ebenen nicht zusammenfallen, aber die Feldebene durch den Büschelpunkt geht:

$$\varepsilon_1(g) \cap \varepsilon_2(g)P = g, \text{ wenn } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, P \in \varepsilon_1$$

- c) keine Gerade gemeinsam, wenn die beiden Ebenen nicht zusammenfallen und die Feldebene auch nicht durch den Büschelpunkt geht:

$$\varepsilon_1(g) \cap \varepsilon_2(g)P = \emptyset, \text{ wenn } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, P \notin \varepsilon_1$$

(14) Zwei Punkte / Ebenen haben als Geradenbüschel

- a) eine Gerade gemeinsam, wenn die Ebenen zusammenfallen und die Punkte getrennt liegen: die Verbindungsgerade der Punkte.

$$P_1(g)\varepsilon_1 \cap P_2(g)\varepsilon_2 = g, \text{ wenn } \varepsilon_1 = \varepsilon_2, P_1 \neq P_2$$

- b) eine Gerade gemeinsam, wenn die Punkte zusammenfallen und die Ebenen getrennt liegen: die Schnittgerade der Ebenen.

$$P_1(g)\varepsilon_1 \cap P_2(g)\varepsilon_2 = g, \text{ wenn } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, P_1 = P_2$$

- c) eine Gerade gemeinsam, wenn die Verbindungsgerade der beiden Trägerpunkte zugleich die Schnittgerade der beiden Ebenen ist: diese Schnitt- bzw. Verbindungsgerade.

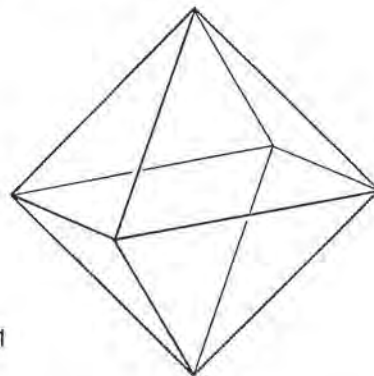
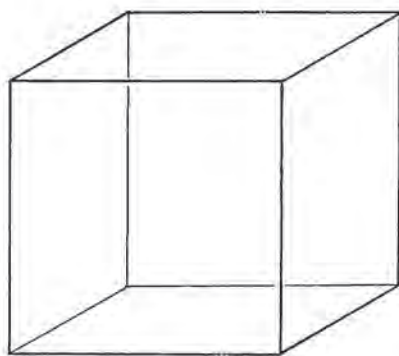
$$P_1(g)\varepsilon_1 \cap P_2(g)\varepsilon_2 = g, \text{ wenn } P_1 \in \varepsilon_2, P_2 \in \varepsilon_1$$

- d) keine Gerade gemeinsam, wenn weder die beiden Ebenen noch die beiden Trägerpunkte zusammenfallen und nicht beide Trägerpunkte in der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegen bzw. die Verbindungsgerade der beiden Trägerpunkte nicht in beiden Ebenen liegt:

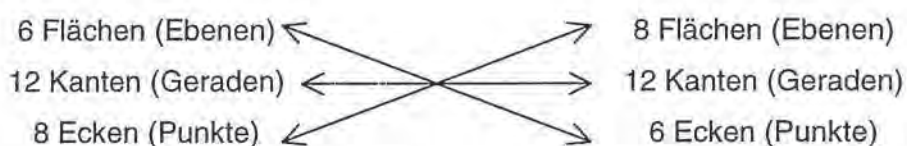
$$P_1(g)\varepsilon_1 \cap P_2(g)\varepsilon_2 = \emptyset, \text{ wenn } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2; P_1 \neq P_2; P_1 \notin \varepsilon_2 \text{ oder } P_2 \notin \varepsilon_1$$

9. Das Polaritätsgesetz

9.1. Vorübung: Gegenüberstellung von Würfel und Oktaeder



Figur 9.1



durch jeden der 8 Punkte gehen 3 Ebenen
und 3 Geraden

in jeder der 8 Ebenen liegen 3 Punkte
und 3 Geraden

in jeder Geraden liegen 2 Punkte	durch jede Gerade gehen 2 Ebenen
durch jede Gerade gehen 2 Ebenen	in jeder Geraden liegen 2 Punkte
in jeder der 6 Ebenen liegen 4 Punkte und 4 Geraden	durch jeden der 6 Punkte gehen 4 Ebenen und 4 Geraden

An der Gegenüberstellung von Würfel und Oktaeder erkennen wir eine strenge Gesetzmäßigkeit, die auf ein grundlegendes Gesetz des Raumes hinweist: auf

9.2. Das Polaritätsgesetz

Der Raum birgt Gesetze in sich, die unmittelbar nicht so leicht zu erkennen sind. Nach einiger Übung erkennt man aber einen Urgegensatz zwischen Punkt und Ebene. Die Gerade trägt als vermittelndes Element zwischen beiden diesen Gegensatz in sich, indem sie einmal als Schnittgerade zweier Ebenen, das andere Mal als Verbindungsgerade zweier Punkte charakterisiert werden kann. Gegensätzlichkeiten dieser Art nennt man in der Geometrie **Polaritäten**.

Betrachten wir das Dreiecksschema der sieben Grundgebilde (Fig. 8.1): Ersetzt man jeweils ein Element durch ein polares, so erhält man insgesamt das gleiche Schema. Dies bedeutet, dass es zu jedem Grundgebilde ein polares Gegengebilde gibt. Z. B.: die Gesamtheit der Geraden durch eine Punkt entspricht polar der Gesamtheit aller Geraden in einer Ebene. Also sind z. B. das Geradenbündel und das Geradenfeld zueinander polare Gebilde.

polare Elemente	$P \leftrightarrow \varepsilon$ $g \leftrightarrow g$
polare Gebilde	$P(g) \leftrightarrow \varepsilon(g)$ $P(\varepsilon) \leftrightarrow \varepsilon(P)$ $g(P) \leftrightarrow g(\varepsilon)$ $P(g\varepsilon) \leftrightarrow \varepsilon(gP)$
polare Operationen	verbinden $\leftrightarrow$ schneiden
polare Lagebeziehungen	liegen in $\leftrightarrow$ gehen durch

9.3. Aufgabe:

Man zeichne zuerst ein Kuboktaeder und ein Rhombendodekaeder. Dann weise man nach, dass diese beiden Körper zueinander polare Körper sind.

Gegenüberstellung:

Kuboktaeder

14 Ebenen (6 Vierecke, 8 Dreiecke)

24 Geraden

12 Punkte (Vierfläche, je 2 Dreiecke und 2 Vierecke)

1. Charakterisierung bezüglich der Punkte:
Alle Eckpunkte sind untereinander gleichwertig, insofern durch jeden Punkt 4 Ebenen gehen: Zwei Ebenen, in denen vier Ecken liegen und zwei Ebenen, in denen drei Ecken liegen.

Außerdem gehen durch jeden Punkt vier Geraden.

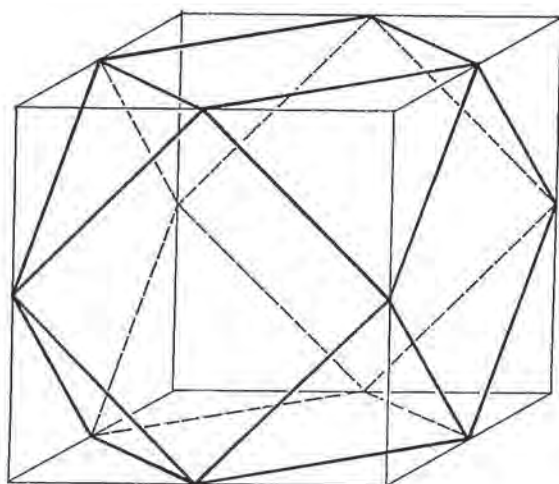


Fig. 9.2 Kuboktaeder

2. Charakterisierung bezüglich der Kanten:
In jeder der 24 Kanten liegen 2 Ecken bzw. es gehen 2 Ebenen durch die Kante, eine Vierecksebene und eine Dreiecksebene.

3. Charakterisierung bezüglich der Ebenen:
Die 14 Flächen sind untereinander nicht gleichwertig. In 6 der Ebenen liegen 4 Punkte und 4 Kanten, in 8 der Ebenen liegen 3 Punkte und 3 Kanten.

Rhombendodekaeder

14 Punkte (6 Vierfläche, 8 Dreifläche)

24 Geraden

12 Ebenen (Vierecke, je 2 Dreifläche und 2 Vierfläche)

1. Charakterisierung bezüglich der Ebenen:
Alle Begrenzungsebenen sind untereinander gleichwertig, insofern in jeder Ebene 4 Punkte liegen: Zwei Punkte, durch die vier Flächen gehen und zwei Punkte, durch die drei Flächen gehen.

Außerdem liegen in jeder Ebene vier Geraden.

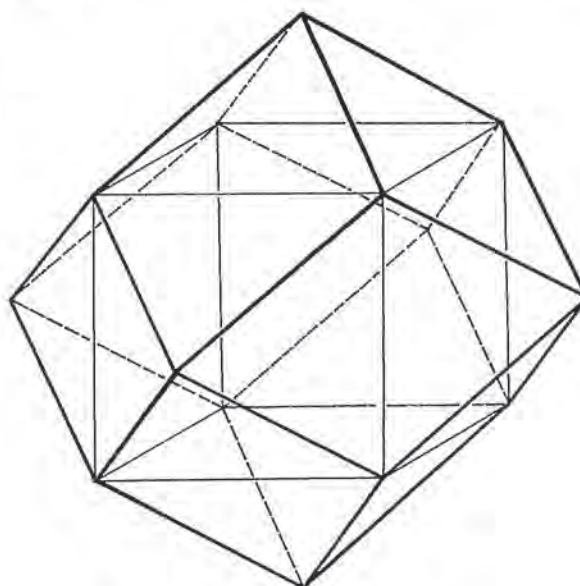


Fig. 9.3 Rhombendodekaeder

2. Charakterisierung bezüglich der Kanten:
Durch jede der 24 Kanten gehen 2 Flächen bzw. es liegen 2 Punkte in der Kante, ein Vierflachpunkt und ein Dreiflachpunkt.

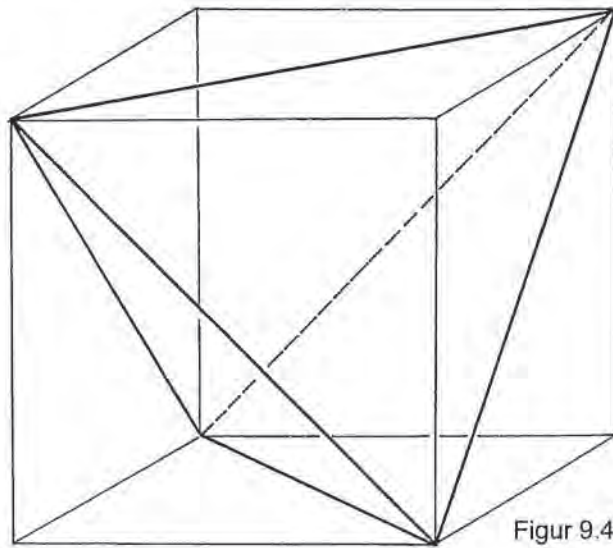
3. Charakterisierung bezüglich der Punkte:
Die 14 Ecken sind untereinander nicht gleichwertig. Durch 6 der Punkte gehen 4 Ebenen und 4 Kanten, durch 8 der Punkte gehen 3 Ebenen und 3 Kanten.

Bemerkenswert ist noch die Tatsache, dass das Kuboktaeder dem Würfel einbeschrieben, das Rhombendodekaeder dem Würfel umbeschrieben ist.

9.4. Aufgabe:

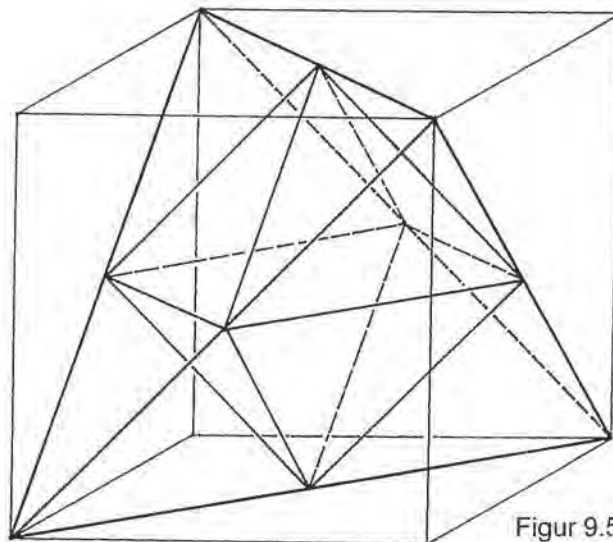
„Verbinde in einem Würfel, von einer Ecke (einem Punkt) ausgehend, nichtbenachbarte Punkte, die in derselben Fläche liegen.“

1. Was für ein Körper ergibt sich?
2. Wie lautet die entsprechende polare Aufgabe?



Figur 9.4

1. Es entsteht ein dem Würfel einbeschriebenes Tetraeder. Die Tetraederecken sind gleichzeitig Würfecken.
2. Die entsprechende polare Aufgabe lautet:
„Schneide um einen Oktaeder, von einer Fläche (Ebene) ausgehend, nichtbenachbarte Ebenen, die durch dieselbe Ecke (Punkt) gehen.“



Figur 9.5

Es entsteht ein dem Oktaeder umbeschriebenes Teraeder. Die Tetraederflächen sind gleichzeitig Oktaederflächen

9.5. Anmerkung zu den platonischen Körpern

Es gibt fünf vollständige regelmäßige Körper. Diese sind von Plato (427 – 347 v. Chr.) in seinem Dialog „Timaios“ beschrieben. Man kann erkennen, dass das Hexaeder (der Würfel) polar zum Oktaeder ist. Ebenso ist das Pentagondodekaeder polar zum Ikosaeder. Das Tetraeder ist zu sich selbst polar.

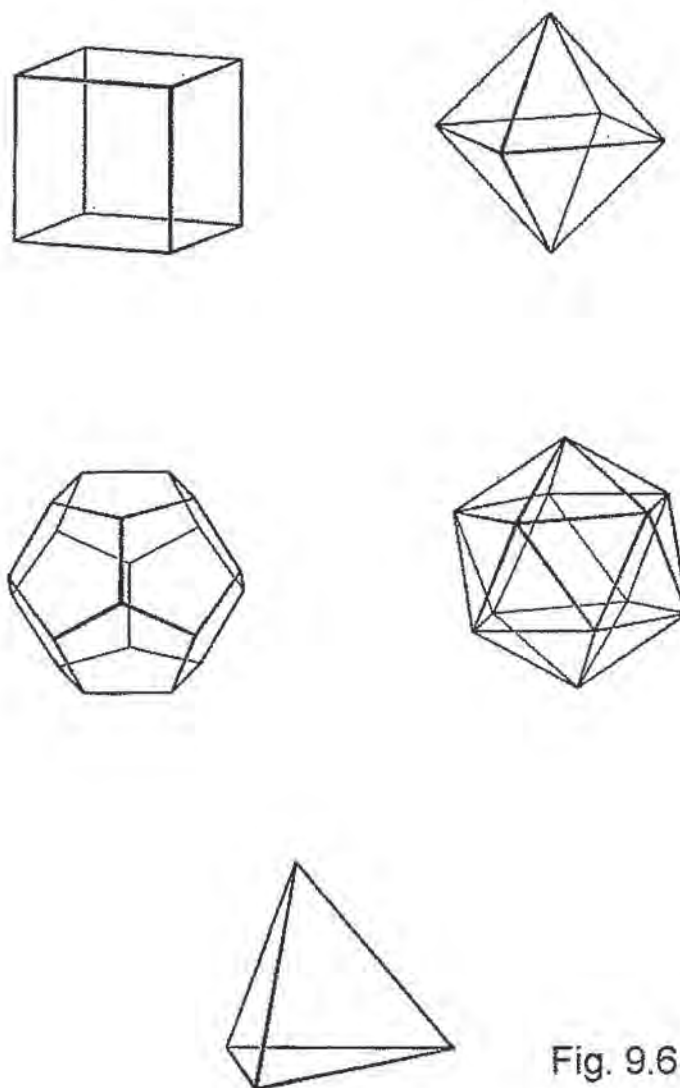
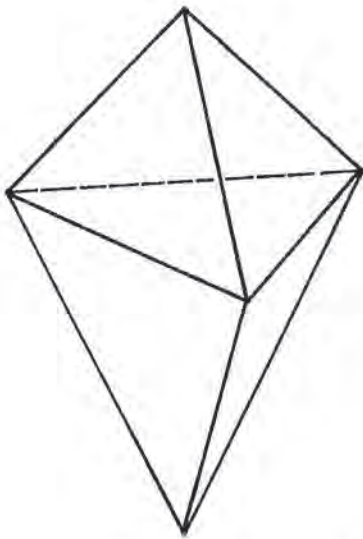


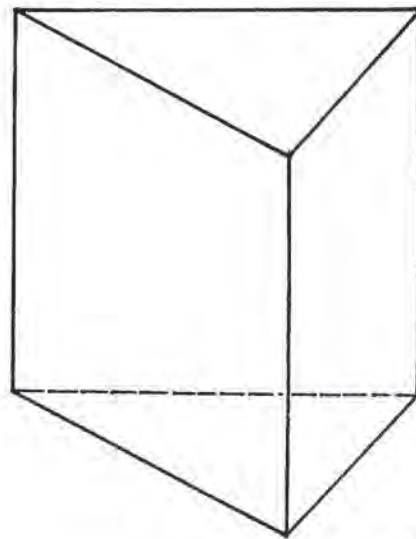
Fig. 9.6

9.6. Aufgabe

Polarisiere ein Doppeltetraeder und finde den polaren Körper.



Figur 9.7



Figur 9.8

5 Ecken (Punkte)

2 Ecken enthalten 3 Flächen (Dreifläche) und 3 Ecken enthalten 4 Flächen (Vierfläche). Durch 2 Ecken gehen 3 Kanten (Dreikante) und durch 3 Ecken gehen 4 Kanten (Vierkante).

6 Flächen (Ebenen)

Alle Flächen enthalten 3 Ecken (Dreiecke) und drei Seiten (Dreiseite). Jede Fläche enthält 1 Dreiflächecke und 2 Vierfläckecken.

9 Kanten (Geraden)

Jede Kante enthält 2 Dreiseitflächen (Schnittkante). 6 Kanten sind Verbindungsgeraden einer Vierfläckecke mit einer Dreiflächecke. 3 Kanten sind Verbindungsgeraden von 2 Vierfläckecken.

5 Flächen (Ebenen)

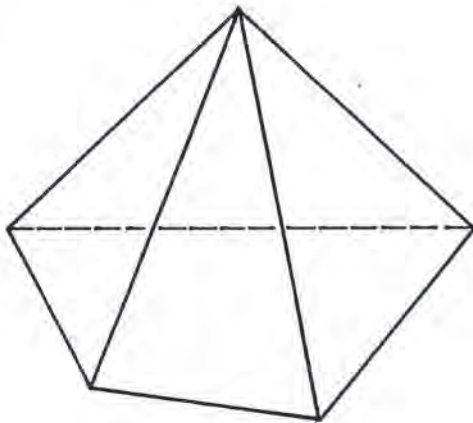
2 Flächen enthalten 3 Ecken (Dreiecke) und 3 Flächen enthalten 4 Ecken (Vierecke). In 2 Flächen liegen 3 Seiten (Dreiseite) und in 3 Flächen liegen 4 Seiten (Vierseite).

6 Ecken (Punkte)

Alle Ecken enthalten 3 Flächen (Dreifläche) und drei Kanten (Dreikante). Jede Ecke enthält 1 Dreiecksfläche und 2 Vierecksflächen.

9 Kanten (Geraden)

Jede Kante enthält 2 Dreikantecken (Verbindungsgerade). 6 Kanten sind Schnittgeraden einer Vierecksfläche mit einer Dreiecksfläche. 3 Kanten sind Schnittgeraden von 2 Vierecksflächen.

9.7. Aufgabe: Ein weiteres Beispiel zur Polarisation

Figur 9.9a

5 Ecken (Punkte)

4 Ecken enthalten 3 Flächen (Dreifläche) und 1 Ecke enthält 4 Flächen (Vierfläch).

4 Ecken enthalten 3 Kanten (Dreikante) und 1 Ecke enthält 4 Kanten (Vierkant).

4 Ecken enthalten 2 Dreiecksflächen und 1 Vierecksfläche.

1 Ecke enthält 4 Dreiecksflächen.

5 Flächen (Ebenen)

4 Flächen enthalten 3 Ecken (Dreiecke) und 1 Fläche enthält 4 Ecken (Viereck).

4 Flächen enthalten drei Seiten (Dreiseite) und 1 Fläche enthält 4 Seiten (Vierseit).

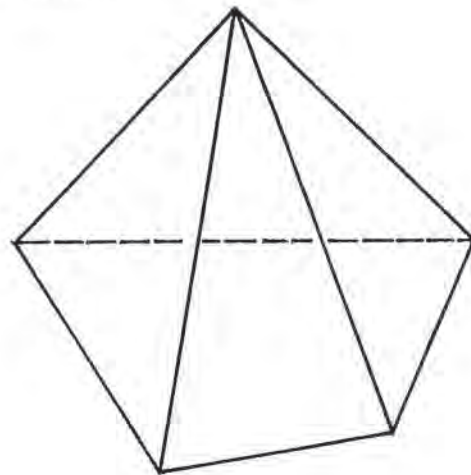
4 Flächen enthalten 2 Dreiflachecken und 1 Vierflachecke.

1 Fläche enthält 4 Dreiflachecken.

8 Kanten (Geraden)

4 Kanten sind Schnittgeraden von 2 Dreiseit- bzw. 2 Dreiecksflächen und gleichzeitig Verbindungsgeraden einer Vierfläch- bzw. Vierkantecke mit einer Dreifläch- bzw. Dreikantecke.

4 Kanten sind Verbindungsgeraden von 2 Dreikant- bzw. 2 Dreiflachecken und gleichzeitig Schnittgeraden einer Vierecks- bzw. Vierseitfläche mit einer Dreiecks- bzw. Dreiseitfläche.



Figur 9.9b

5 Flächen (Ebenen)

4 Flächen enthalten 3 Ecken (Dreiecke) und 1 Fläche enthält 4 Ecken (Viereck).

4 Flächen enthalten drei Seiten (Dreiseite) und 1 Fläche enthält 4 Seiten (Vierseit).

4 Flächen enthalten 2 Dreiflachecke und 1 Vierflachecke.

1 Fläche enthält 4 Dreiflachecken.

5 Ecken (Punkte)

4 Ecken enthalten 3 Flächen (Dreifläche) und 1 Ecke enthält 4 Flächen (Vierfläch).

4 Ecken enthalten 3 Kanten (Dreikante) und 1 Ecke enthält 4 Kanten (Vierkant).

4 Ecken enthalten 2 Dreiecksflächen und 1 Vierecksfläche.

1 Ecke enthält 4 Dreiecksflächen.

8 Kanten (Geraden)

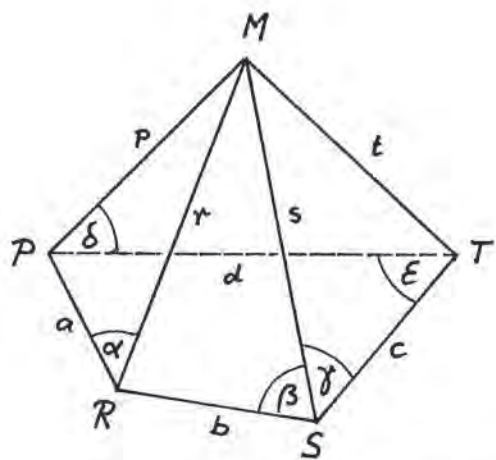
4 Kanten sind Verbindungsgeraden von 2 Dreikant- bzw. 2 Dreiflachecken und gleichzeitig Schnittgeraden einer Vierecks- bzw. Vierseitfläche mit einer Dreiecks- bzw. Dreiseitfläche.

4 Kanten sind Schnittgeraden von 2 Dreiseit- bzw. 2 Dreiecksflächen und gleichzeitig Verbindungsgeraden einer Vierfläch- bzw. Vierkantecke mit einer Dreifläch- bzw. Dreikantecke.

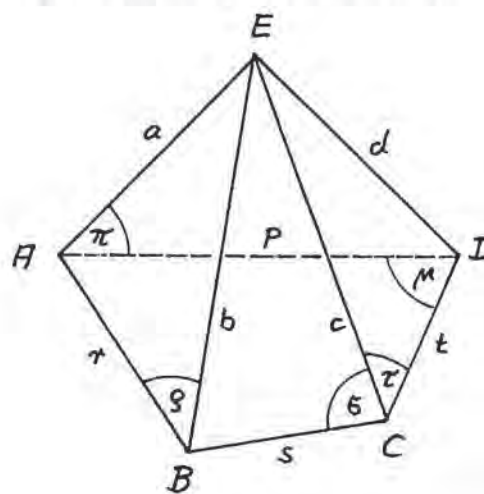
Diese Pyramide ist zu sich selbst polar.

Untersuchen wir die einzelnen Elemente genauer, so finden wir:

5 Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$	$\leftrightarrow$	5 Punkte A, B, C, D, E
z. B. α enthält das Dreieck PRM		z. B. A enthält das Dreiflach π, ρ, μ
5 Punkte P, R, S, T, M	$\leftrightarrow$	5 Ebenen $\pi, \rho, \sigma, \tau, \mu$
z. B. P, R, S, T bilden das Viereck ε		z. B. π, ρ, σ, τ bilden das Vierflach E
8 Geraden a, b, c, d, p, r, s, t	$\leftrightarrow$	8 Geraden a, b, c, d, p, r, s, t
z. B. b ist Verbindungsgerade RS		z. B. b ist Schnittgerade $\rho \sigma$
s ist Schnittgerade $\beta \gamma$		s ist Verbindungsgerade ist BC

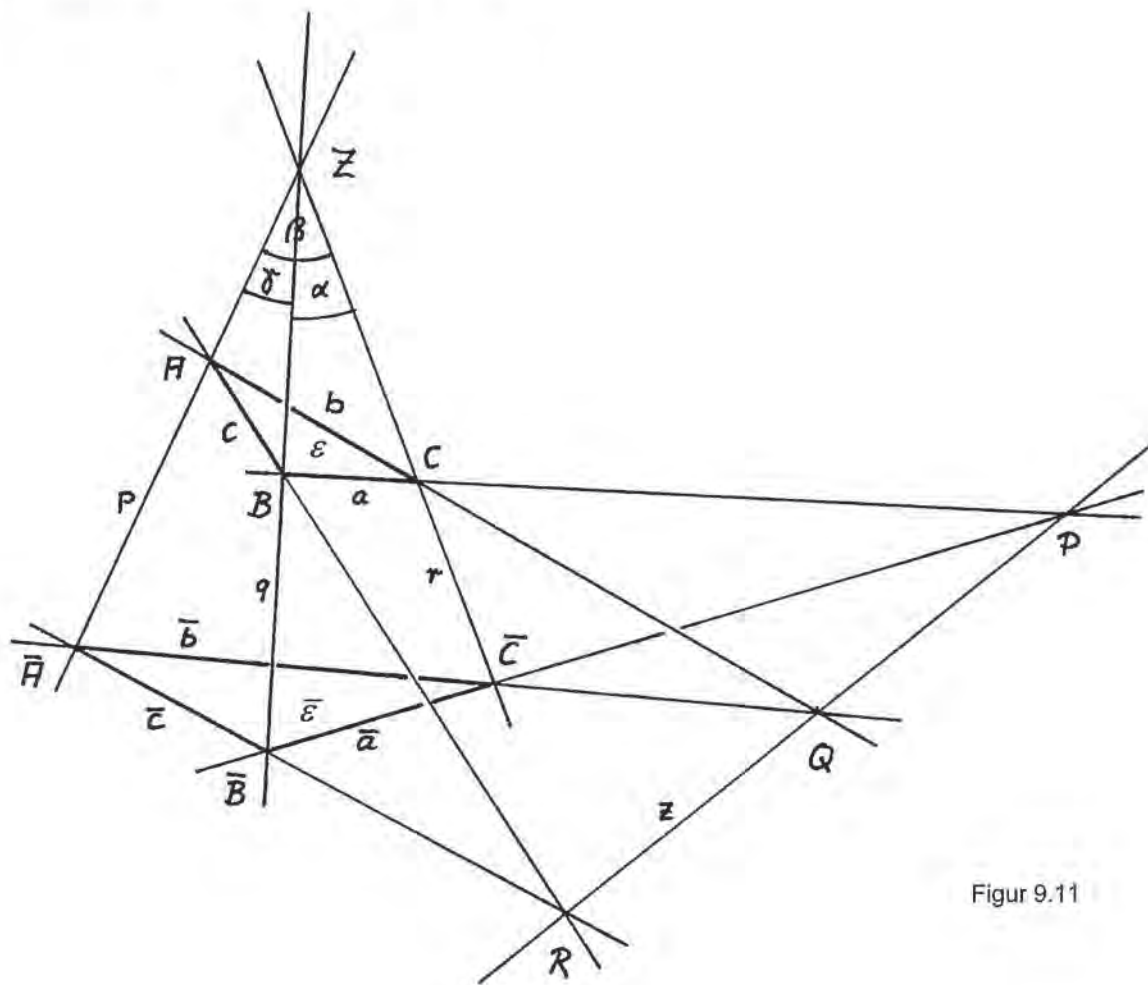


Figur 9.10a



Figur 9.10b

9.8. Der Satz von Desargues im Raum



Figur 9.11

Zur Figur 9.11

Zwei Ebenen geschnitten ergeben immer eine Schnittgerade.

Die drei Ebenen α , β , γ bilden die Schnittgeraden p , q , r und den Punkt Z ; es entsteht ein Dreiflach.

Die vier Ebenen α , β , γ , ε bilden ein Tetraeder mit den sechs Geraden p , q , r , a , b , c und den Punkten A , B , C , Z .

Die vierte Ebene ε und die fünfte Ebene $\bar{\varepsilon}$ schneiden sich immer in einer Geraden, der „Achse“ z .

Dass die 10 Geraden und 10 Punkte in der Figur den Satz von Desargues (vergl. Kapitel 2) erfüllen, soll nun bewiesen werden:

a , b , c liegen in der 4. Ebene ε und $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ in der 5. Ebene $\bar{\varepsilon}$. Diese beiden Ebenen ε und $\bar{\varepsilon}$ schneiden sich in z , somit bilden alle sechs Geraden dieser Ebenen Schnittpunkte mit der Geraden z .

a und $\bar{a}$ liegen in der Ebene α des Dreiflachs durch Z , also haben sie einen Schnittpunkt.

Ergebnis: $a \cap \bar{a} = P$; entsprechend $b \cap \bar{b} = Q$ und $c \cap \bar{c} = R$. P, Q, R liegen in z .

Die zwei Dreiecke ABC in ε und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in $\bar{\varepsilon}$ sind „perspektiv“ in Bezug auf den Punkt Z ($\alpha\beta\gamma$).

Diese (räumliche) Konfiguration enthält

10 Geraden ($a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, p, q, r, z$) und

10 Punkte ($A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, P, Q, R, Z$) und

5 Ebenen ($\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \bar{\varepsilon}$).

In der Figur 9.12 ist diese Konfiguration polarisiert:

Zwei Punkte verbunden ergeben immer eine Verbindungsgerade.

Die drei Punkte A, B, C bilden die Verbindungsgeraden p, q, r und die Ebene ζ (= „Zeta“); es entsteht ein Dreieck.

Die vier Punkte A, B, C, E bilden ein Tetraeder mit den sechs Geraden p, q, r, a, b, c und den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$.

Der vierte Punkt E und der fünfte Punkt $\bar{E}$ verbinden sich immer durch eine Gerade, der „Achse“ z .

a, b, c gehen durch den 4. Punkt E und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ durch den 5. Punkt $\bar{E}$. Diese beiden Punkte E und $\bar{E}$ verbinden sich durch z , somit bilden alle sechs Geraden dieser Punkte Verbindungsebenen mit der Geraden z :

a und $\bar{a}$ gehen durch den Punkt A des Dreiecks in ζ , also haben sie eine Verbindungsebene.

Ergebnis: $a \cap \bar{a} = \pi$; entsprechend $b \cap \bar{b} = \varphi$ und $c \cap \bar{c} = \rho$. π, φ, ρ gehen durch z .

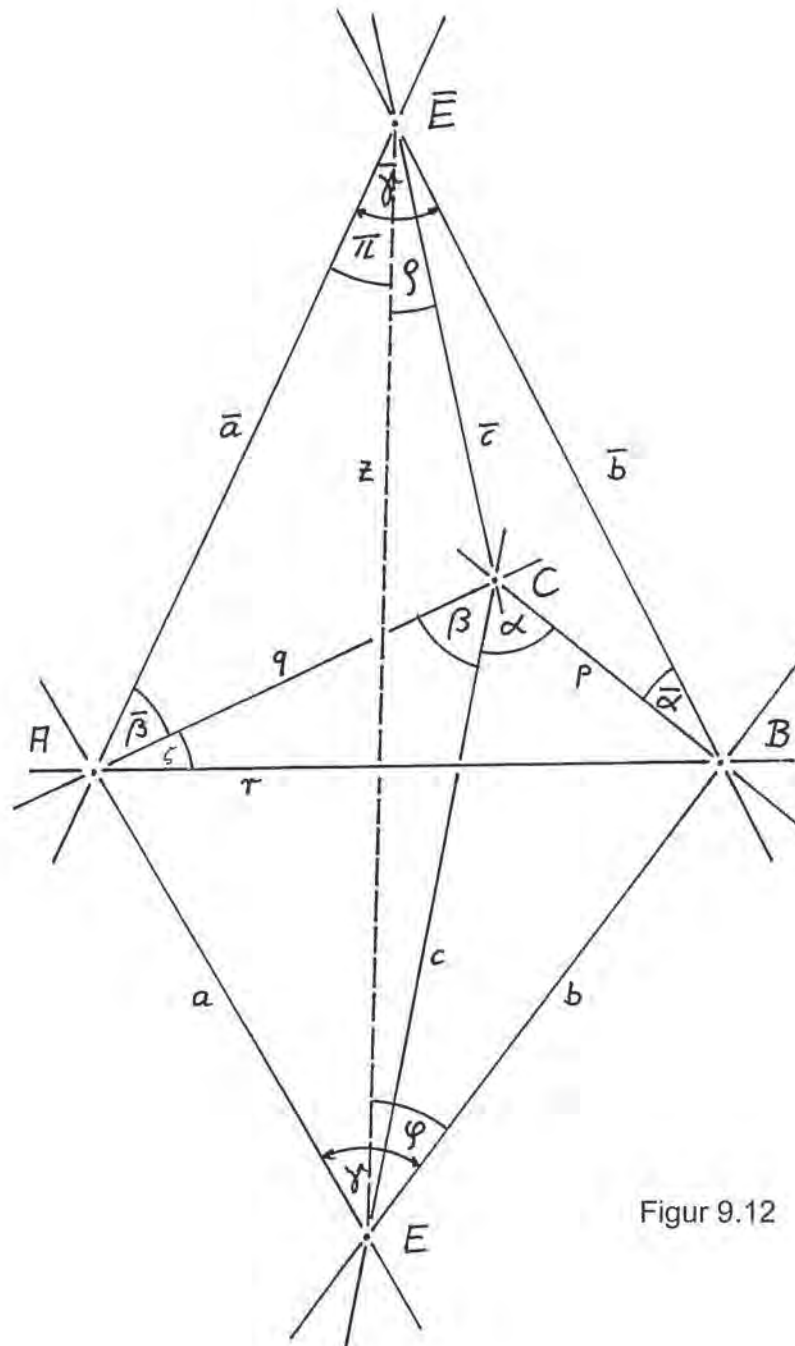
Die zwei Dreifläche $\alpha\beta\gamma$ durch E und $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$ durch $\bar{E}$ sind „perspektiv“ in Bezug auf die Ebene ζ (ABC).

Diese (räumliche) Konfiguration enthält

10 Geraden ($a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, p, q, r, z$) und

10 Ebenen ($\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \pi, \varphi, \rho, \zeta$) und

5 Punkte ($A, B, C, E, \bar{E}$)



Figur 9.12

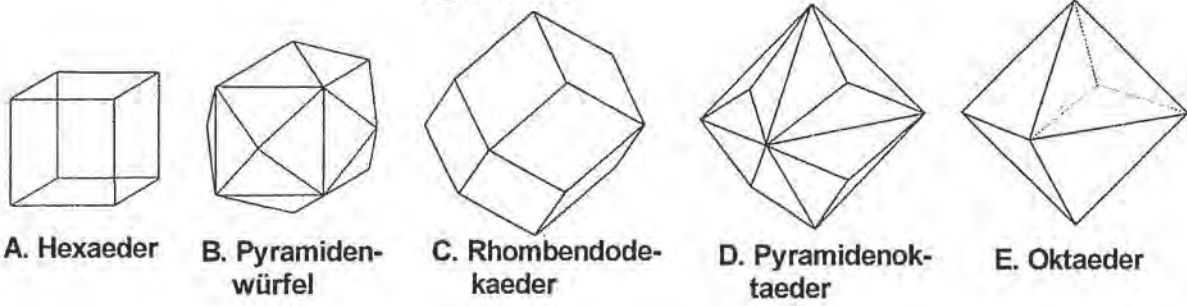
9.9. Polare Veränderungen

Die Figuren 9.13 und 9.14 zeigen zwei polare Veränderungen des Ausgangskörpers.

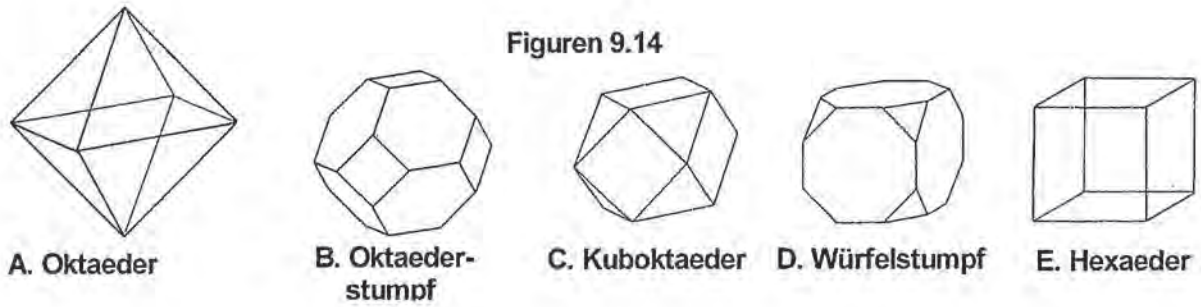
In 9.13 wachsen aus der Würfelfläche vierkantige Pyramiden heraus; bei B bildet sich ein Pyramidenwürfel. Ist die Pyramidenhöhe zur halben Würfelhöhe angewachsen, entsteht ein Rhombendodekaeder. Dessen dreikantige Ecken werden eingedrückt und es bildet sich ein Pyramidenoktaeder. Das Oktaeder ist das Ende der Verwandlung.

Polar in 9.14: Werden die Oktaederecken beschnitten, so entsteht ein Oktaederstumpf (B). Erreicht die Schnitttiefe die halbe Oktaederhöhe, entsteht das Kuboktaeder. Dessen dreiseitige Flächen wandern heraus und es bildet sich ein Würfelstumpf; das Hexaeder ist das Ende der Verwandlung.

Figuren 9.13

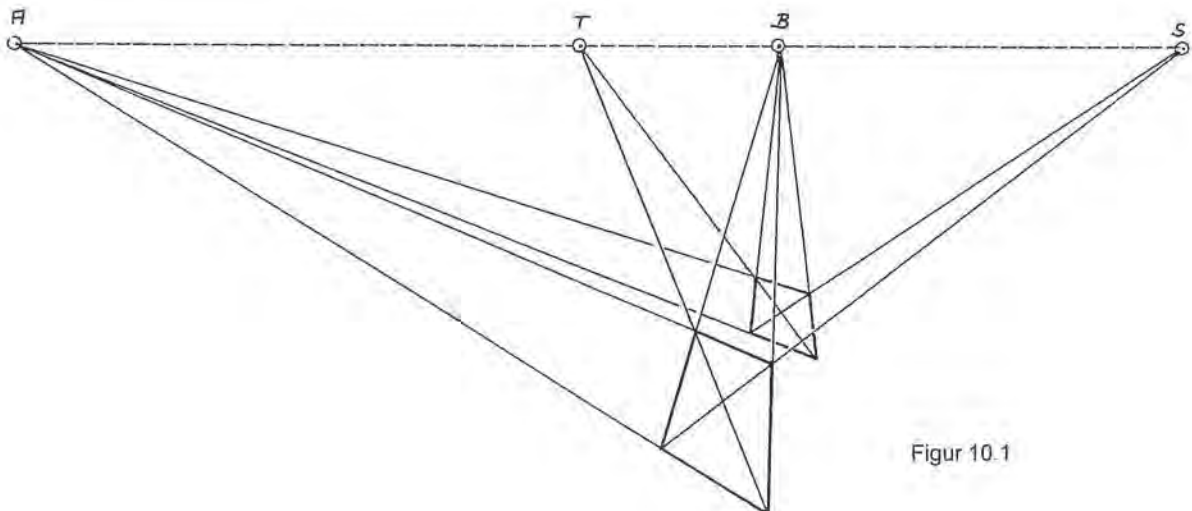


Figuren 9.14



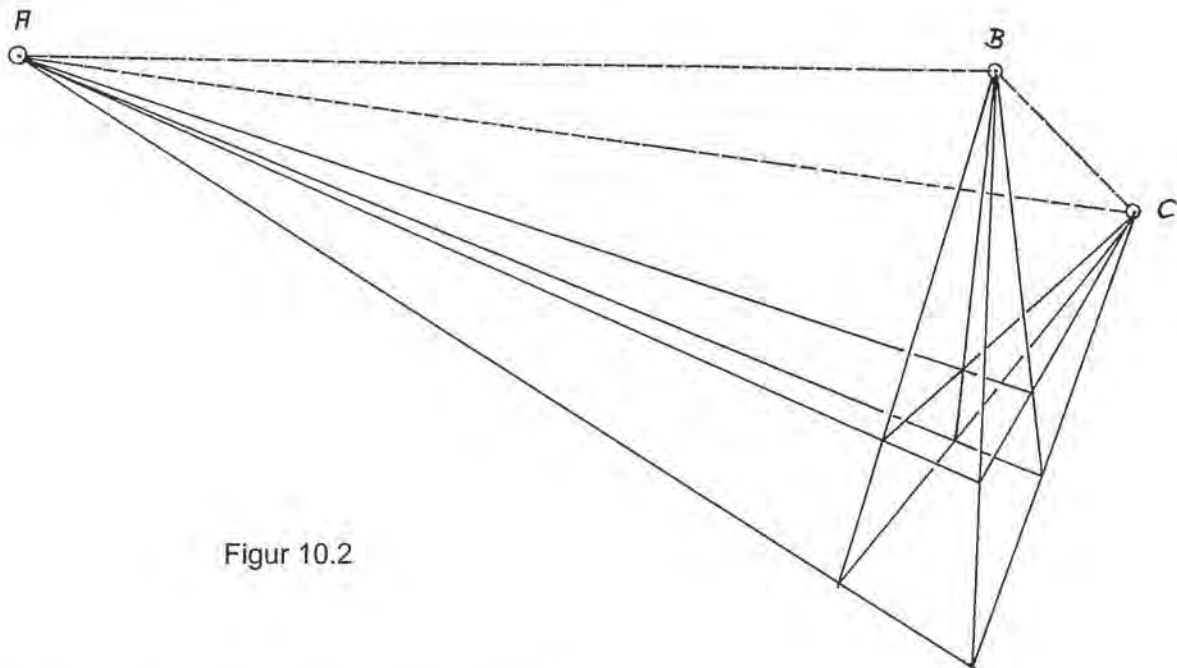
10. Der perspektive Würfel

Zwei Vierecke in verschiedenen Ebenen mit gemeinsamer Horizontlinie (wieder treffen sich die 2. Diagonalen beider Vierecke im gleichen Punkt T — vergleiche Figur 7.2).



Figur 10.1

Wir verbinden entsprechende Ecken der Vierecke und erhalten ein dreidimensionales Gebilde – einen perspektiven Würfel. Die neuen Körperkanten treffen sich alle in einem Punkt C.

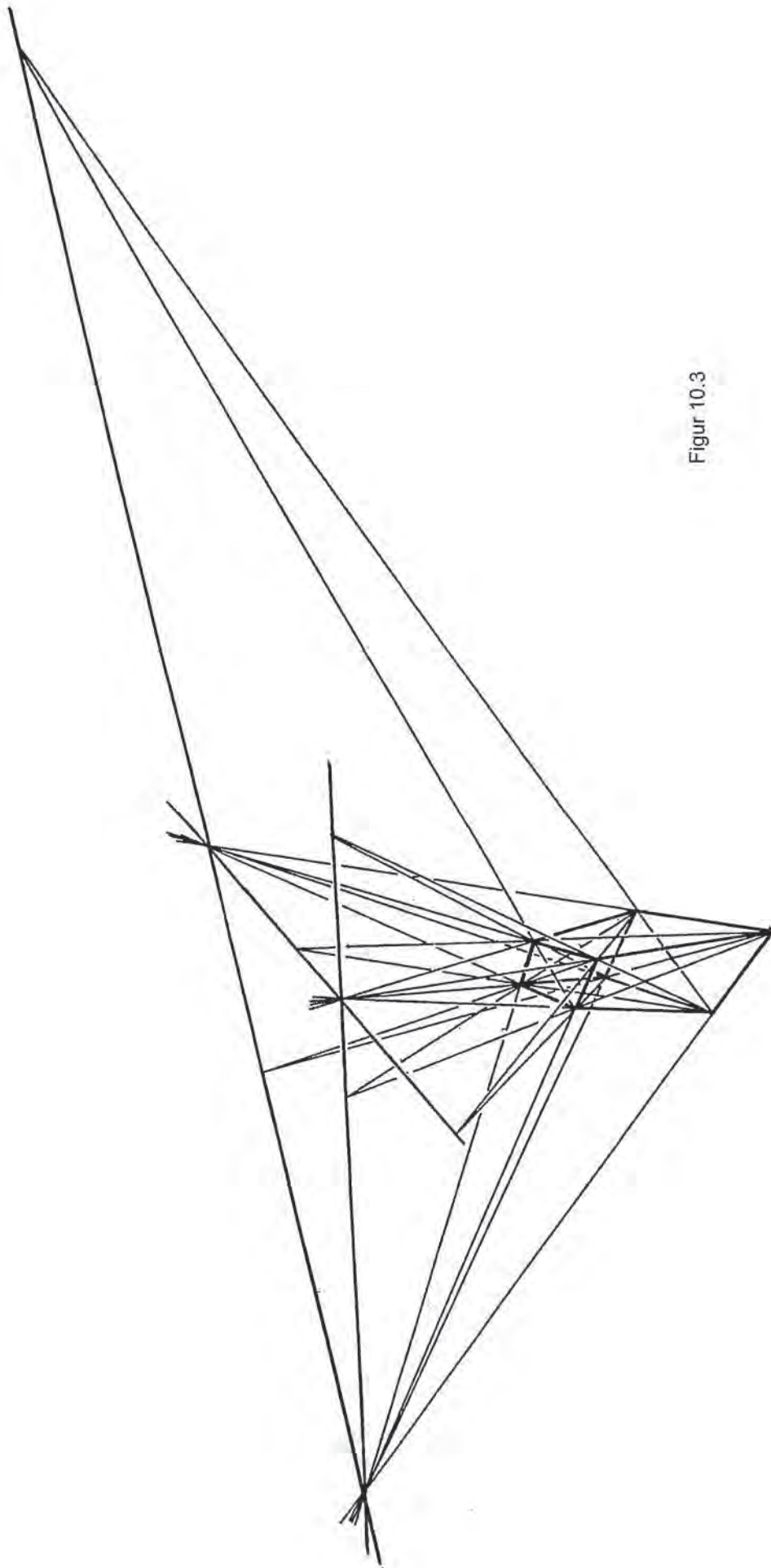


Figur 10.2

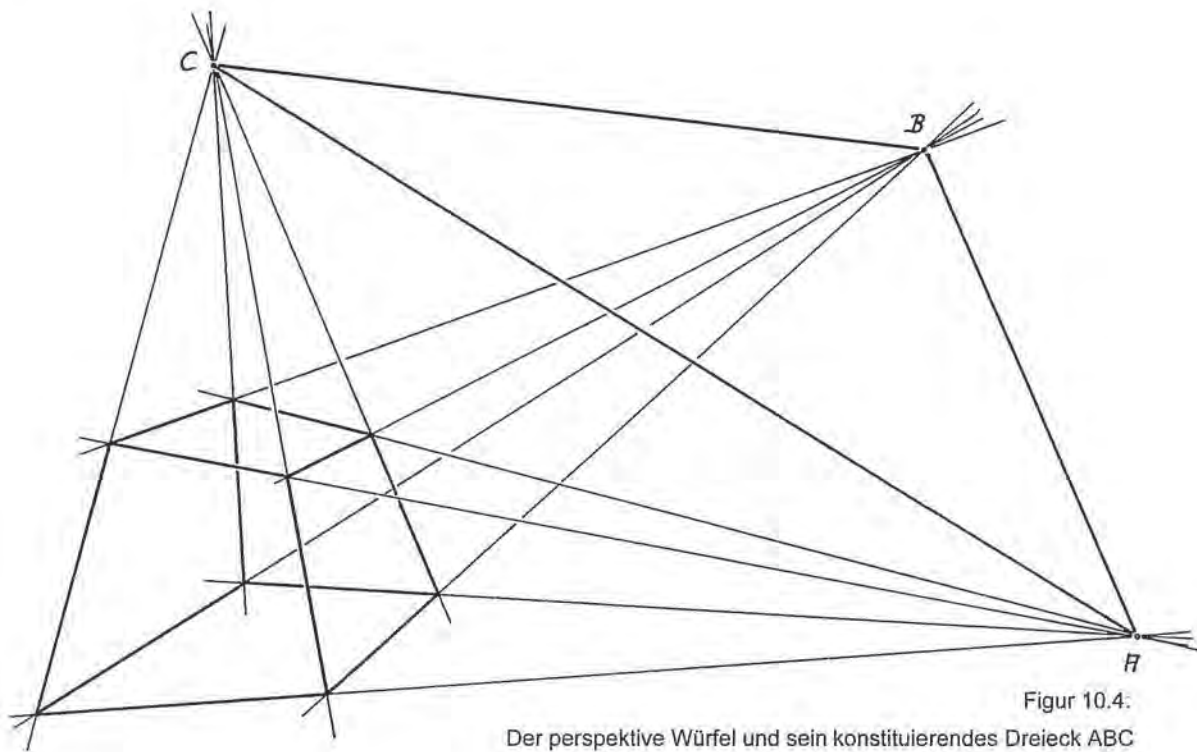
Zu Figur 10.2 und 10.3 (siehe nächste Seite):

Punkt C ist ebenfalls seitenbildend wie A und B. Aus diesen drei Punkten heraus entspringen die drei mal vier Kantenlinien. Diese Form hat (abgesehen von Maß und rechtem Winkel) alle Eigenschaften eines Kubus: 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen. Die drei kantenbildenden Punkte A, B, C bilden eine Ebene, die als 3. Ebene, wie auch die beiden Vierecksebenen, durch die Horizontlinie geht. Auch von den beiden anderen Seiten des Dreiecks ABC gehen jeweils zwei Ebenen aus, die die Flächen des Hexaeders entstehen lassen. Die acht Eckpunkte der Raumform entstehen durch das Ineinanderweben der vom Dreieck ausgehenden 12 Geraden und sechs Ebenen. Sogar die Diagonalen der vier in dem neuen Punkt C zusammenlaufenden Flächen werden sich bei exaktem Zeichnen paarweise in den entsprechenden Dreiecksseiten treffen! Sie bilden in jeder Dreiecksseite zusammen mit je zwei Dreiecksseiten vier harmonische Punkte. (Fig. 10.3 – vergl. mit Fig. 10.1).

Die formschaffenden Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) sind harmonisch ineinander verflochten. Wir erkennen: Von dem Dreieck ABC geht die ganze Form aus. Das Dreieck ist der Ursprung der Form (Fig. 10.2 und 10.4).

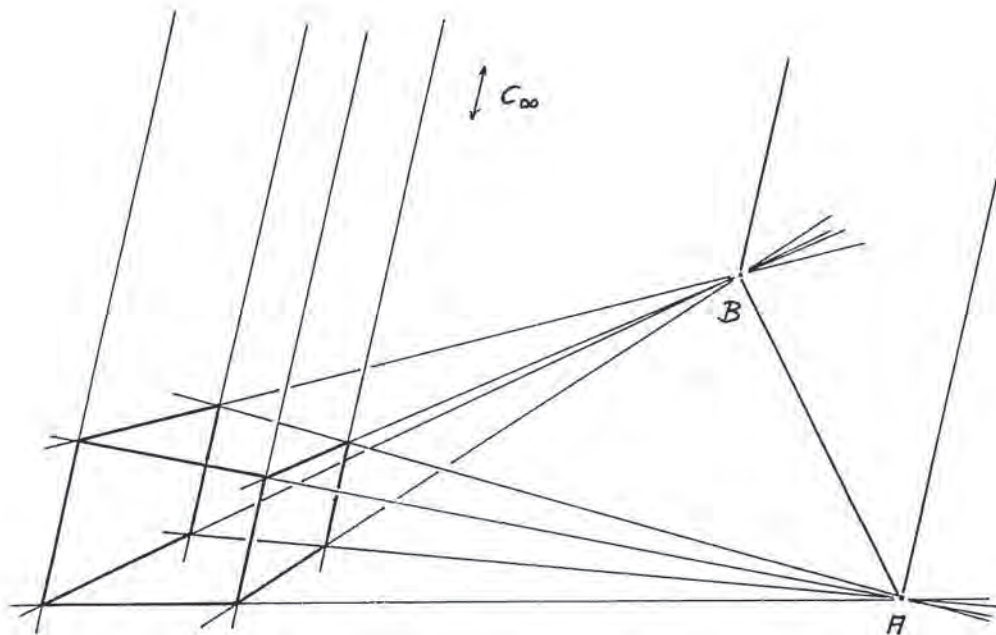


Figur 10.3

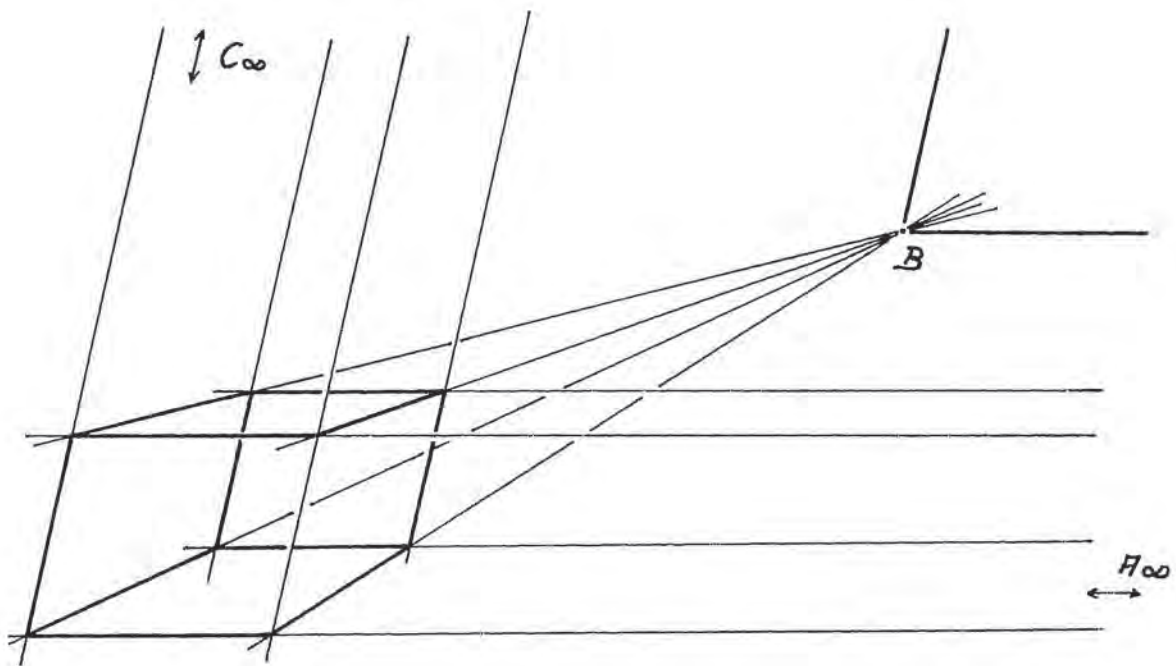


Wir denken uns die Dreiecksebene ABC, die „Urebene“, beweglich und stellen uns vor, wie sich die Körperform dabei verändert!

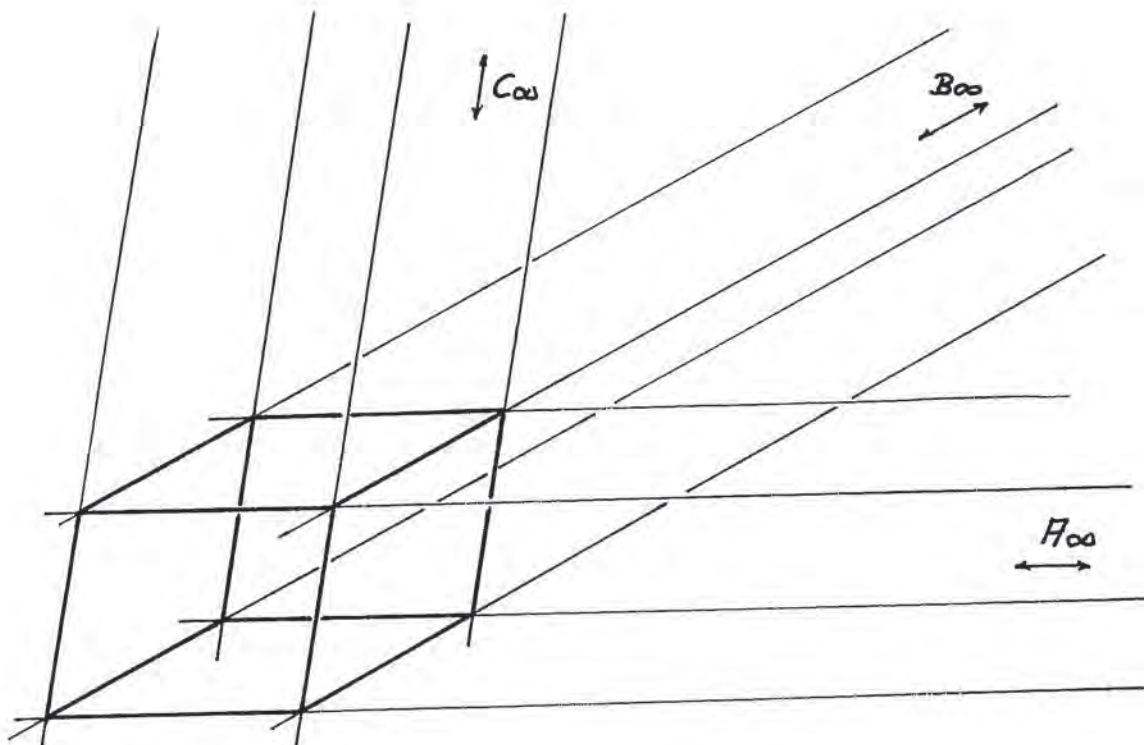
Lassen wir die „Urebene“ zur unendlich fernen Ebenen des Raumes werden, so nimmt unser allgemeiner („perspektiver“) Würfel metrische Eigenschaften an: Kanten und Flächen werden parallel (wie z. B. beim Parallelepiped des Feldspats), im Sonderfall des rechten Winkels entsteht der Würfel (Figuren 10.5 bis 10.7).



Figur 10.5:
Wie 10.4, jedoch $C \rightarrow C_\infty$

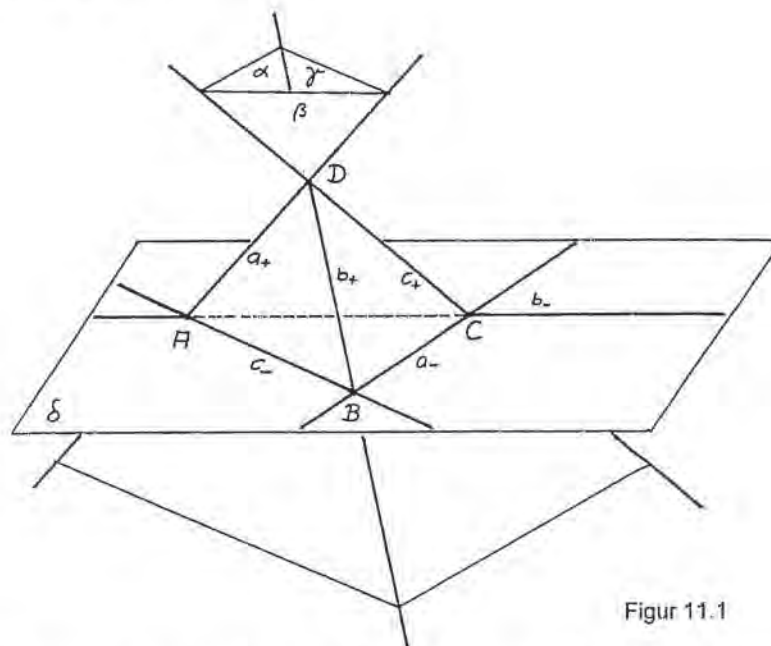


Figur 10.6:
Wie 10.5, jedoch zusätzlich $A \rightarrow A_\infty$



Figur 10.7:
Wie 10.6, jedoch auch $B \rightarrow B_\infty$

11. Das Tetraeder als Vierflach



Figur 11.1

4 Punkte A, B, C, D in allgemeiner Lage im Raum bilden mit ihren 6 Verbindungsgeraden (a_+ , b_+ , c_+ , a_- , b_- , c_-) 4 Verbindungsebenen (α , β , γ , δ). Die Verbindungsgeraden bilden die Kanten eines (im Allgemeinen nicht regelmäßigen) Tetraeders.

Diese Tatsache polarisiert ergibt:

4 Ebenen α , β , γ , δ in allgemeiner Lage bilden mit ihren 6 Schnittgeraden (a_+ , b_+ , c_+ , a_- , b_- , c_-) 4 Schnittpunkte (A, B, C, D); die Schnittgeraden bilden die Kanten eines Tetraeders.

Da sich in beiden Fällen das selbe Gebilde ergibt, kann das Tetraeder als Grundgebilde des Raumes angesehen werden (in 9.5 bezeichneten wir das Tetraeder als selbstpolar). Es ist ein in sich ausgeglichenes, fertiges Gebilde. Es bietet keinen Anlass, weitere Konstruktions-schritte auszuführen.

12. Das vollständige Hexaeder

Wählt man einen Punkt E im Innern des Tetraeders ABCD mit den Kanten a_+ , b_+ , c_+ und a_- , b_- , c_- (siehe Fig. 12.1), so schneiden sich die Verbindungsgeraden von E mit den Tetraeder-ecken in den jeweils gegenüberliegenden Tetraederebenen und wir erhalten ein Hexaeder mit den 6 Ebenen α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 . Das Gebilde aus drei Ebenenpaaren, den 8 Ecken und 12 Kanten nennen wir das

einfache Hexaeder.

Zeichnen wir noch die vier Kreuzlinien (Raumdiagonalen), so bilden je 2 dieser Kreuzlinien eine Kreuzebene. Durch jeden der Punkte A, B, C, D gehen 2 solche Kreuzebenen. Sie gehören alle einem Bündel an, dessen Träger der „Mittelpunkt“ M ist (Figur 12.2). Dieses

vollständige Hexaeder

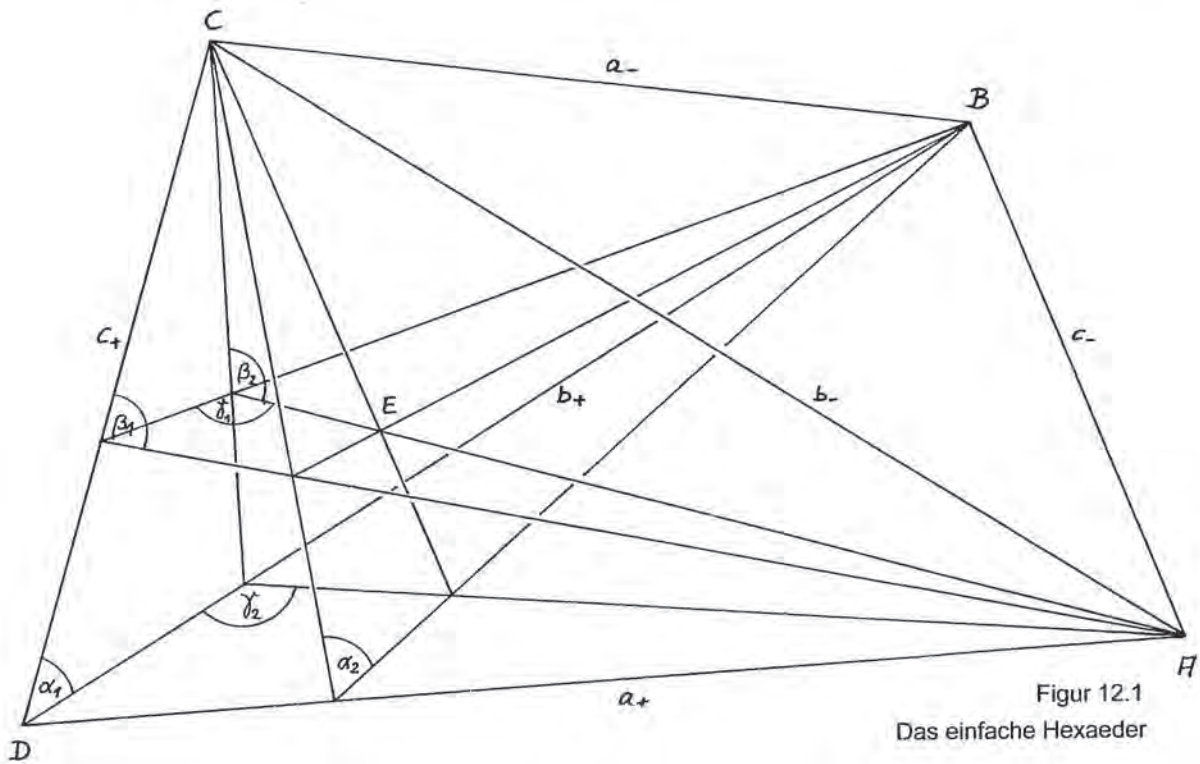
besteht aus:

<u>12 Punkten</u>	<u>(12 + 1) Flächen</u>	<u>(16 + 3) Geraden</u>
8 Ecken	6 Flächen	12 Kanten
A, B, C	6 Kreuzebenen	4 Kreuzlinien
Mittelpunkt M	Ebene $\delta = ABC$	a., b., c.

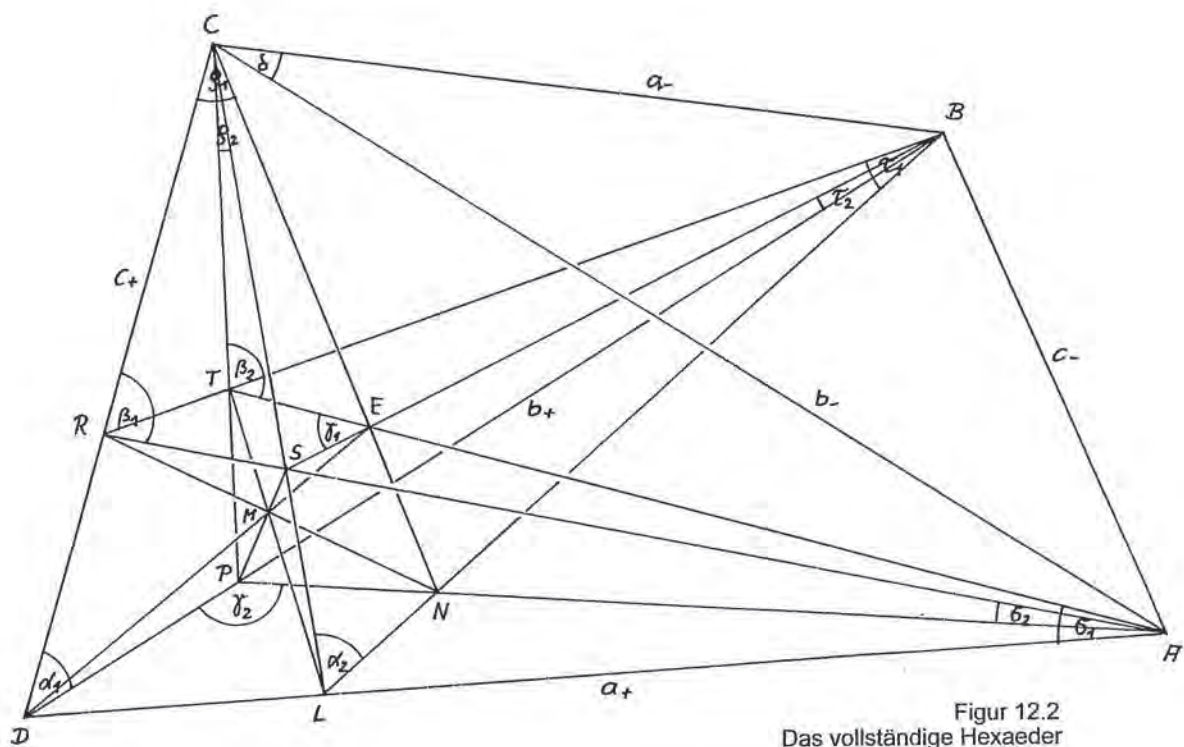
In der Figur 12.3 ist ein vollständiges Hexaeder gezeichnet. Man erkennt die 3 Punkte (ungefüllte Kreise – grün zeichnen), durch die je vier Kanten gehen. Je 2 Gegenflächen gehen durch eine Dreiecksseite (gestrichelt). Die vier Kreuzlinien schneiden die Dreiecksebene δ in je einem Punkt (schwarz zeichnen). Diese 4 Punkte sind in der Ebene δ die Grundpunkte eines vollständigen Vierecks. Die 6 Seiten des vollständigen Vierecks sind die Schnittlinien der Kreuzebenen mit δ ; die grünen Punkte bilden das Nebendreieck. Die Flächendiagonalen gegenüberliegender Hexaederseiten treffen sich jeweils in einem Punkt (violett zeichnen) in der Seite des Nebendreiecks. Diese 6 Punkte sind die Ecken eines vollständigen Vierseits, das mit jenem Viereck (schwarze Punkte) das Nebendreieck (rot) gemeinsam hat (vgl. Fig. 7.6: harmonische Grundfigur).

Das Hexaeder ist somit mit einer harmonischen Grundfigur in seiner Ebene δ verknüpft.

Anmerkung: In Fig. 12.3 beziehen sich die Farbangaben von Punkten und Geraden auf die Farben im Kapitel 7 (siehe Anmerkung dort). Auch die Fig. 12.2 wird durch Farbgebung gegliedert: a.: orange, b.: violett, c.: grün. Die Kanten durch A (TE, RS, PN, DL): gelb, die Kanten durch C: braun, die vier Würfelendiagonalen (Kreuzlinien): rot (durch den Punkt M). Entsprechend in der polaren Fig. 13.2: die Kanten a_+ : orange, b_+ : violett, c_+ : grün. Die Kanten in der Ebene α ($\tau\epsilon = C_2B_2$; $\rho\sigma = B_1C_2$; $\pi\nu = B_2C_1$; $\delta\lambda = C_1B$): gelb, in β : blau, in γ : braun, die 4 Kreuzlinien (in der Ebene μ): rot.

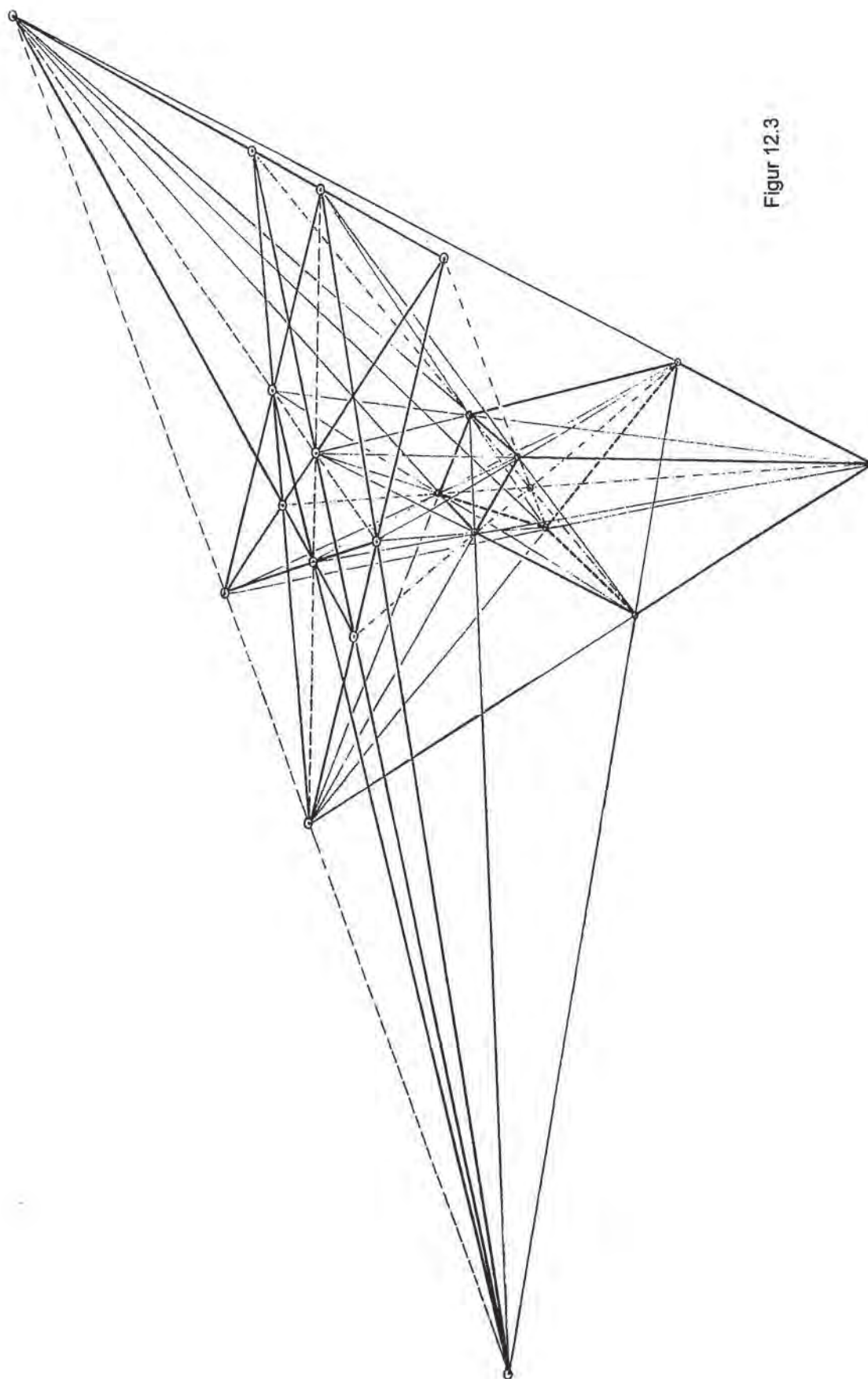


Figur 12.1
Das einfache Hexaeder

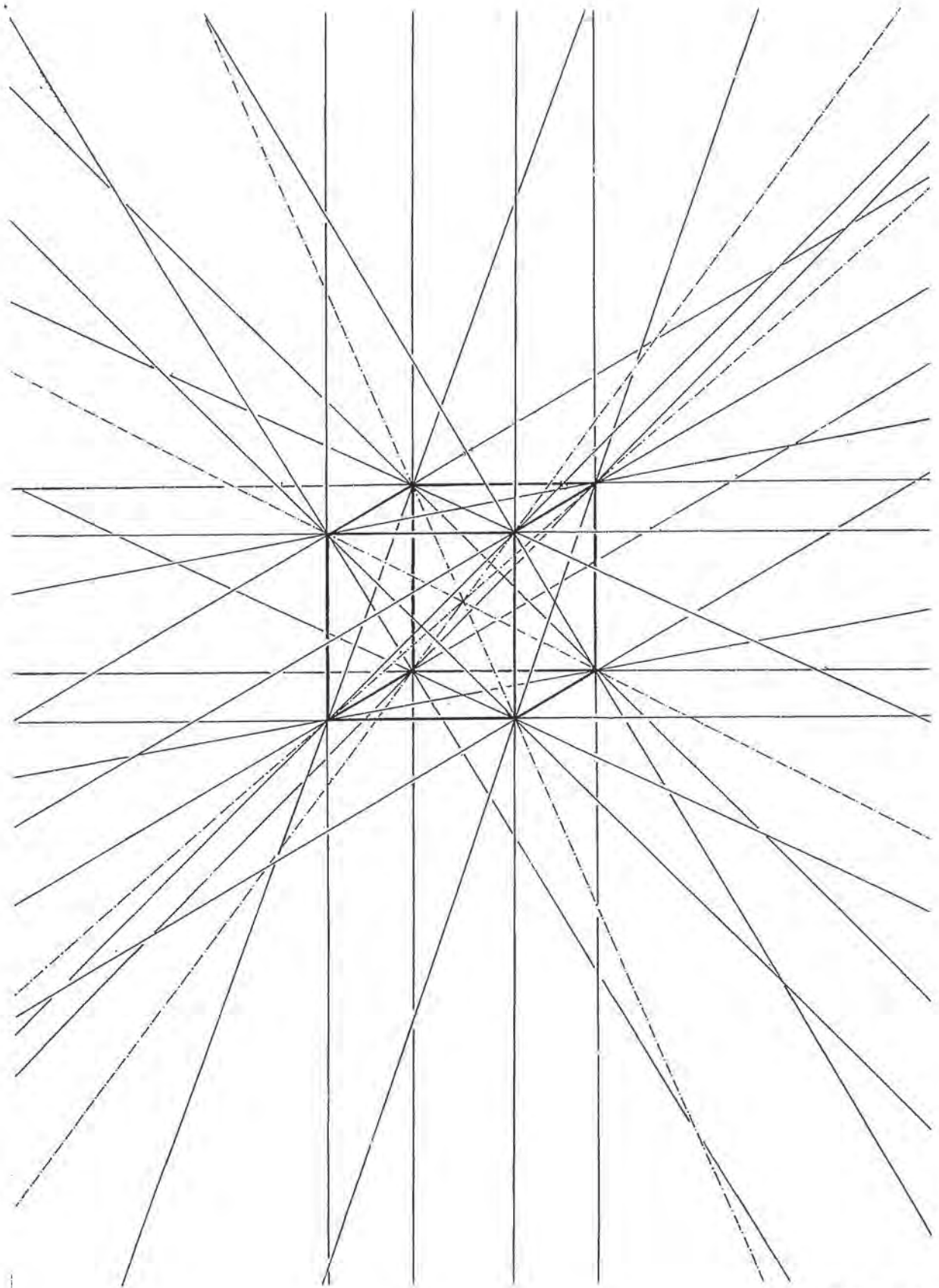


Figur 12.2
Das vollständige Hexaeder

Wird die Ebene δ zur Fernebene δ_∞ und werden die Richtungen A_∞ , B_∞ , C_∞ rechtwinklig aufeinander bezogen, erhält man Figur 12.4



Figur 12.3



Figur 12.4

13. Das vollständige Oktaeder

Bevor wir das vollständige Hexaeder polarisieren, um dadurch das vollständige Oktaeder zu erhalten, zeichnen wir zuerst als Vorübung ein einfaches Oktaeder, als polares Gebilde des einfachen Hexaeders.

Es besteht aus

- 3 Punktpaaren,
- 8 Flächen und
- 12 Kanten.

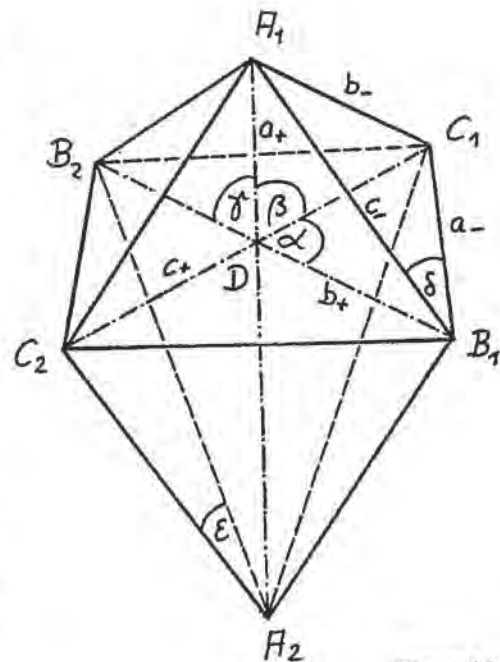
Um das zum vollständigen Hexaeder polare Gebilde zu erhalten, gehen wir vom Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$ aus und führen die polare Störung aus, indem wir eine 5. Ebene ε außerhalb dazunehmen. In den Kanten a_+ , b_+ und c_+ des Bündels D liegen die drei

Punktpaare A_1, A_2 und B_1, B_2 und C_1, C_2 . Zu je vieren haben diese Punkte eine Ebene gemeinsam, nämlich α bzw. β bzw. γ . Außerdem haben die 6 Punkte noch 3 mal 4 Verbindungsgeraden, die die 12 Kanten eines Oktaeders bilden. Und außerdem bestimmen die 6 Punkte ($A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$) 8 Verbindungsebenen, die Flächen des Oktaeders.

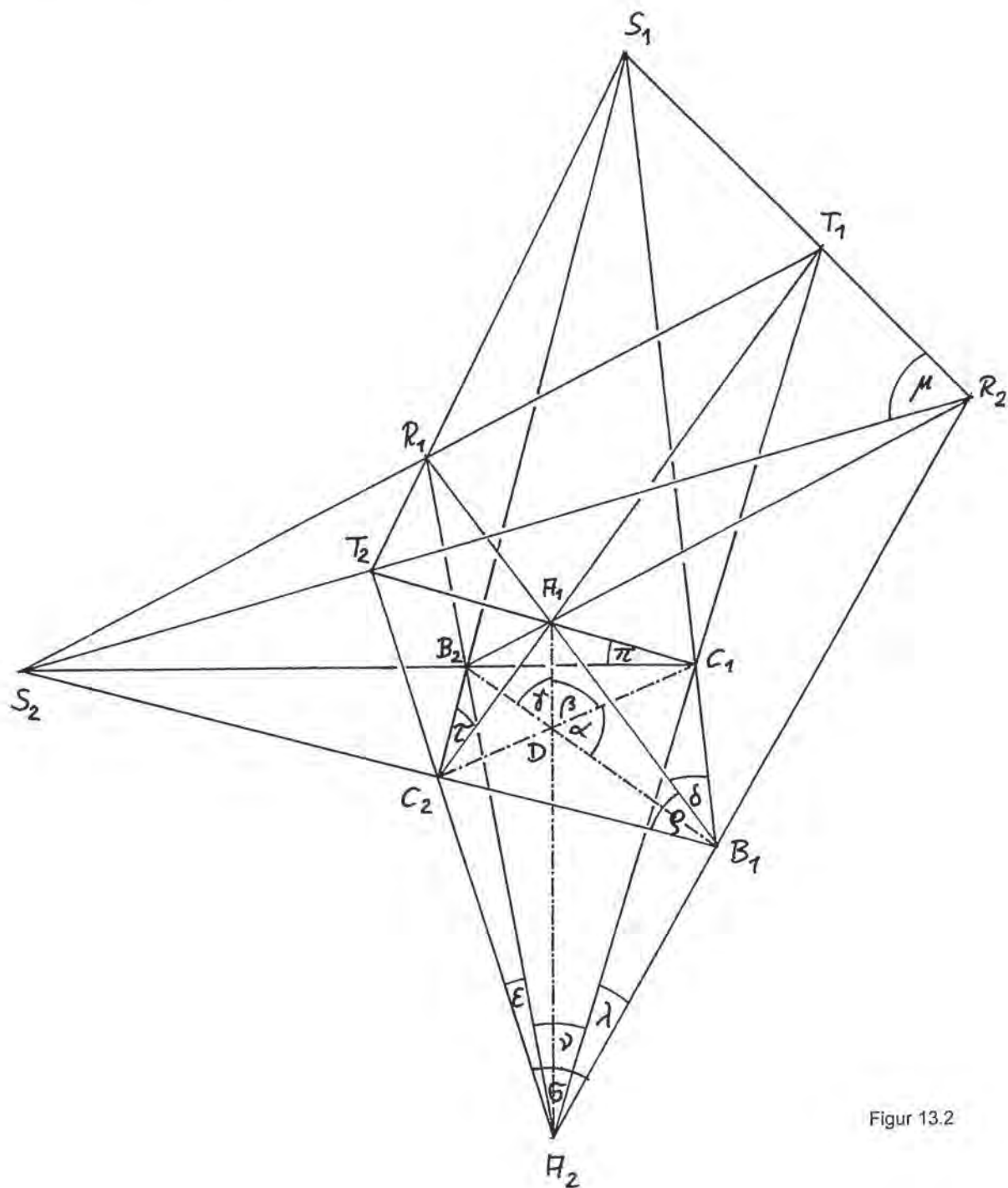
Wir betrachten noch die 4 Kreuzlinien, die Schnittgeraden von Gegenflächen des Oktaeders (Figur 13.2). Zu je zweien bilden diese Kreuzlinien einen Kreuzpunkt (im Schnittpunkt zweier Gegenkanten). In jeder der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ liegen 2 Kreuzpunkte (S_1, S_2 in α ; R_1, R_2 in β , T_1, T_2 in γ). Die Verbindung der 6 Kreuzpunkte ergibt die 4 Kreuzlinien, die alle derselben Ebene angehören, der „Mittlebene“ μ .

Dieses **vollständige Oktaeder** besteht aus

<u>12 Ebenen</u>	<u>12+1 Punkten</u>	<u>16+3 Geraden</u>
8 Oktaederflächen	6 Ecken	12 Kanten
α, β, γ	6 Kreuzpunkte	4 Kreuzlinien
Mittlebene μ	$D = \alpha\beta\gamma$	a_+, b_+, c_+



Figur 13.1



Figur 13.2

Das vollständige Oktaeder

Es entsprechen sich polar:

Hexaeder

Das konstituierende Dreieck in der Ebene δ mit den Seiten a , b , c und den Ecken A , B , C .

Die 3 Paare gegenüberliegender Flächen

Oktaeder

Das konstituierende Dreieck durch den Punkt D mit den Seiten a_+ , b_+ , c_+ und den Flächen α , β , γ .

Die 3 Paare gegenüberliegender Punkte

$(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2), (\gamma_1, \gamma_2)$.

Die 4 Paare von Gegenecken (D, E), (L, T), (N, R), (P, S).

Die 3 Vierkante in A, B, C.

Die 6 Diagonalebene (Verbindungsebenen gegenüberliegender Kanten in den obigen Vierkanten): $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \rho_1, \rho_2$.

Die 6 Diagonalebene unter sich geschnitten, ergeben die 4 Hexaederdiagonalen (Kreuzlinien) durch den Mittelpunkt M.

Diesen Aufbau nennen wir das vollständige Hexaeder.

$(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2)$.

Die 4 Paare von Gegenflächen $(\delta, \epsilon), (\lambda, \tau), (\nu, \rho), (\pi, \sigma)$.

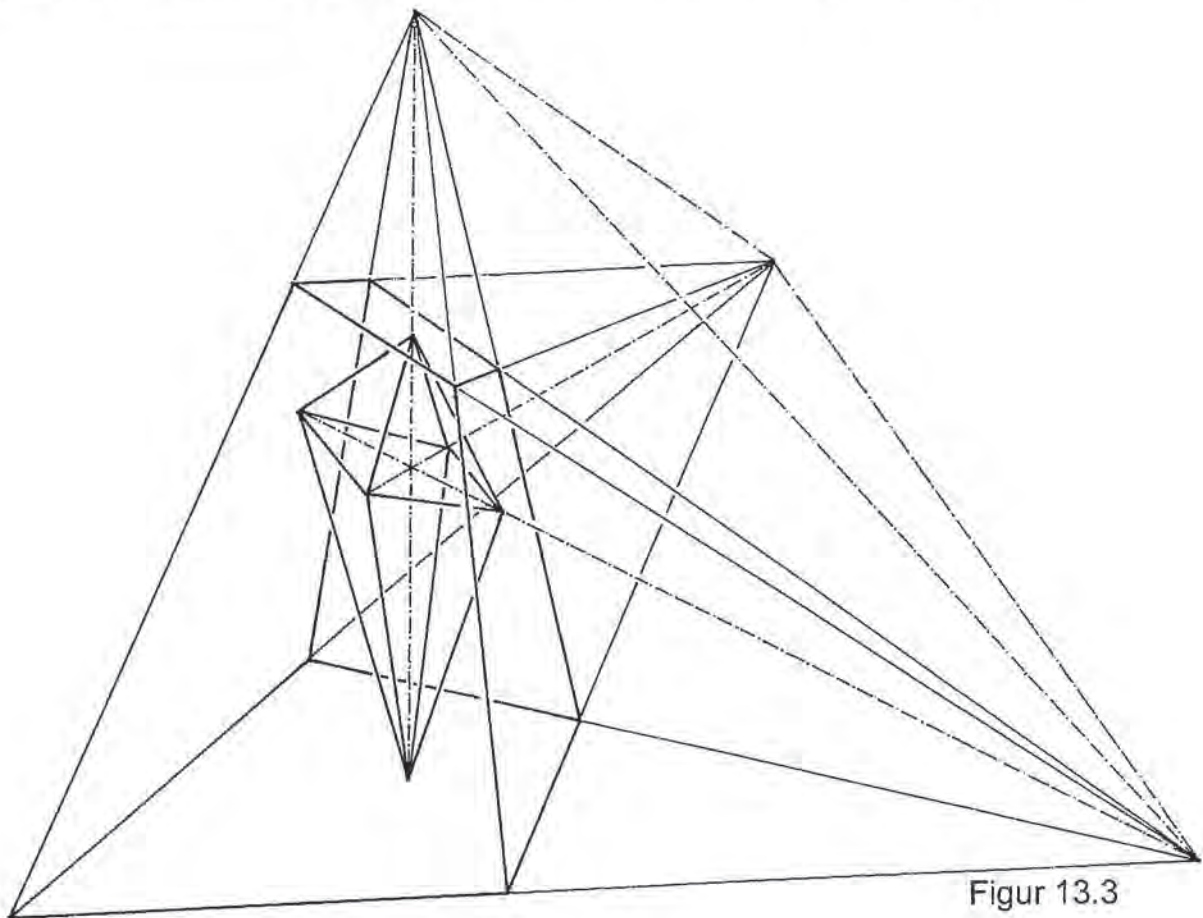
Die 3 Vierseite in α, β, γ .

Die 6 „Diagonalpunkte“ (Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten in den obigen Vierseiten): $S_1, S_2, T_1, T_2, R_1, R_2$.

Die 6 Diagonalecken unter sich verbunden, ergeben die 4 „Oktaederdiagonalen“ (Kreuzlinien) in der Mittelebene μ .

Diesen Aufbau nennen wir das vollständige Oktaeder.

Diese zwei polaren Gebilde können auch vereinigt werden: Wählt man die 6 Mittelpunkte der Hexaederflächen als die 6 Ecken eines Oktaeders, so ergänzen sich das „konstituierende Dreieck“ des Hexaeders (a, b, c) und das „konstituierende Dreieck“ des Oktaeders (a_+, b_+, c_+) zu einem Tetraeder. Es fallen zusammen: M und D und auch μ und δ (Fig. 13.3).



14. Die Fundamentalstruktur

Lassen wir vom vollständigen Hexaeder die Ebene δ , ebenso die Geraden a , b , c . (konstituierendes Dreiseit) außer Betracht, behalten aber die Punkte A , B , C , so bleibt ein Gebilde, das aus 12 Punkten, 12 Ebenen und 16 Geraden besteht, aus

- den 8 Ecken, den Punkten A , B , C und dem „Mittelpunkt“ M ,
- den 6 Flächen und den 6 Kreuzebenen,
- den 12 Kanten und den 4 Kreuzlinien (Fig. 14.1).

Lassen wir vom vollständigen Oktaeder den Punkt D , ebenso die Geraden a_+ , b_+ , c_+ (konstituierendes Dreikant) außer Betracht, behalten aber die Ebenen α , β , γ , so bleibt ein Gebilde, das aus 12 Ebenen, 12 Punkten und 16 Geraden besteht, aus

- den 8 Flächen, den Ebenen α , β , γ und der „Mittlebene“ μ ,
- den 6 Ecken und den 6 Kreuzpunkten,
- den 12 Kanten und den 4 Kreuzlinien (Fig. 14.2).

Diese beiden Gebilde erweisen sich als genau gleich konfiguriert.

Durch jeden der 12 Punkte gehen 4 Geraden und 6 Ebenen des Gebildes, in jeder der 12 Ebenen liegen 4 Geraden und 6 Punkte des Gebildes, jede der 16 Geraden enthält 3 Punkte und 3 Ebenen des Gebildes.

Dieses Gebilde ist zu sich selbst polar!

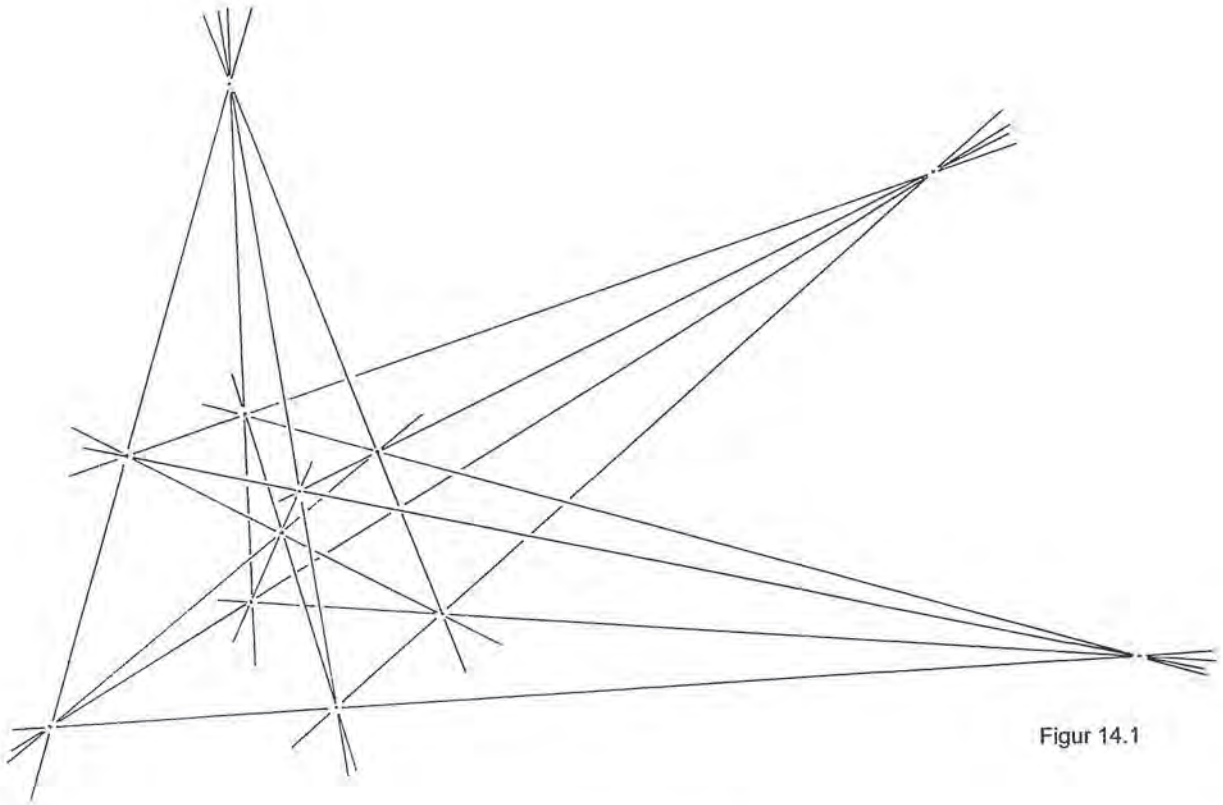
Dass die Figuren 14.1 und 14.2 dasselbe darstellen, zeigen die Figuren 14.3 und 14.4. Figur 14.4 ist durch Drehen der Figur 14.2 um 90° im Uhrzeigersinn entstanden. Umgekehrt kann man in Figur 14.3 ein Oktaeder mit den Gegenecken M und C erkennen.

Man nennt dieses Gebilde nach seinem Entdecker REYE'sche Konfiguration oder auch Fundamentalstruktur des Raumes.

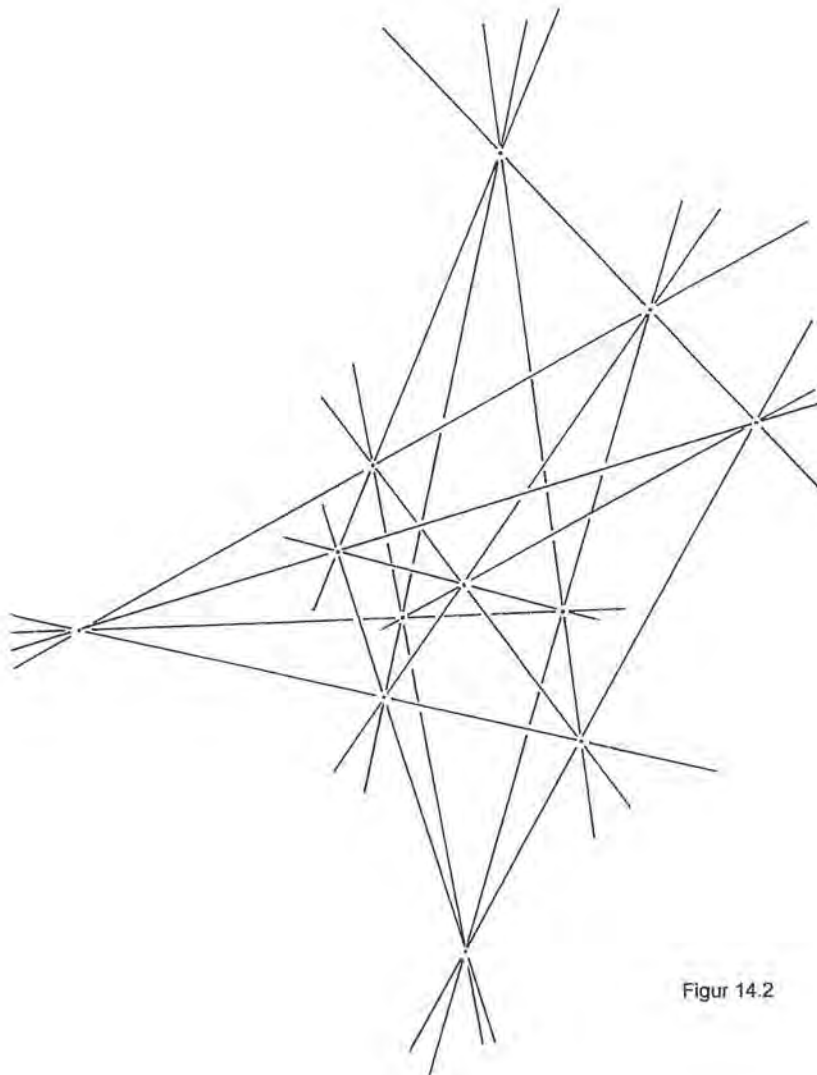
- Die Fundamentalstruktur ist das in sich polare, dem vollständigen Hexaeder und dem vollständigen Oktaeder gemeinsame Gebilde.

Ähnlich wie bei der Desargues'schen Konfiguration, wo jeder Punkt die Bedeutung von Z haben konnte, so kann bei der Fundamentalstruktur jeder der 12 Punkte als Mittelpunkt M eines Hexaeders, jede der 12 Ebenen als Mittlebene μ eines Oktaeders betrachtet werden:

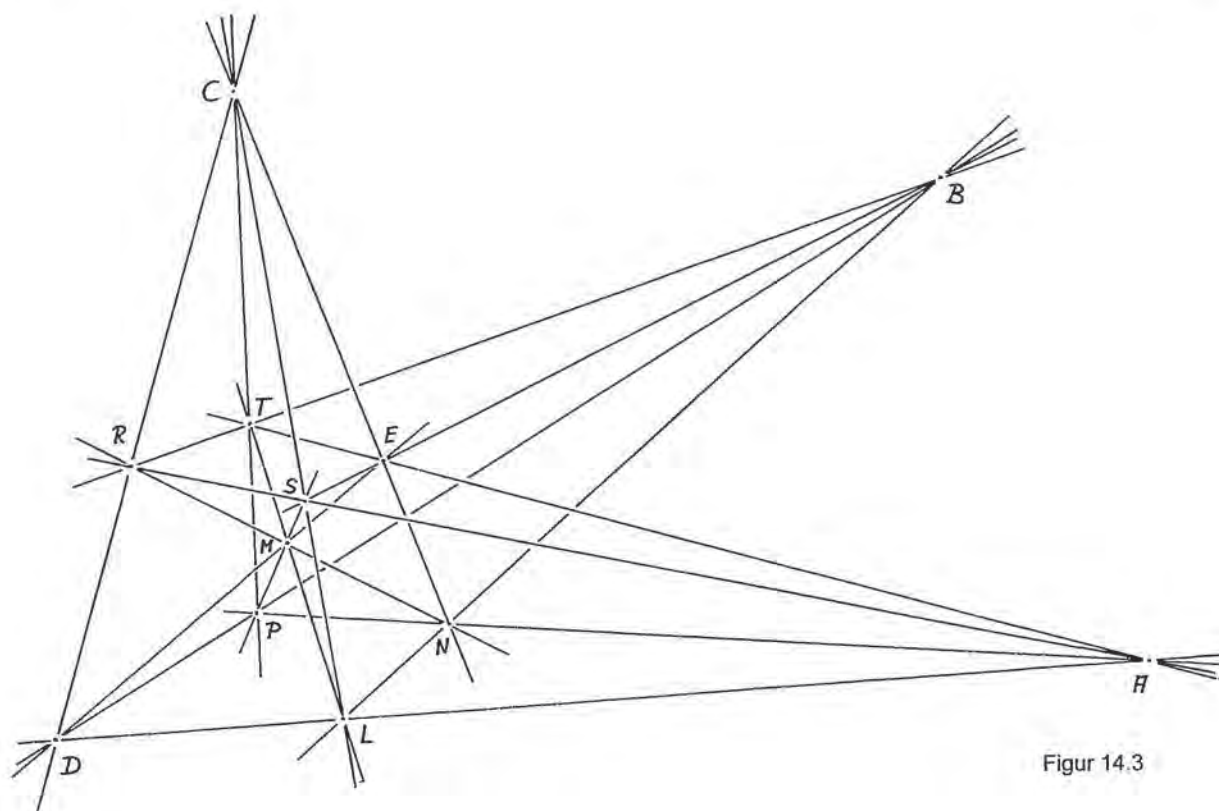
- Die Fundamentalstruktur enthält sowohl 12 Hexaeder als auch 12 Oktaeder.



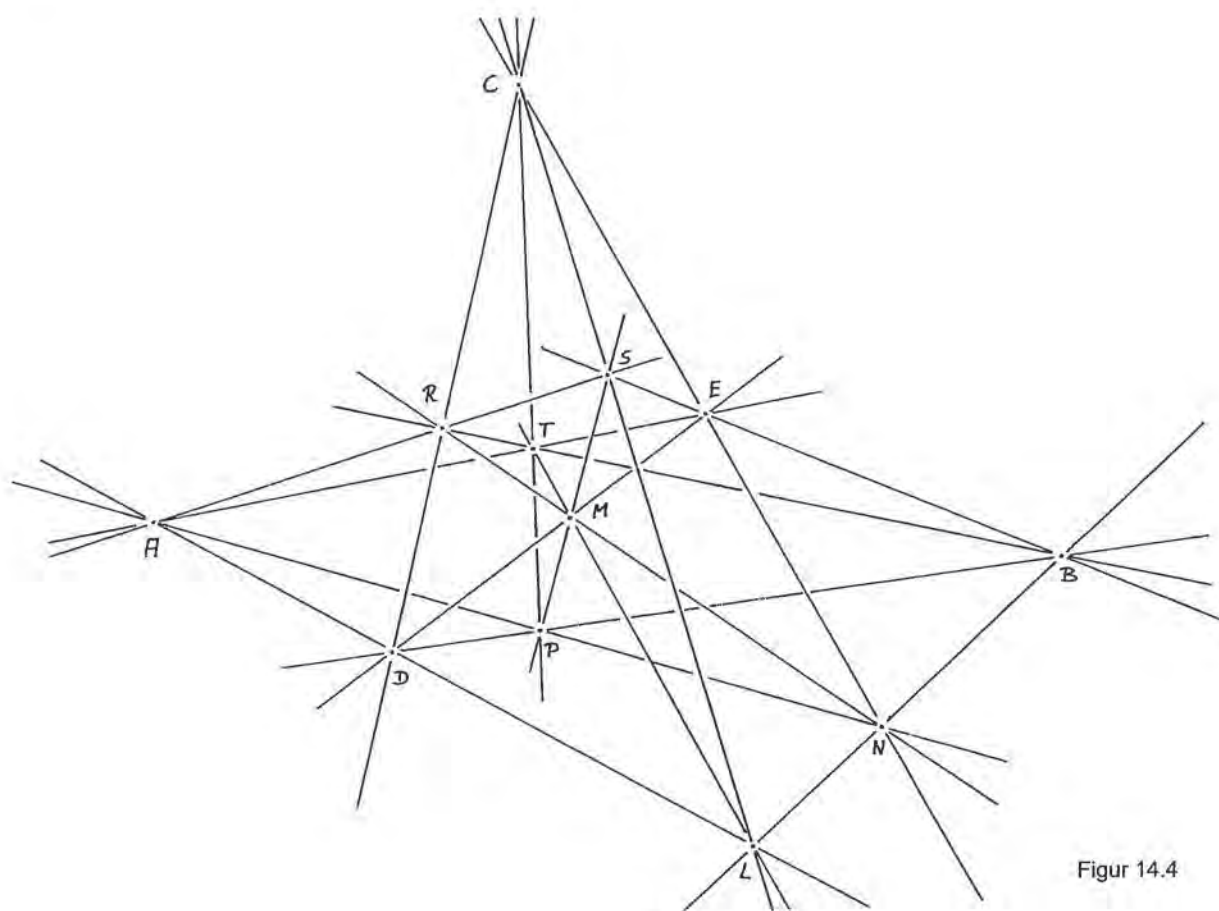
Figur 14.1



Figur 14.2



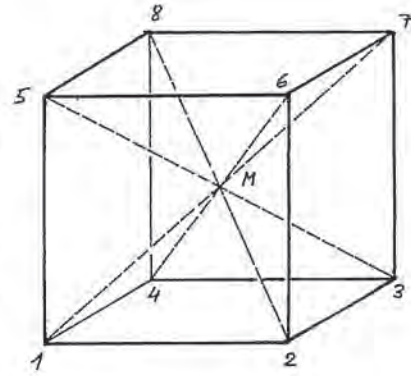
Figur 14.3



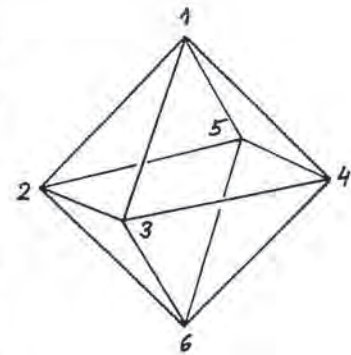
Figur 14.4

Übungen

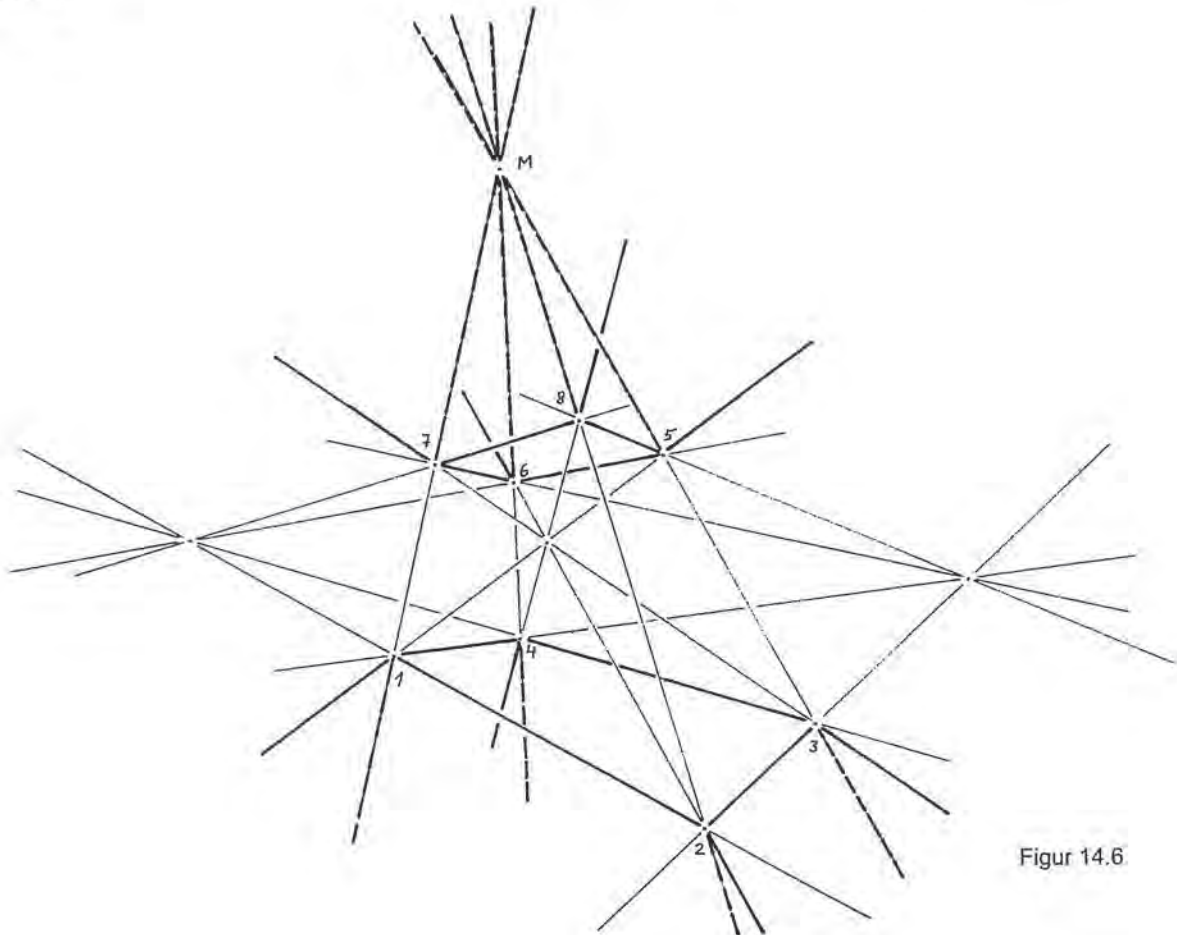
1. Die Figur 14.4 ist Grundlage: der Punkt M des Hexaeders nehme nacheinander alle 12 mögliche Lagen ein. Entsprechend nebenstehender Skizze werden die Hexaederecken mit 1-8 bezeichnet. Man zeichne in der Vorlage (nach Fig. 14.4) die jeweiligen Hexaederkanten (blau) und die Kreuzlinien (rot) ein (Figuren 14.5 - 14.16).



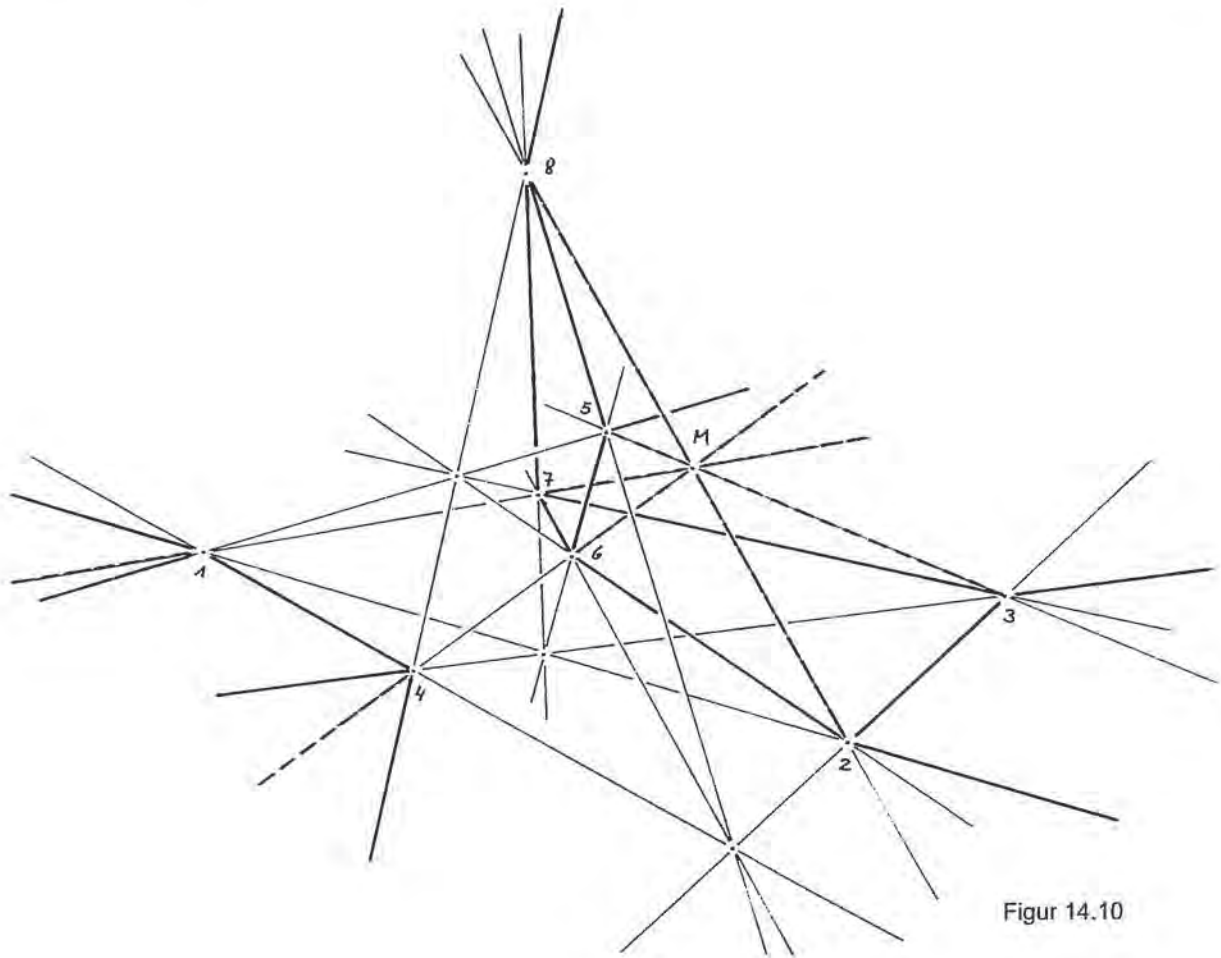
2. Die Figur 14.4 ist Grundlage: auf 12 verschiedene Weise kann ein Oktaeder mit den Ecken 1-6, entsprechend nebenstehender Skizze, mit den zugehörigen Mittelebenen μ eingezeichnet werden. Die Kanten werden blau, die Kreuzlinien rot in der Vorlage eingezeichnet (Figuren 14.17 - 14.28).



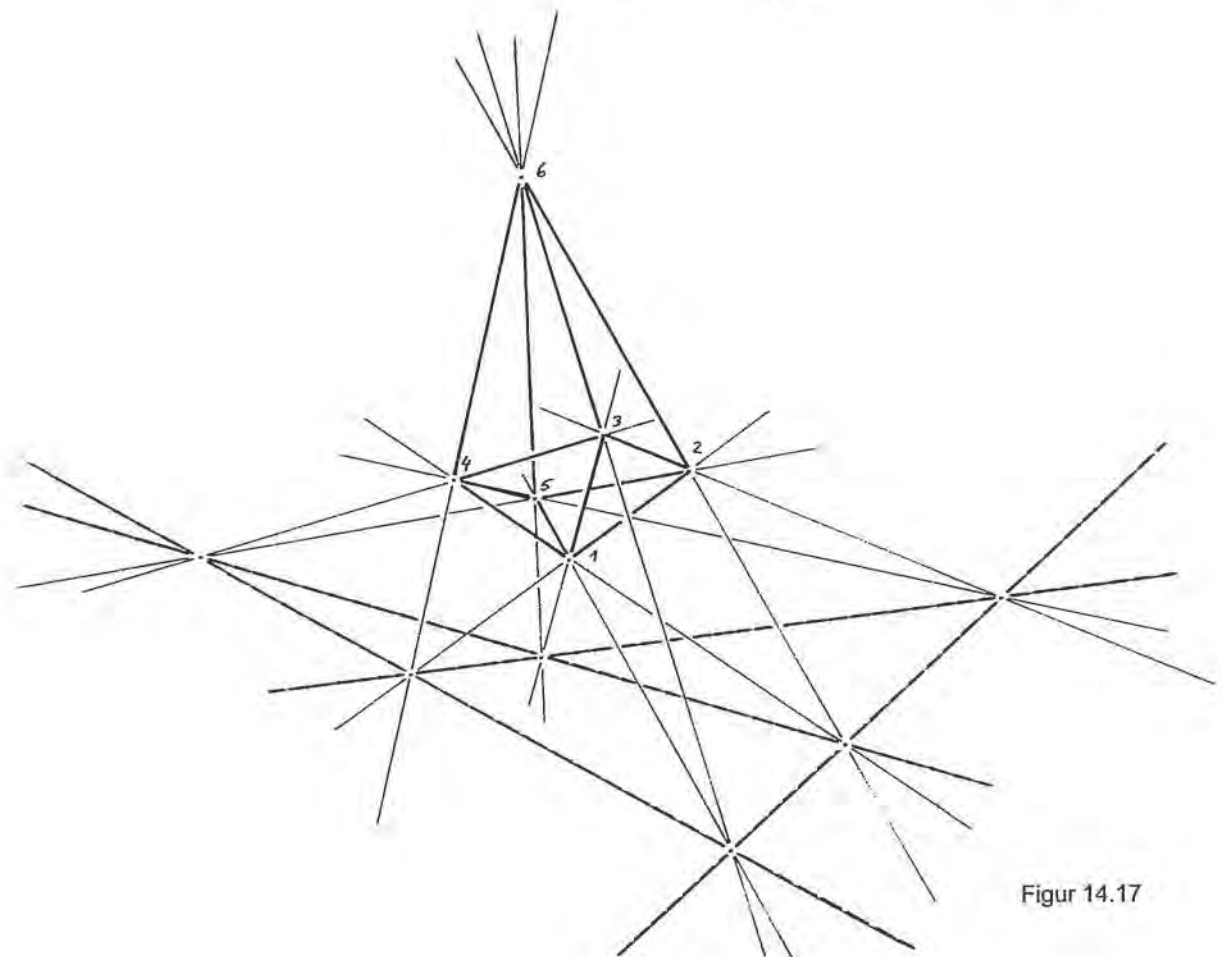
Es werden hier zur Veranschaulichung der Übungen jeweils zwei der 12 Möglichkeiten gezeigt (die blauen Linien sind ausgezogen, die roten Linien gestrichelt gezeichnet). In den Figuren 14.6 und 14.10 (aus obiger Reihe) erstreckt sich das Innere des Hexaeders über die Grenzebene des Raumes und in Figur 14.20 gilt dies für das Innere (im üblichen Sinne) des Oktaeders.



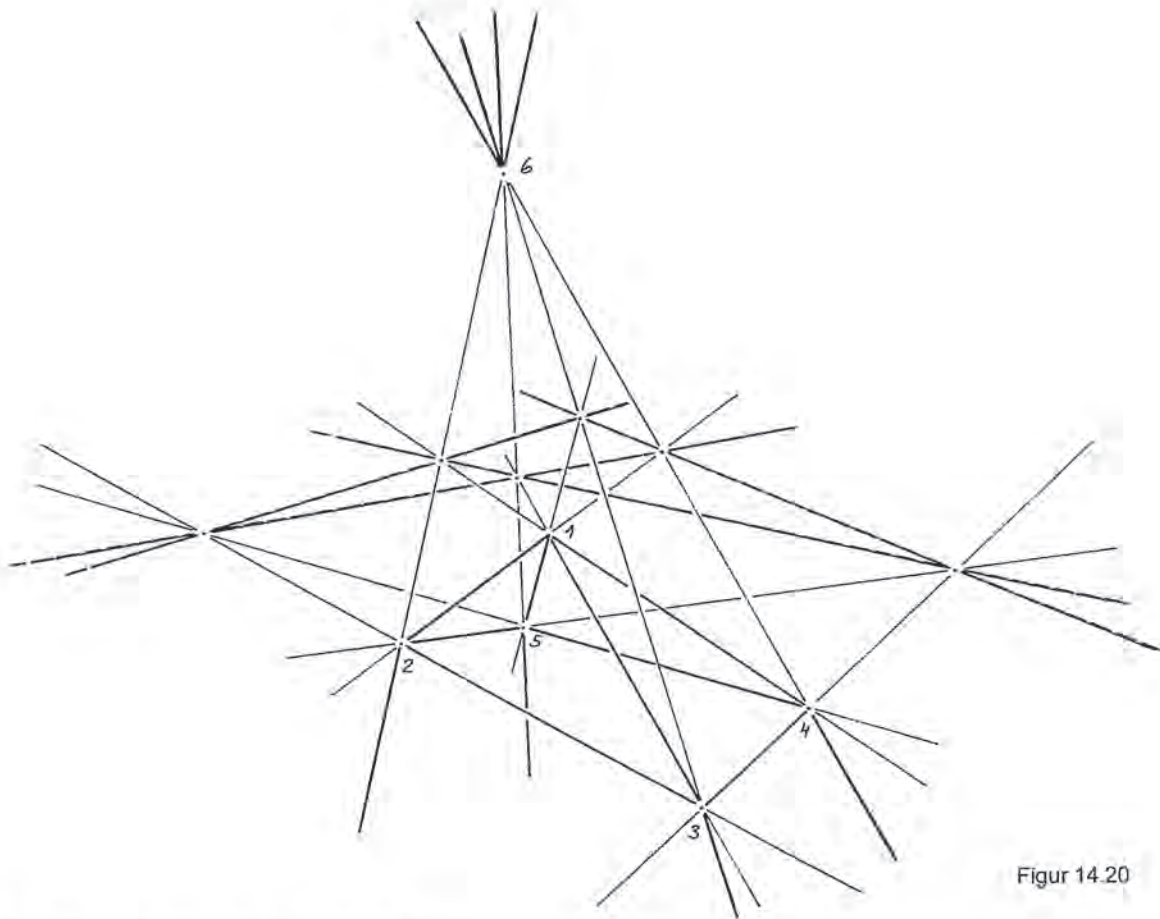
Figur 14.6



Figur 14.10



Figur 14.17



Figur 14.20

15. Kegelschnitte im Fünfeck

Durch irgendwelche fünf Geraden in allgemeiner Lage ist ein Fünfstern bestimmt. Je nach Anordnung dieser fünf Geraden kann man die verschiedenen Kegelschnitte erhalten.

Zuerst wichtige Grundbegriffe:

1. Werden zwei Punktreihen a und b von einem Zentrum Z aus zentral aufeinander projiziert, so sagen wir, die Punktreihen werden **perspektiv** aufeinander abgebildet. Die Abbildung der Punktreihen aufeinander wird Perspektivität genannt. Den Punkten $A_1, A_2, A_3, \dots$ von a entsprechen perspektiv die Punkte $B_1, B_2, B_3, \dots$ von b (Fig. 15.1).

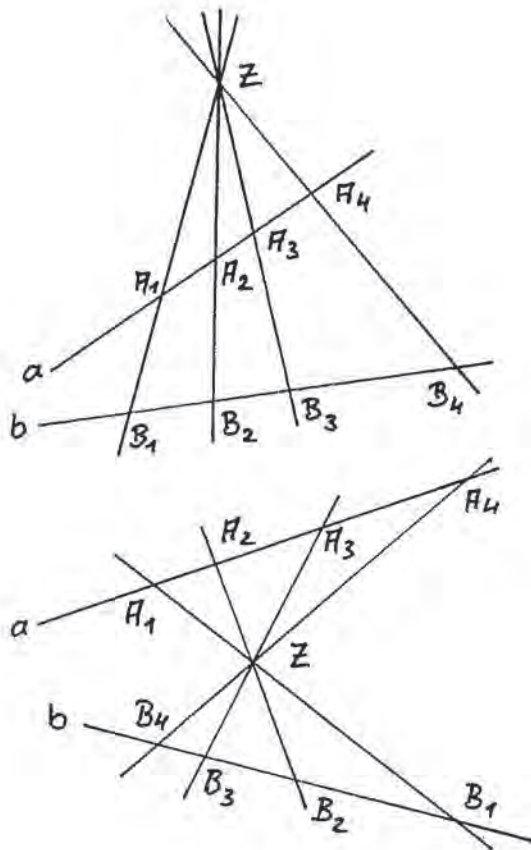
2. Wird eine Punktreihe a perspektiv auf die Punktreihe b und diese perspektiv auf die Punktreihe c abgebildet, so sagen wir, die Punktreihen a und c seien **projektiv** aufeinander abgebildet. Die Abbildung von a auf c wird Projektivität genannt. Die Punkte $A_1,$

Werden zwei Geradenbüschel A und B von einer Achse z aus linear aufeinander projiziert, so sagen wir, die Geradenbüschel werden **perspektiv** aufeinander abgebildet. Die Abbildung der Geradenbüschel aufeinander wird Perspektivität genannt. Den Geraden $a_1, a_2, a_3, \dots$ von A entsprechen perspektiv die Geraden $b_1, b_2, b_3, \dots$ von B (Fig. 15.2).

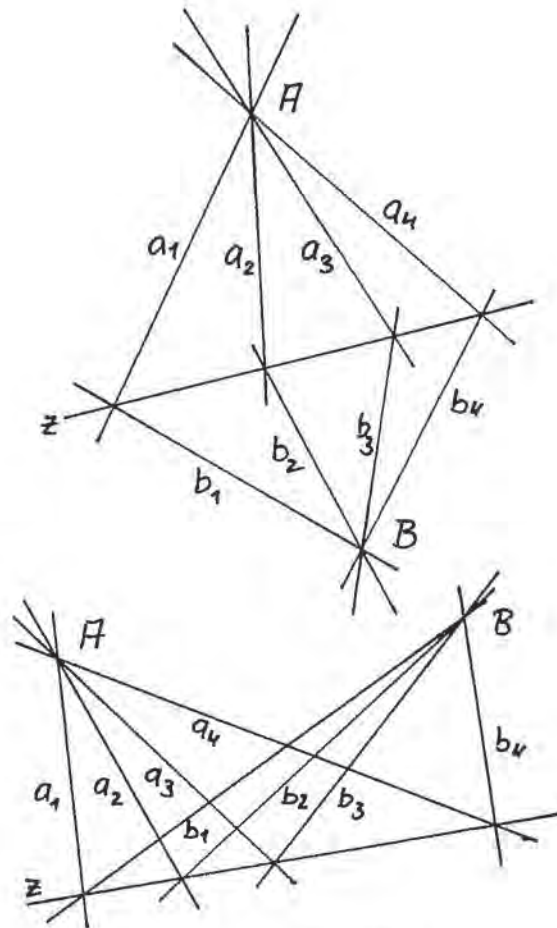
Wird ein Geradenbüschel A perspektiv auf das Geradenbüschel B und dieses perspektiv auf das Geradenbüschel C abgebildet, so sagen wir, die Geradenbüschel A und C seien **projektiv** aufeinander abgebildet. Die Abbildung von A auf C wird Pro-

$A_2, A_3, \dots$ von a und die Punkte $C_1, C_2, C_3, \dots$ von c entsprechen sich projektiv (Fig. 15.3).

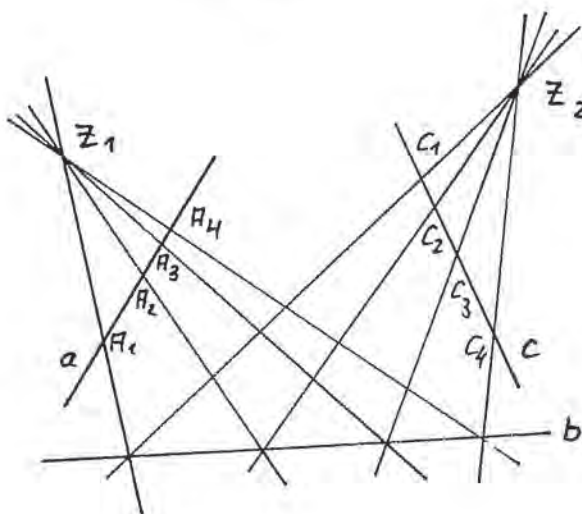
ektivität genannt. Die Geraden $a_1, a_2, a_3, \dots$ von A und die Geraden $c_1, c_2, c_3, \dots$ von C entsprechen sich projektiv (Fig. 15.4).



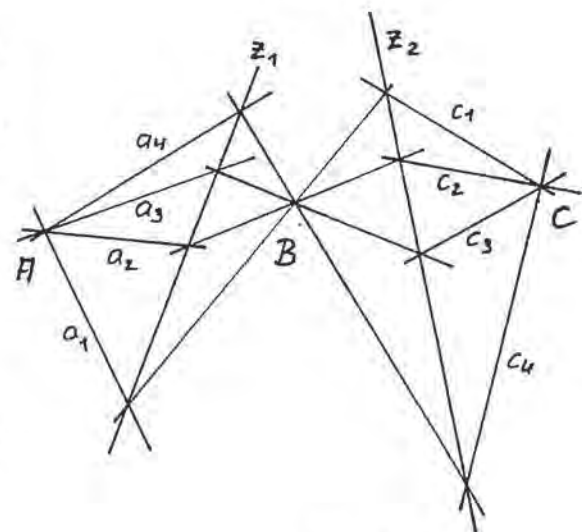
Figur 15.1



Figur 15.2



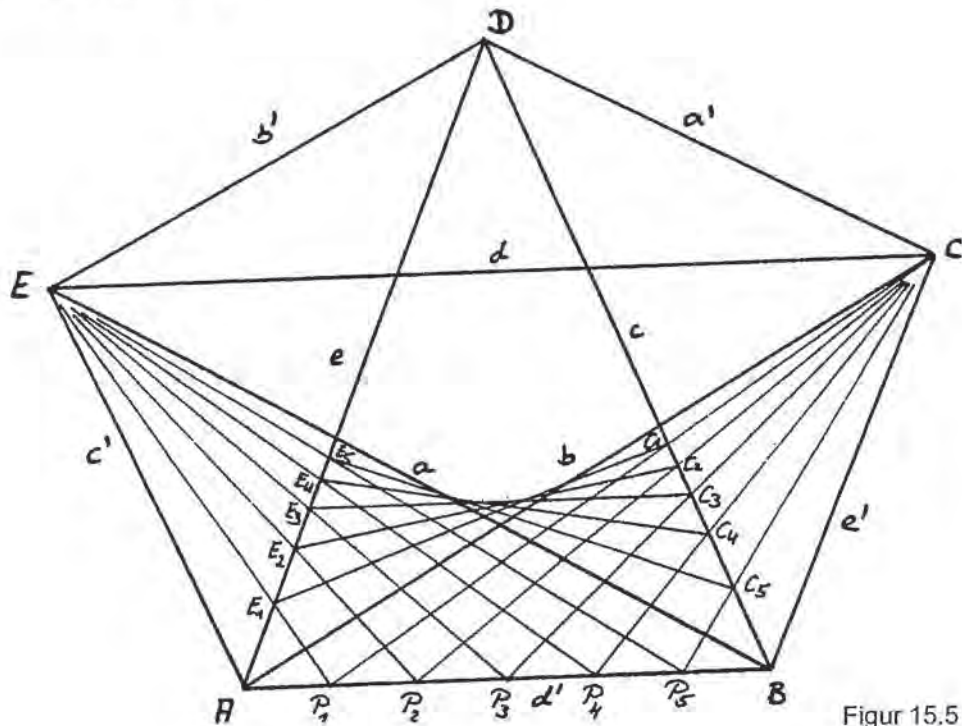
Figur 15.3



Figur 15.4

Konstruktion der Ellipse:

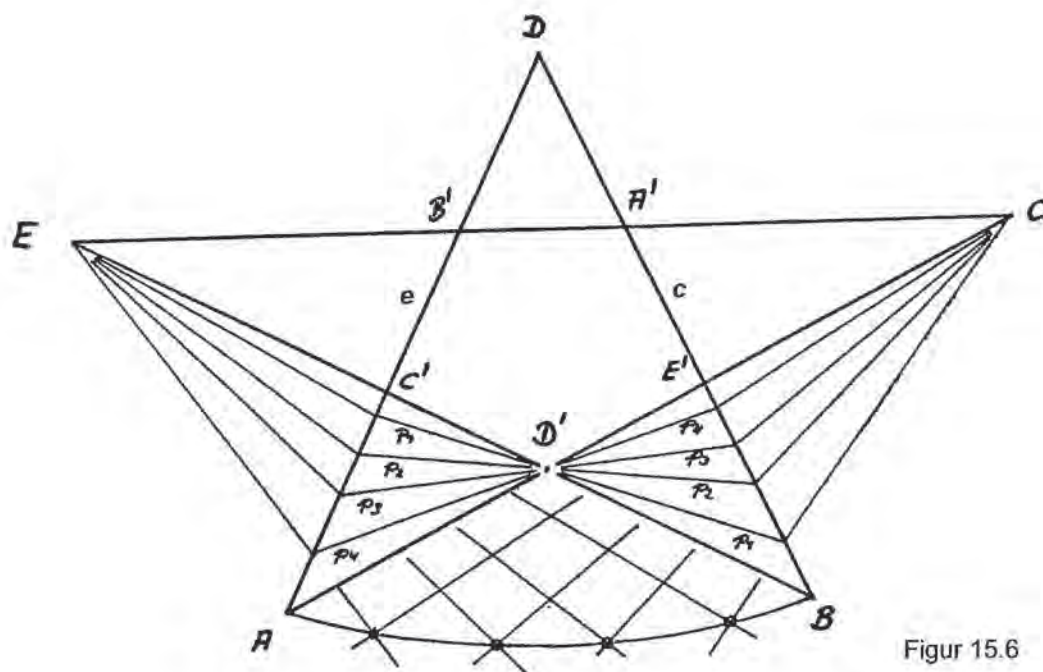
Ausgehend vom Fünfstern: Man verbinde die Sternpunkte außen herum: der Stern ist von dem Fünfeit a', b', c', d', e' umgeben. In d' wähle man beliebige Punkte $P_1, P_2, P_3, \dots$; durch Verbinden mit E und C entstehen in e und c zwei projektiv aufeinander bezogene Punktreihen. Projektiv sich entsprechende Punkte ($E_1, E_2, E_3, \dots$ und $C_1, C_2, C_3, \dots$) werden verbunden. Diese Verbindungsgeraden bilden eine Hüllkurve. Von den vier übrigen Seiten a', b', c', e' verfährt man entsprechend wie bei d' . Somit erhält man insgesamt eine Ellipse als Inkurve des Fünfsterns (Figur 15.7).



Figur 15.5

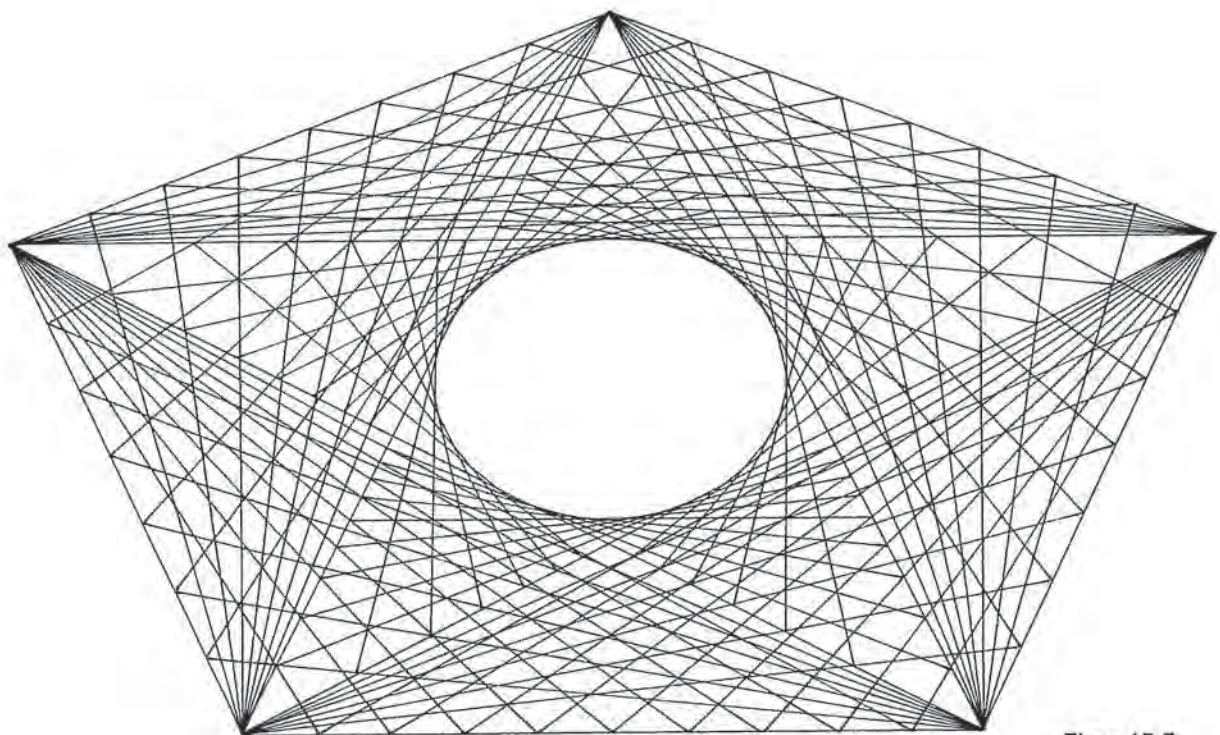
Nun führen wir diese Konstruktion dual durch (Figur 15.6):

Ausgehend vom Fünfstern: Man schneide die Sterngeraden innen herum: der Stern umschließt das Fünfeck A', B', C', D', E' . Durch D' wähle man beliebige Geraden $p_1, p_2, p_3, \dots$. Diese schneide man mit e und c . Dadurch entstehen in E und C zwei projektiv aufeinander bezogene Geradenbüschel. Projektiv sich entsprechende Geraden werden geschnitten. Diese Schnittpunkte bilden einen Kurvenbogen. Von den übrigen vier Punkten A', B', C', E' verfährt man entsprechend wie bei D' . Somit erhält man eine Ellipse als Umkurve des Fünfsterns (Figur 15.8).

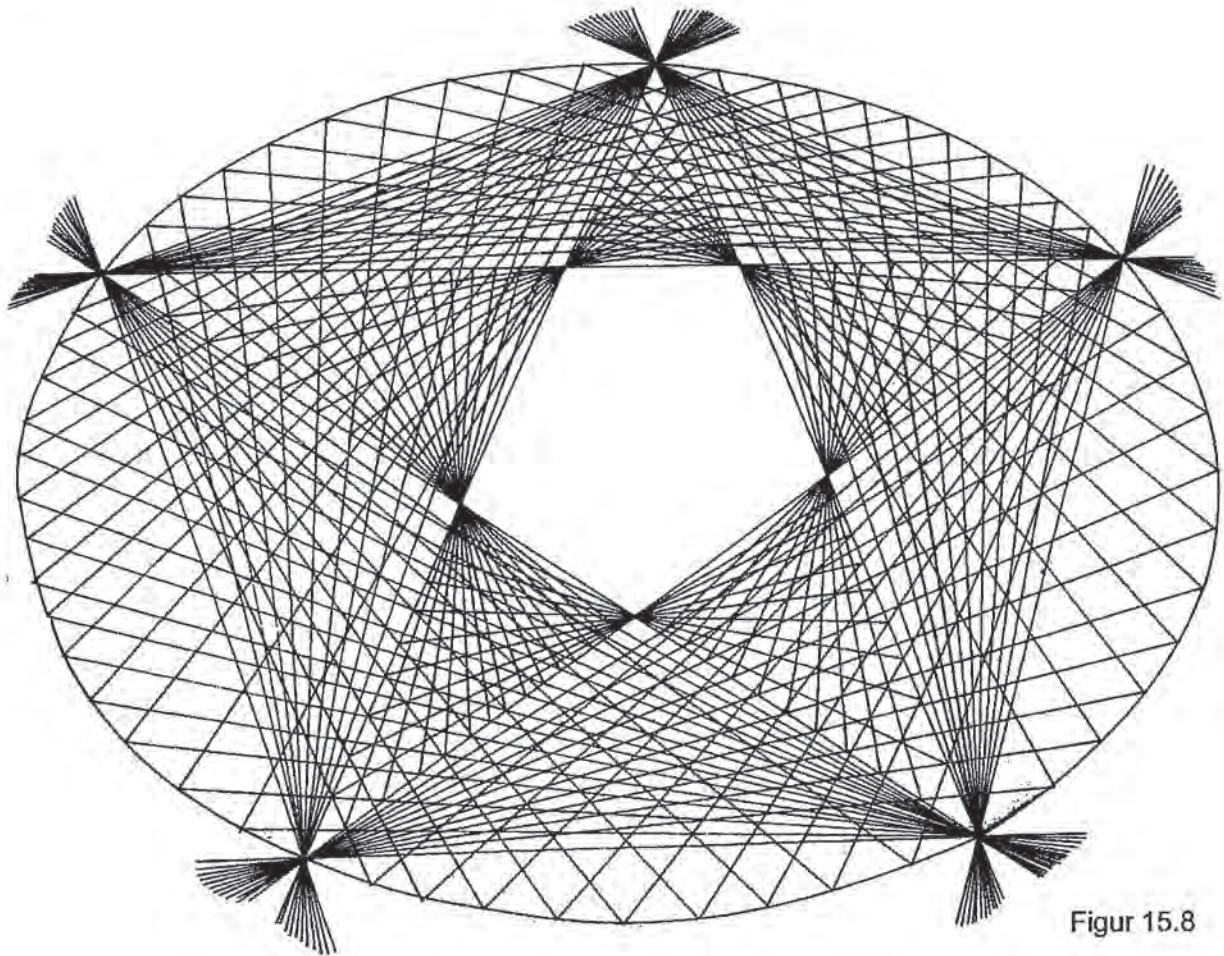


Figur 15.6

Es sind also mit jedem Fünfstern zwei Kurven verbunden, die eine wird geradenweise, die andere punktweise konstruiert.



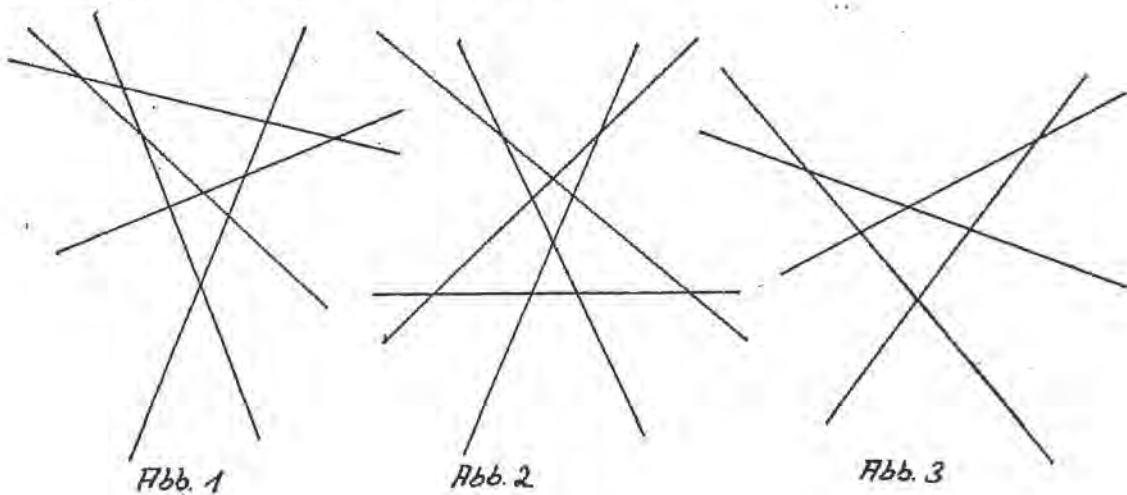
Figur 15.7



Figur 15.8

Bei Lage der fünf Geraden, wie in den folgenden Abbildungen 1 bis 3, erhält man mit den beschriebenen Konstruktionen:

	als Inkurve	als Umkurve
zu Abbildung 1	Ellipse	Hyperbel
zu Abbildung 2:	Hyperbel	Hyperbel
zu Abbildung 3:	Parabel	Hyperbel



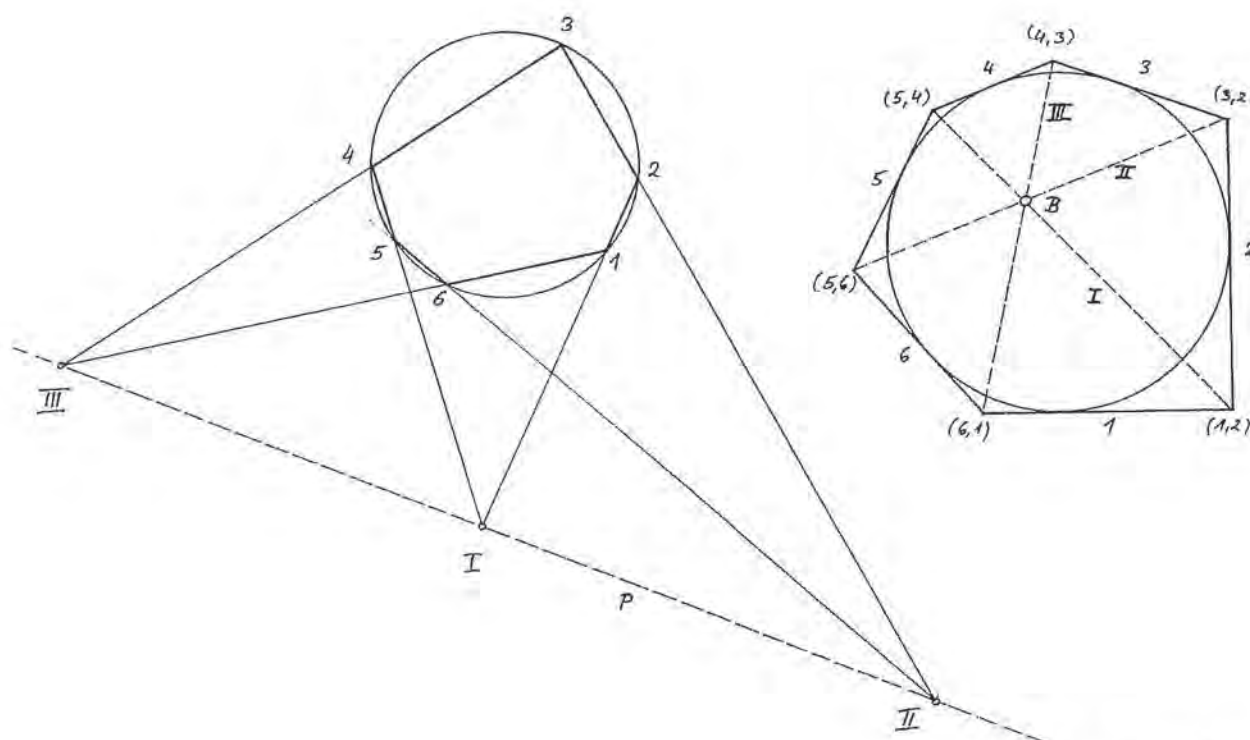
Bemerkenswert ist, dass bei diesen Konstruktionen nirgends ein Kreis zu Hilfe genommen wird, sondern dass lediglich Geraden miteinander geschnitten und Punkte miteinander verbunden werden. Die Kurven sind Resultat eines Gewebes zwischen Geraden und Punkten.

Im Alter von 16 Jahren fand Blaise Pascal (1623 – 1662), der berühmte Schüler von Desargues, den folgenden Lehrsatz:

„Gehören die Punkte eines Sechsecks einem Kegelschnitt an (der Kegelschnitt umschreibt das Sechseck), so liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden“ (Pascal-Gerade).

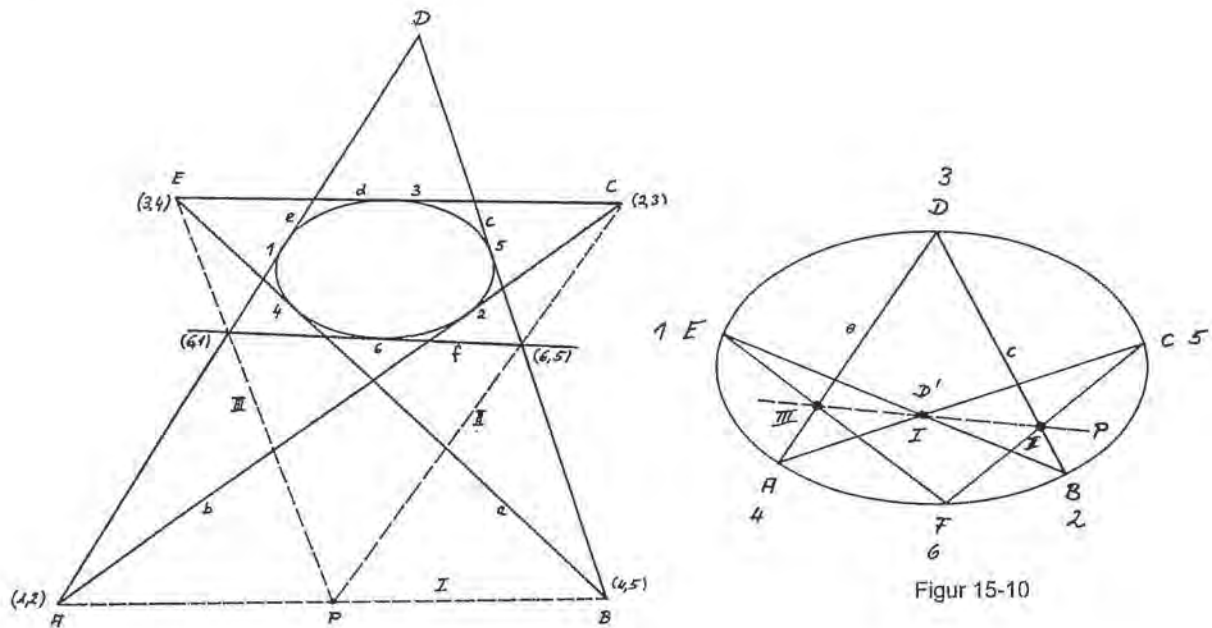
Erst 1806 wurde das duale Gegenstück vom 21-jährigen Charles Brianchon (1785 – 1864) entdeckt:

„Gehören die Seiten eines Sechsecks einem Kegelschnitt an (das Sechseck umgibt den Kegelschnitt), so gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt“ (Brianchon-Punkt)



Figur 15.9

Mit Hilfe der Sätze von Pascal und Brianchon können wir unsere Fünfsterkonstruktionen der Kegelschnitte neu betrachten:



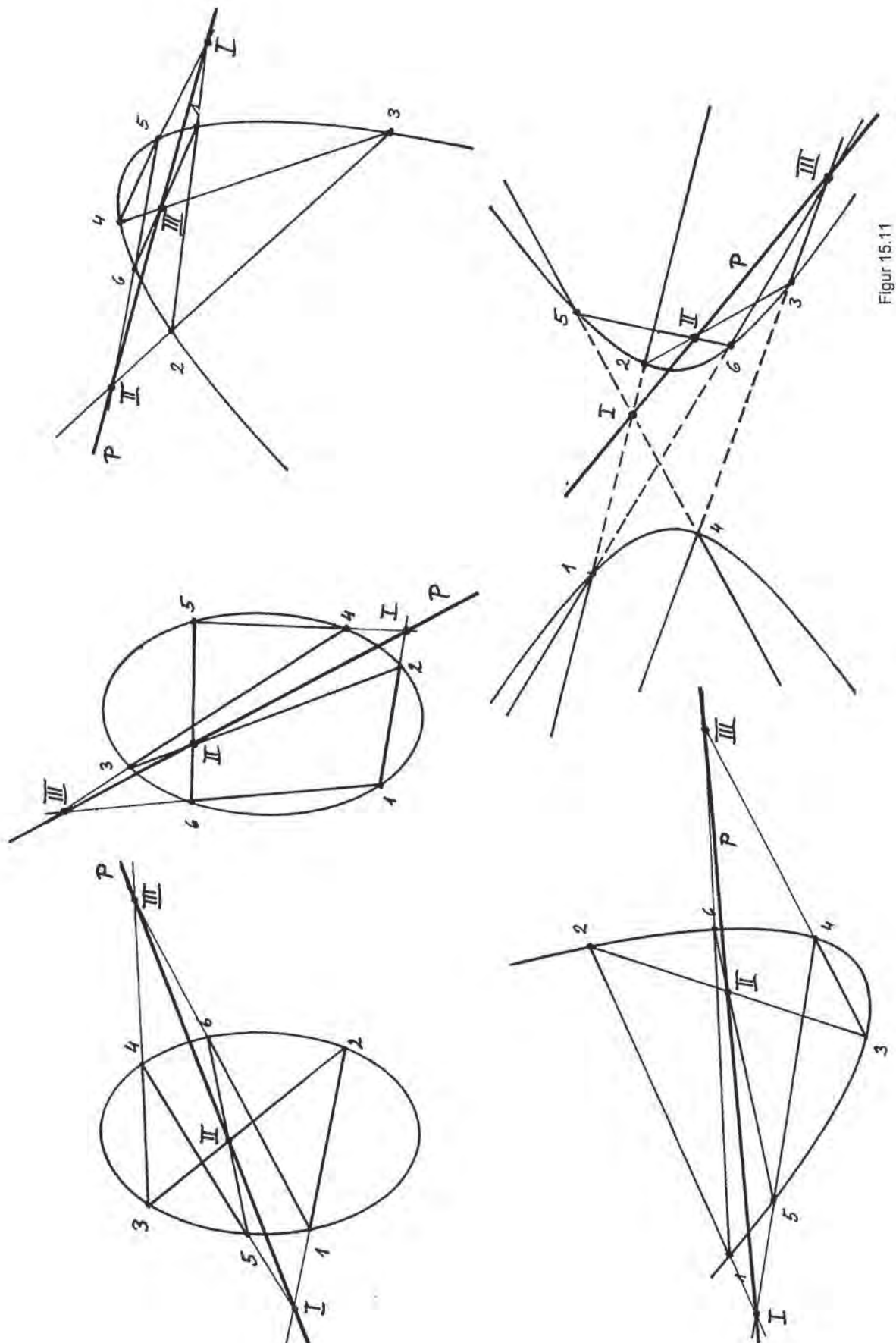
In der linken Zeichnung ist der untere Punkt P der Brianchon-Punkt. Lässt man ihn in der Geraden I wandern, so durchläuft II das Geradenbüschel in C und III das Geradenbüschel in E; die Punktreihen e und c werden projektiv aufeinander abgebildet und f wandert der Ellipse nach.

In der rechten Zeichnung ist p die Pascal-Gerade. Dreht sich p um D' , so läuft II in c und III in e. Die Geradenbüschel E und C werden projektiv aufeinander abgebildet und F wandert auf der Ellipse.

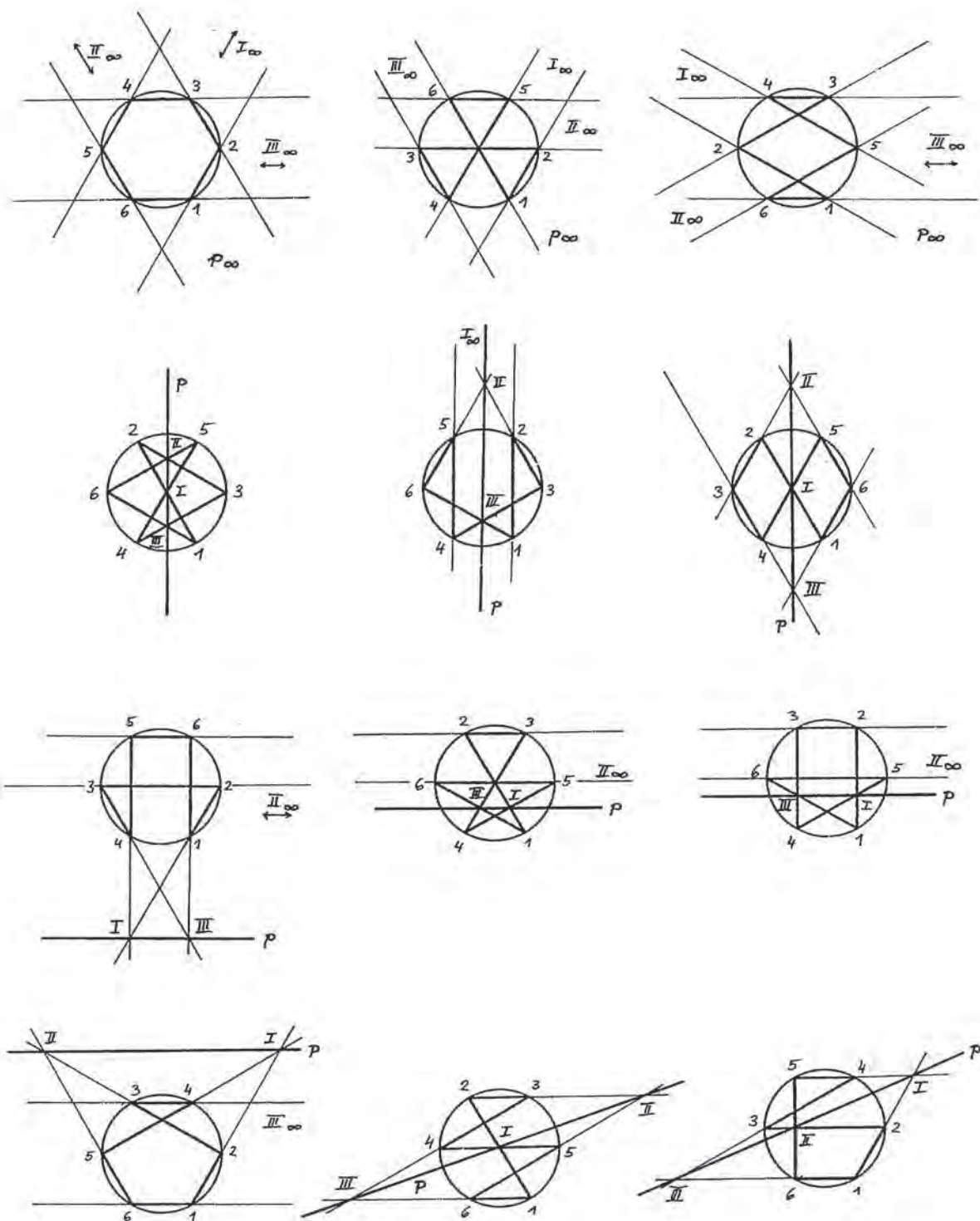
Diese Zusammenhänge erklären die Kegelschnittskurven beim Fünfstern, und sie können Ausgangspunkt für viele interessante Untersuchungen an Kegelschnitten und ganz allgemeinen Kurvenformen sein.

Weitere Übungen hierzu:

Zeichne die Pascalgerade für das vom Kegelschnitt umschriebene Sechseck 1, 2, 3, 4, 5, 6.
(Fig. 15.11, 15.12)

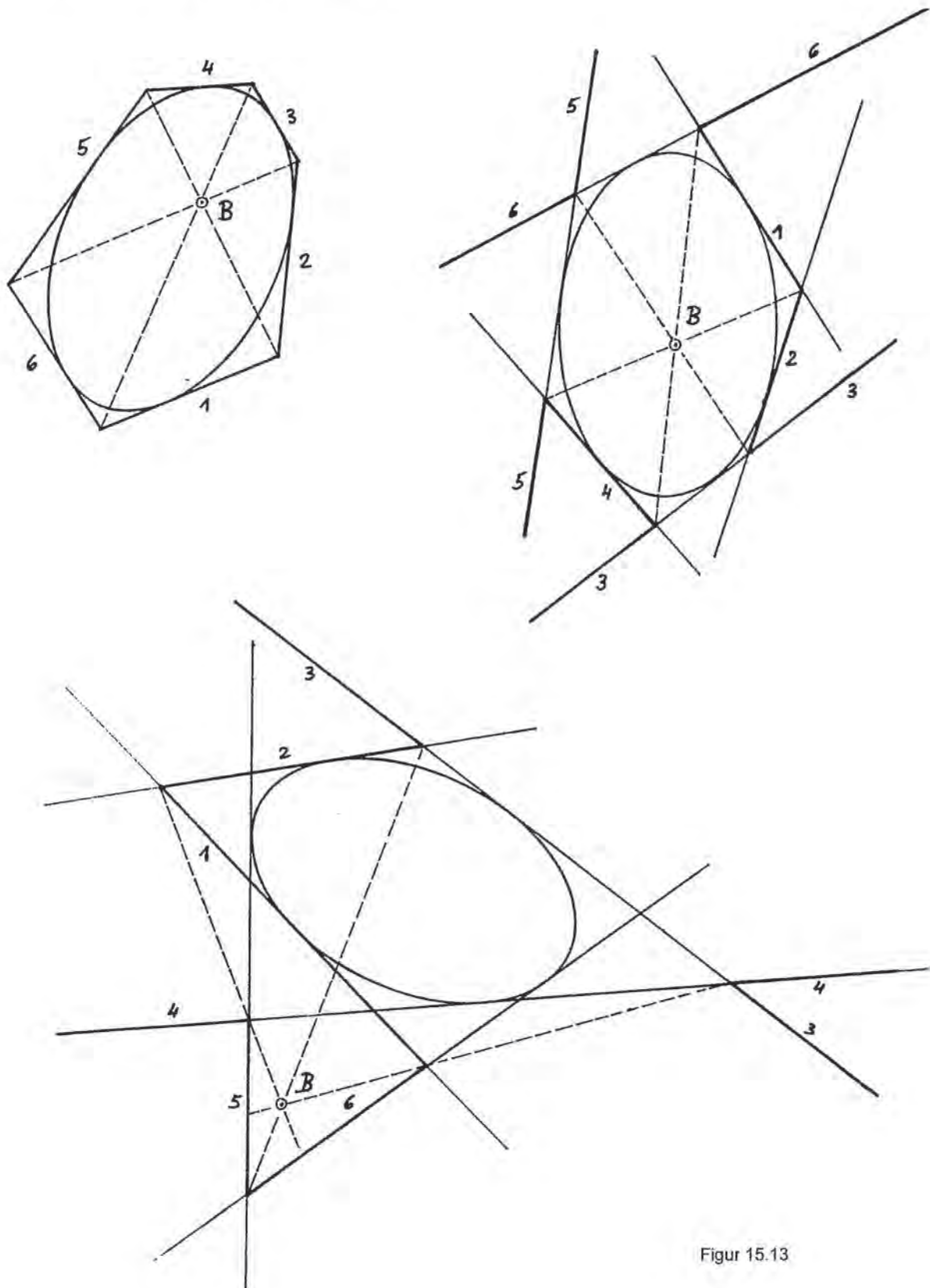


Figur 15.11



Figur 15.12

Zeichne jeweils den Brianchonpunkt ein:



Figur 15.13

16. Kegelschnitte – Zentralprojektionen des Kreises

(Siehe Bernhard, Kapitel 23)

Führen wir die Zentralprojektionen von Kreisen (Radius r) aus, so finden wir:

mit $\overline{ZZ'} > 2r$, so ist die Bildkurve eine Ellipse (Figuren 16.1 und 16.2)

mit $\overline{ZZ'} = 2r$, so ist die Bildkurve eine Parabel (Fig. 16.3)

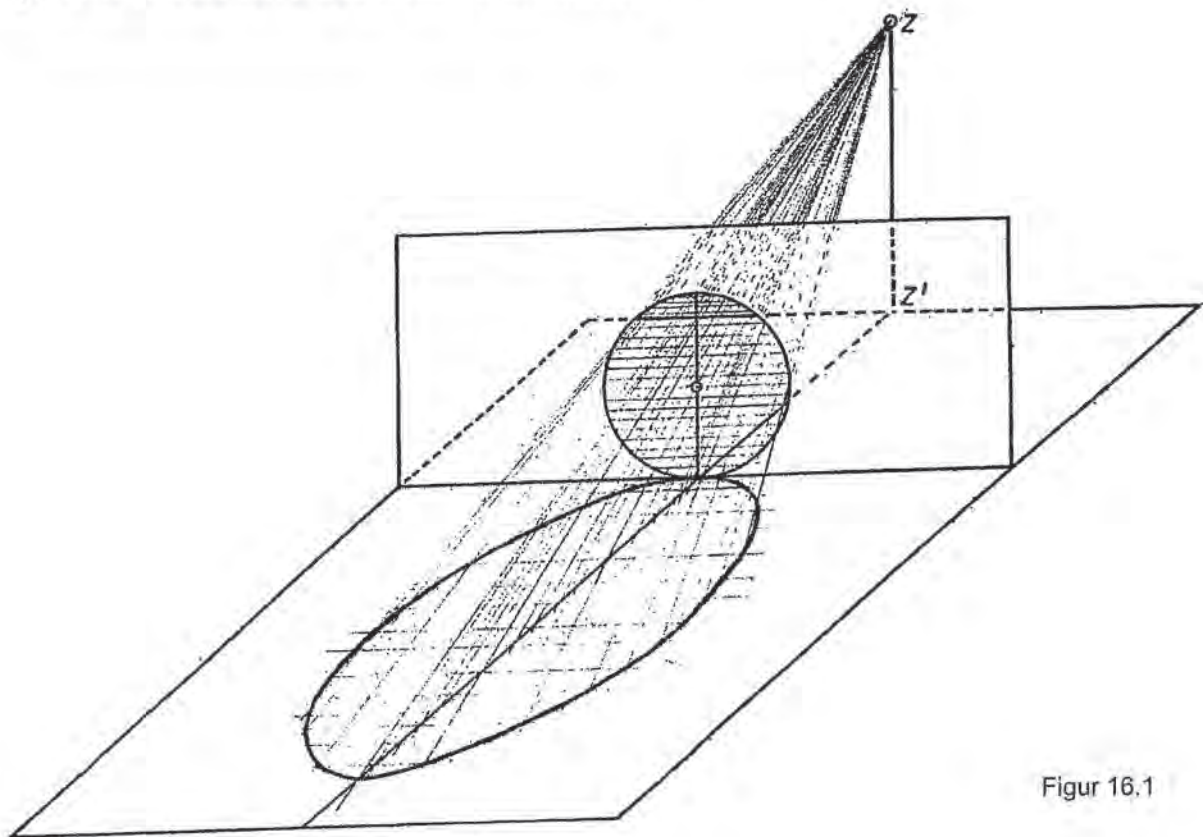
mit $\overline{ZZ'} < 2r$, so ist die Bildkurve eine Hyperbel (Fig. 16.4)

Die Konstruktion der Bildkurve wird genauer, wenn auch Kreistangenten mit abgebildet werden. Diese Bildgeraden sind dann Tangenten der Bildkurve. In Figur 16.3 wird Punkt 5 Fernpunkt und seine Tangente Ferngerade. In Figur 16.4 ist $\overline{ZZ'} = r$, d.h. der waagerechte Kreisdurchmesser 7 – 3 wird Ferngerade, die Tangenten in 7 und 3 werden zu Asymptoten der Hyperbel, denn ihre Berührungspunkte werden zu Fernpunkten abgebildet.

In der Zusammenschau erkennen wir:

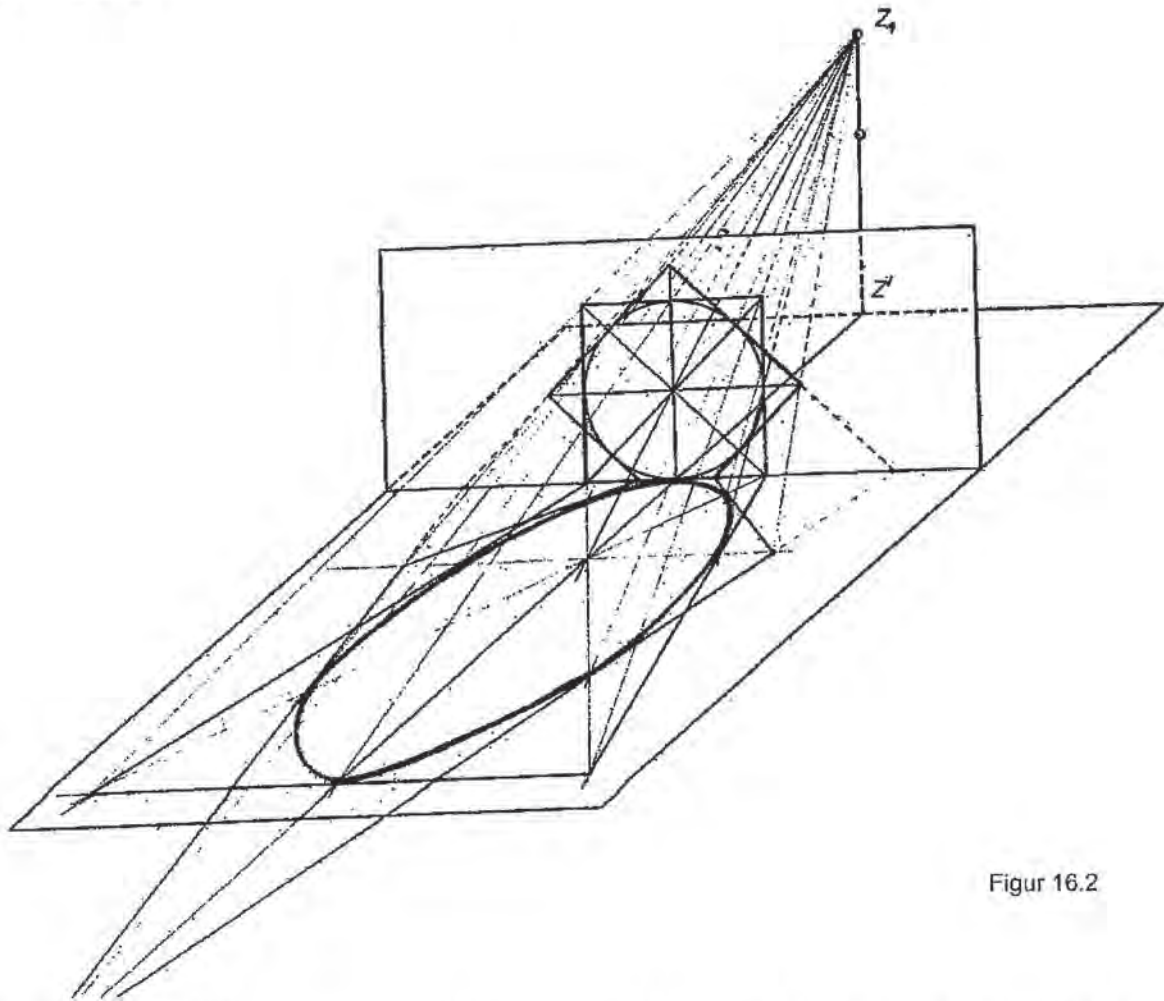
Die Parabel kann aufgefasst werden als Ellipse, welche die unendlichferne Gerade berührt, und die Hyperbel als Ellipse, welche zweimal durch das Unendliche hindurchgeht. Dadurch wird der Zusammenhang der Kurven deutlich.

Projiziere den Kreis von Z aus in die Horizontalebene.



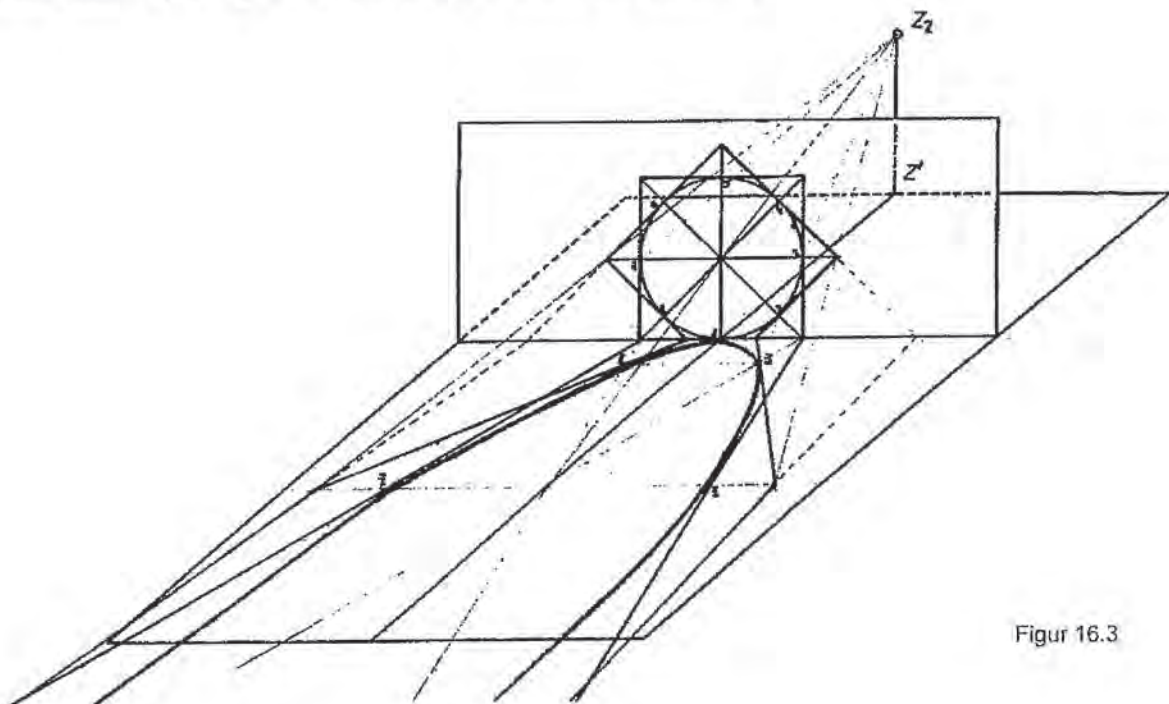
Figur 16.1

Projiziere den Kreis mit Hilfe der beiden umschriebenen Quadrate von Z_1 aus in die Horizontalebene.



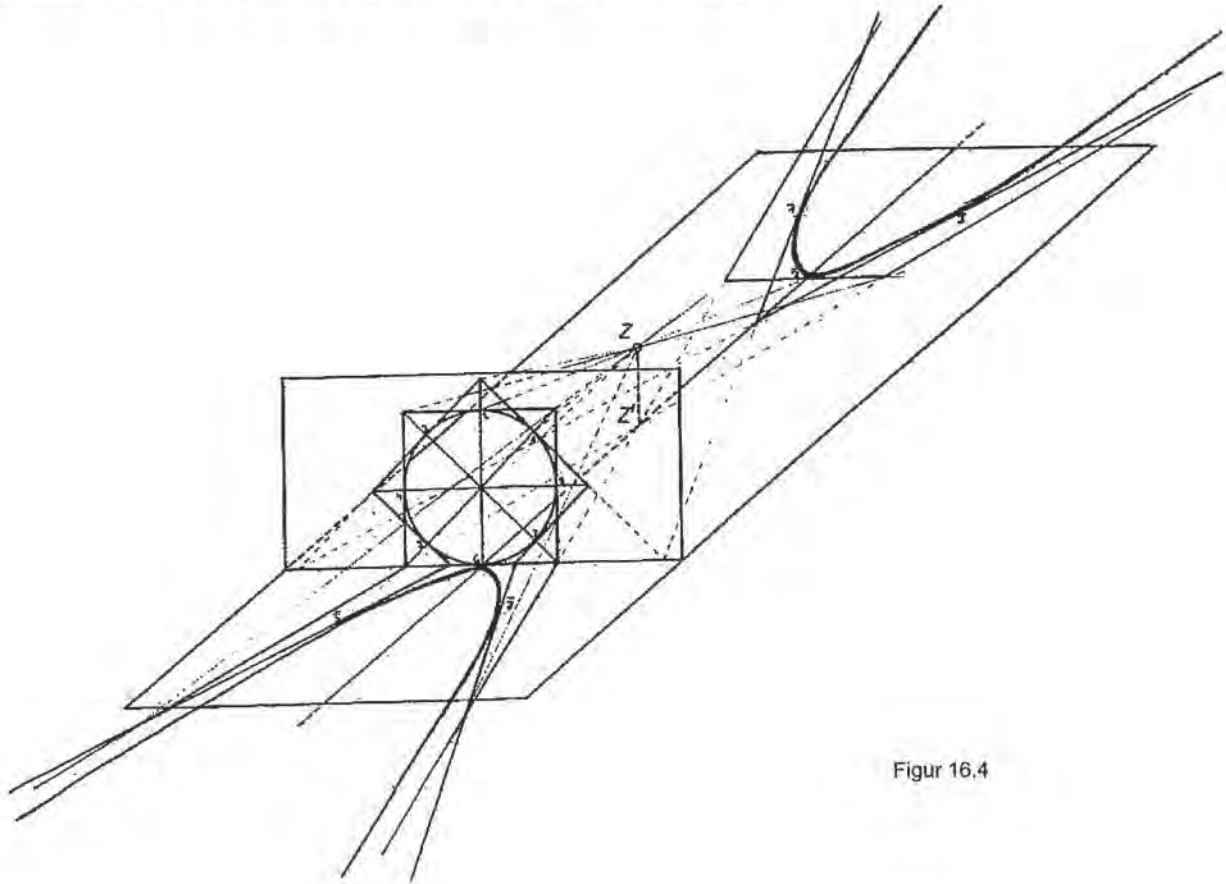
Figur 16.2

Projiziere den Kreis mit Hilfe der beiden umschriebenen Quadrate von Z_2 aus in die Horizontalebene. (Z_2 liegt in der Höhe des Kreisdurchmessers.)



Figur 16.3

Projiziere den Kreis mit Hilfe der beiden umschriebenen Quadrate von Z aus in die Horizontalebene. (Z liegt in der Höhe des Kreisdurchmessers.)



Figur 16.4

Projektive Geometrie – eine Epoche in der 11. Klasse

Markus Hünig

1 . Vorbemerkung

In der projektiven Geometrie stehen nicht Maß und Zahl im Vordergrund; vielmehr untersucht man hier die Lagebeziehungen der geometrischen Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene zueinander. Sie ist entstanden aus dem Bemühen der Künstler, den Raum perspektivisch exakt zu erfassen und wurde von dem französischen Mathematiker Desargues ($\approx 1593 - \approx 1662$) weiterentwickelt. Ihre große Blütezeit erlebte die projektive Geometrie im 19. Jahrhundert; das frühe 20. Jahrhundert ließ sie zunächst als wenig „nützlich“ liegen. In jüngster Zeit wird sie jedoch wiederentdeckt, da sie eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten in der modernen Kommunikationstechnik bietet: Die z. B. im Internet häufig unerlässliche Verschlüsselung der Inhalte wird mit Methoden durchgeführt, deren theoretische Grundlagen die Kryptographie (oder Kryptologie) liefert. Diese Methoden lassen sich in vielfältiger Weise aus denen der Projektiven Geometrie herleiten¹.

Die hier dargestellte Vorgehensweise entspricht einem systematischen Aufbau aus den Elementen heraus. Der Inhalt findet seine Fortsetzung in einer Epoche der 12. Klasse (Polarentheorie, Zentralprojektion, Zentralkollineation) und kann – wo die Prüfungsbestimmungen der Länder das zulassen – bis ins Abitur geführt werden. Hierzu liegen langjährige praktische Erfahrungen vor.

Damit ist *ein* möglicher Weg dargestellt; wie aus anderen Beiträgen dieses Heftes unschwer zu ersehen ist, ist er keinesfalls als *der* Weg anzusehen.

Zu dem entwickelten Stoff sind hier nur relativ wenige Übungen ausgeführt; nach Ansicht des Autors sollten die wenigen in dem Epochenheft genügen, die vielen weiteren ergänzenden Übungen in einem getrennt geführten Übheft ausgeführt werden.

2 . Einführung von uneigentlichen Elementen

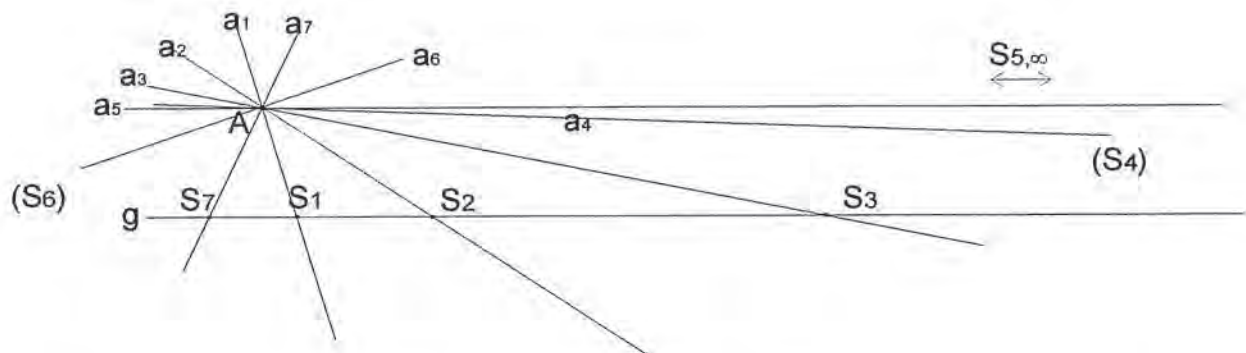
2.1. Fernpunkte

Aus früheren Jahren wissen wir, dass eine **Gerade** (im Gegensatz zur Strecke) unbegrenzt lang ist.

Gegeben sei nun eine Gerade g und ein Punkt A außerhalb von g . Durch A möge eine Gerade a verlaufen, die g in S schneidet. Nun drehen wir a um A und beobachten die Wanderung von S . Bald wird S nicht mehr auf der Zeichnung sichtbar sein, wir können uns nur noch **vorstellen**, dass es diesen Schnittpunkt gibt. Wenn a parallel zu g gedreht worden ist, können wir uns den Schnittpunkt auch nicht mehr vorstellen – man kann ihn nur noch gedanklich fassen (s. u.).

¹ Siehe hierzu: Albrecht Beutelspacher / Uta Rosenbaum: Projektive Geometrie; Vieweg, 1992

Beim Weiterdrehen kommt nun S von der anderen Seite wieder in den vorstellbaren, schließlich in den sichtbaren Bereich.



Wenn a parallel zu g ist, ist offenbar kein Schnittpunkt im gewöhnlichen Sinne mehr vorhanden; vielmehr ist das Gemeinsame der beiden Geraden jetzt ihre *Richtung*, die damit die *Funktion des Punktes* übernommen hat. Aus dem Übergang von S_4 zu S_5 und weiter zu S_6 wird aber deutlich, dass der „uneigentliche Punkt“ S_5 gleichzeitig unendlich weit zu beiden Seiten entfernt liegt; man nennt daher diesen Punkt einen *Fernpunkt*.

Wenn wir also die Gemeinsamkeit zweier verschiedener Geraden in der Ebene generell als „Punkt“ bezeichnen, so können wir die gemeinsame Richtung *uneigentlichen Punkt* oder *Fernpunkt* nennen.

Zwei Geraden haben offenbar genau dann einen gemeinsamen Fernpunkt, wenn sie in ihrer Richtung übereinstimmen; der Fernpunkt gibt also immer eine Richtung an (Ausrichtung in der Ebene oder im Raum, also ohne Durchlaufsinn).

Jede Gerade hat genau einen Fernpunkt. Man muss sich die Gerade als ein über diesen Fernpunkt hinweg in sich geschlossenes Gebilde denken – d. h. es ist hier nicht notwendig, zwischen Geraden und Strahlen („Halbgeraden“) zu unterscheiden.

Wir kennzeichnen Fernpunkte durch einen Doppelpfeil der entsprechenden Richtung; zum Punktnamen fügen wir den Index „ ∞ “ hinzu.

Wir werden sehen, dass Fernpunkte in fast jeder Hinsicht wie gewöhnliche Punkte behandelt werden können.

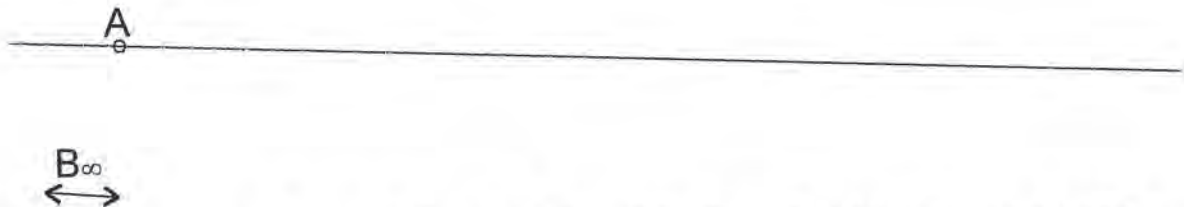
(Anmerkung: An dieser Stelle wird noch nicht genau begrifflich unterschieden zwischen einer Geraden und der Punktreihe, deren Träger die Gerade ist. Diese Begriffsklärungen erfolgen in einem späteren Kapitel.)

Beispiele:

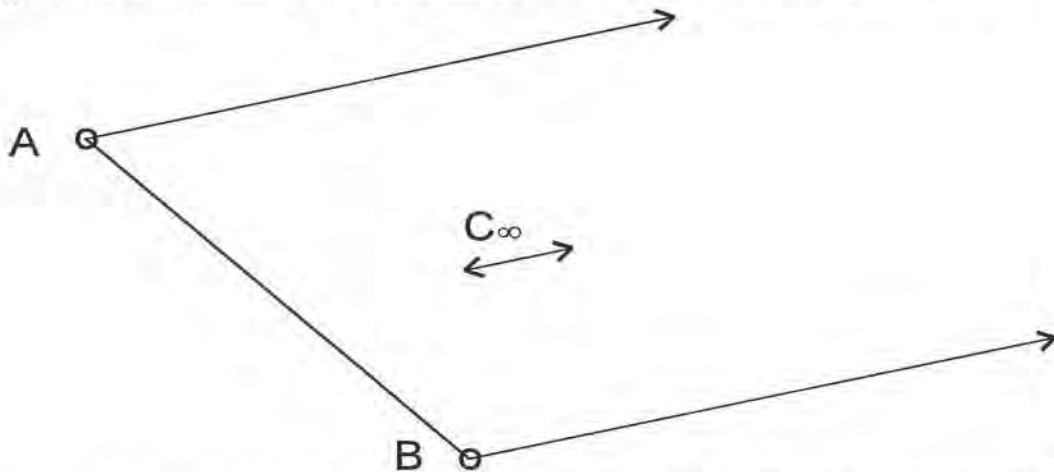
1. Gegeben seien der Punkt A sowie der Fernpunkt B_∞ . Gesucht ist die Verbindungsgerade g von A und B .

Lösung:

Der Punkt B_∞ kann nicht direkt gezeichnet werden; lediglich die durch ihn angegebene Richtung kann man sichtbar machen. Eine Gerade durch A geht aber genau dann durch den Fernpunkt B_∞ , wenn sie die durch ihn bestimmte Richtung hat. Es ist also eine Gerade durch A zu zeichnen, welche die Richtung des gegebenen Fernpunktes hat.



2. Gegeben seien die Punkte A, B und C_∞ . Es soll das Dreieck (ABC) gezeichnet werden.



Anmerkung: Natürlich könnte das Dreieck auch in der anderen Richtung gezeichnet werden – dann hätte es allerdings die umgekehrte Orientierung (Umlaufsinn). Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, entstehen ohnehin insgesamt vier Dreiecke!

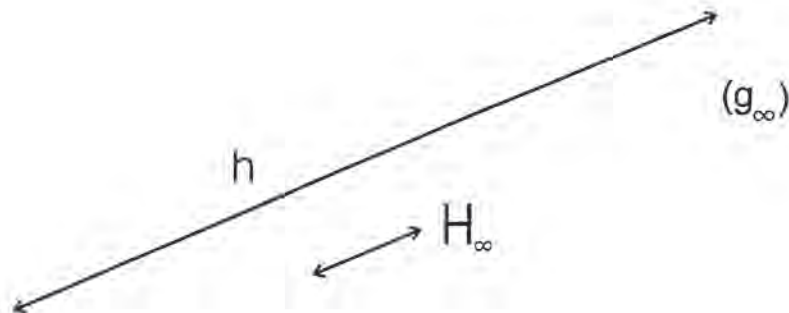
2.2. Ferngeraden

Alle Fernpunkte einer Ebene liegen zusammen auf der Ferngeraden; diese ist mit dem Horizont vergleichbar. Man kann sich hilfsweise die Ferngerade als einen Kreis mit unendlich großem Radius denken; dessen Krümmung ist unendlich klein – er ist also eine Gerade. *(Diese Hilfsvorstellung muss anschließend überwunden werden, da sie nicht alle Aspekte der Ferngeraden korrekt erschließt. Z. B. kann ein Punkt auf der Ferngeraden nie in einer bestimmten Richtung lokalisiert werden – er liegt immer genauso gut in der genauen Gegenrichtung).*

Jede (normale) Gerade schneidet die Ferngerade in einem Fernpunkt. Die Verbindungsgerade zweier Fernpunkte (in einer Zeichenebene) ist die Ferngerade.

In Zeichnungen ist die Ferngerade der jeweiligen Zeichenebene nicht direkt darstellbar. Um deutlich zu machen, dass sie mit in die Zeichnung einbezogen ist, kann man z. B. „(g_∞)“ in die Zeichnung schreiben.

Beispiel: Wir stellen den Schnittpunkt H_∞ der Geraden h mit der Ferngeraden der Zeichenebene her:



2.3. Die Fernebene des Raumes

Alle parallelen Ebenen haben eine gemeinsame Ferngerade – d. h. die Schnittgerade zweier paralleler Ebenen ist ihre gemeinsame Ferngerade. Dagegen haben zwei Ebenen mit einer gewöhnlichen Schnittgeraden (also nicht parallele Ebenen) auch unterschiedliche Ferngeraden. – Alle diese Ferngeraden liegen nun wieder in einer gemeinsamen Ebene: der Fernebene des Raumes. Hilfsweise kann sie als Kugel mit unendlich großem Radius vorgestellt werden. (Auch diese „Krücke“ muss wieder überwunden werden – s. o.).

Der dreidimensionale Raum hat also nur eine Fernebene, wie die Zeichenebene jeweils nur eine Ferngerade enthält.

In Zeichnungen kann man die Fernebene wiederum nur andeuten (z. B. „ (ε_∞) “).

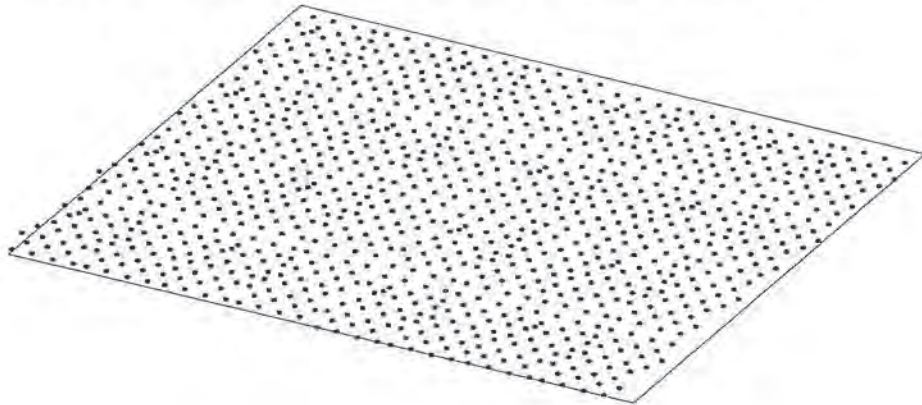
Anmerkung: Häufig werden in der projektiven Geometrie Darstellungen verwendet, bei denen z. B. die Ferngerade wie eine gewöhnliche Gerade eingezeichnet ist. Hierbei handelt es sich um perspektivische Darstellungen, bei denen die Ferngerade als Horizont dargestellt ist. Streng genommen müsste sie in solchen Darstellungen mit f bezeichnet werden, wenn die Ferngerade selber mit f_∞ bezeichnet wird (der Strich kennzeichnet ein Bild).

3 . Einige Grundbegriffe

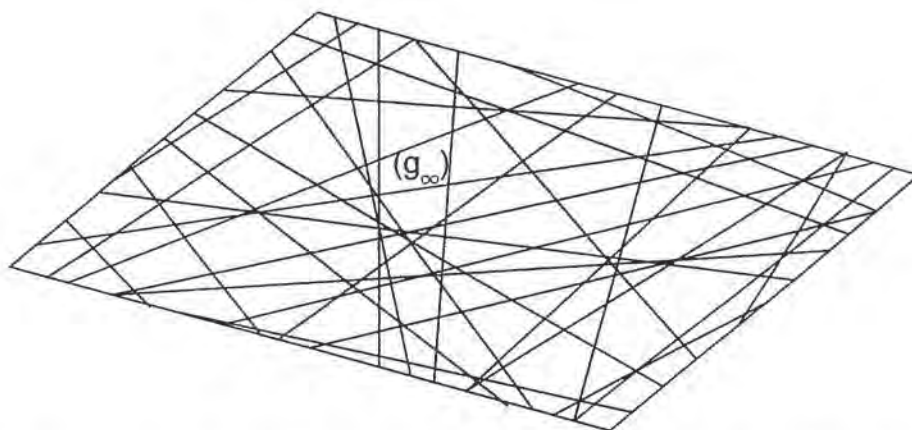
3.1. Grundgebilde mit eigentlichen Elementen als Trägern

a) Das Punktfeld

Die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene nennt man ein Punktfeld.



b) Die Gesamtheit aller Geraden einer Ebene nennt man ein Geradenfeld (oder Strahlenfeld).

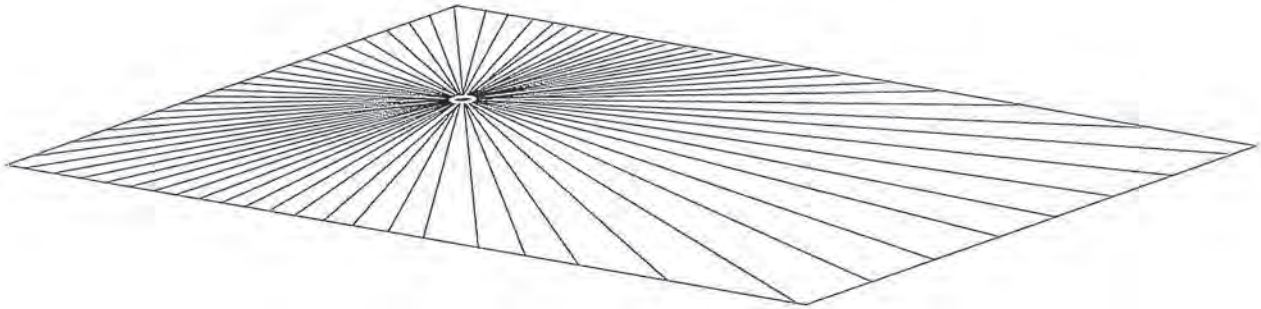


c) Alle Punkte, welche auf einer Geraden liegen, bilden zusammen eine Punktreihe.

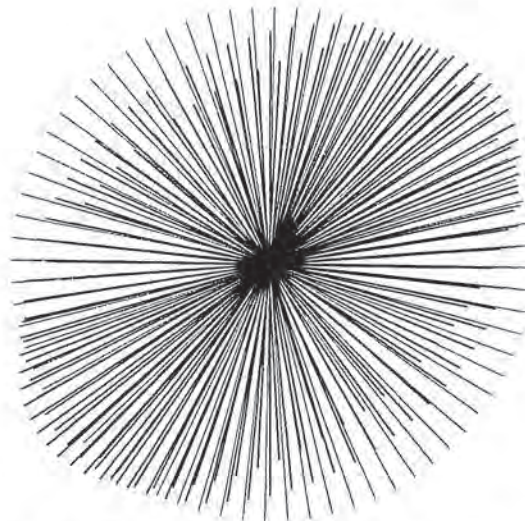


Die betreffende Gerade ist Träger der Punktreihe. – Eine Punktreihe ist also eine Vielheit, eine Gerade eine Einheit.

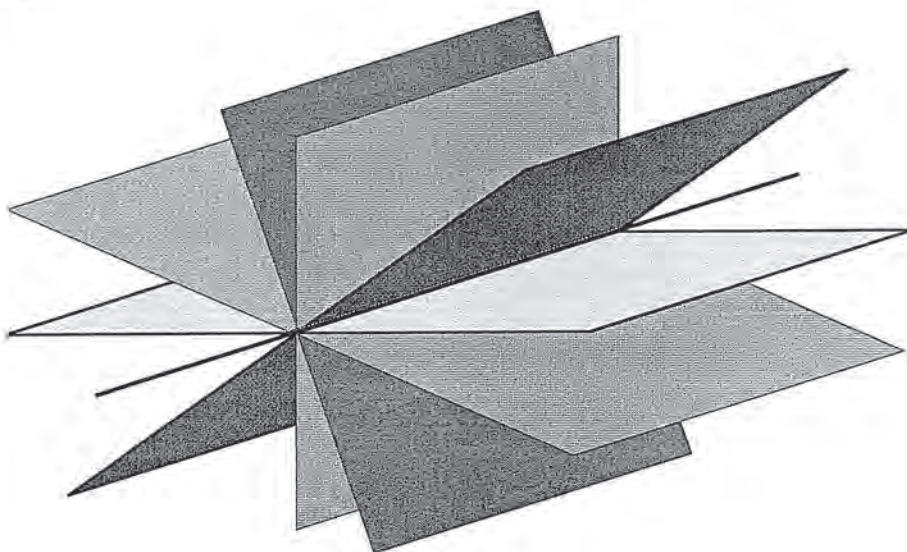
- d) Die Gesamtheit aller Geraden innerhalb der Zeichenebene, welche durch einen gemeinsamen Punkt gehen, bezeichnet man als Geradenbüschel (oder Strahlenbüschel). Der Punkt ist der Träger des Geradenbüschels.



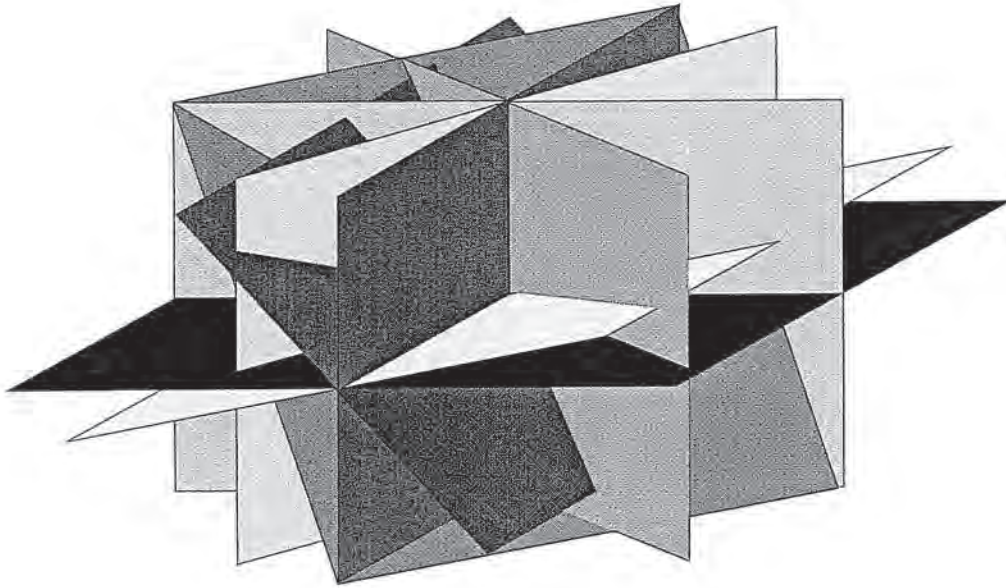
- e) Ein Geradenbündel besteht aus allen Geraden des Raumes, welche durch einen festen Punkt gehen.



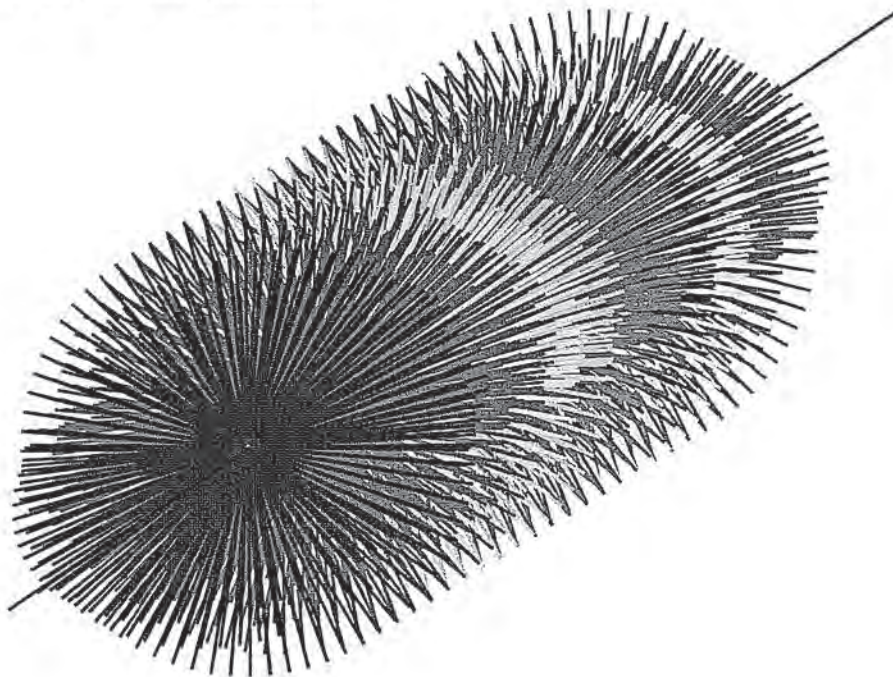
- f) Alle Ebenen, welche eine gemeinsame Schnittgerade haben, bilden zusammen einen Ebenenbüschel:



- g) Ein Ebenenbündel besteht dagegen aus allen Ebenen, die durch einen Punkt gehen:



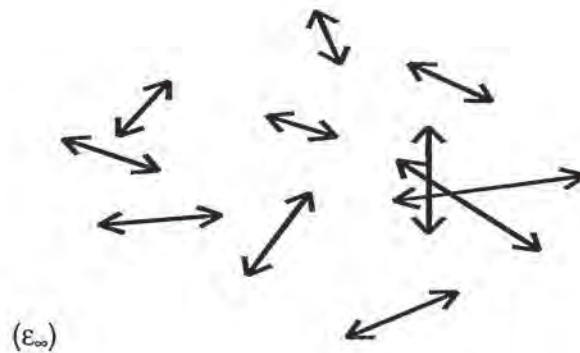
- h) Die Gesamtheit aller Geradenbündel, deren Trägerpunkte auf einer Geraden liegen, nennt man ein Geradengebüsch:



3.2. Grundgebilde mit uneigentlichen Trägern

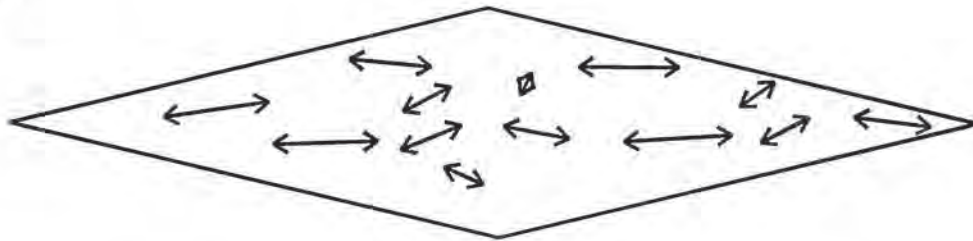
Die jeweiligen Trägerelemente der Grundgebilde können auch Fernpunkte, Ferngeraden oder die Fernebene des Raumes sein. Dann ergeben sich die folgenden Gebilde:

- a) Das Punktfeld, dessen Träger die Fernebene des Raumes ist:

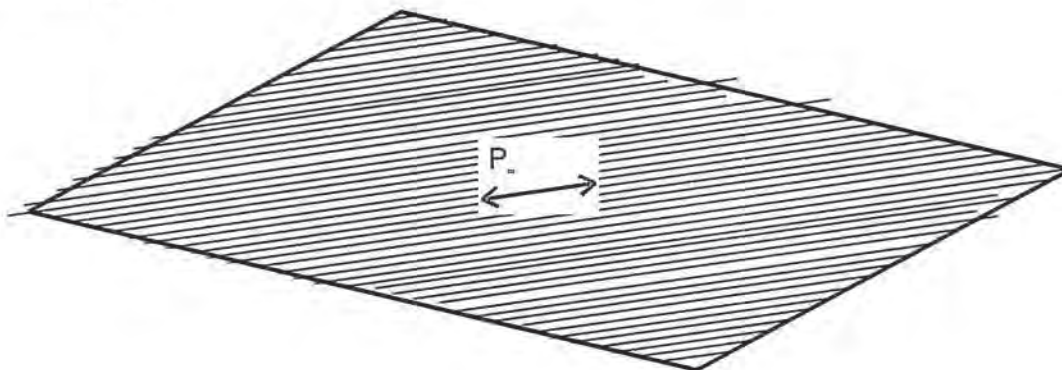


- b) Das Geradenfeld auf der Fernebene enthält lauter Ferngeraden (und ist in diesem Sinne nicht darstellbar).

- c) Eine Punktreihe, deren Träger eine Ferngerade ist, besteht aus allen Fernpunkten einer Ebene:



- d) Ein Geradenbüschel, dessen Träger ein Fernpunkt ist, ist eine Parallelenschar in der Zeichenebene:

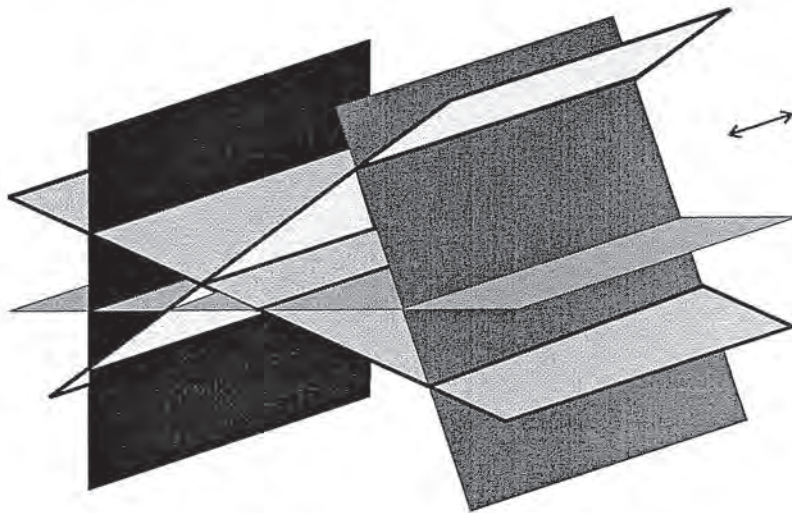


- e) Ein Geradenbündel, dessen Träger ein Fernpunkt ist, ist eine räumlichen Parallelenschar (zeichnerische Darstellung problematisch).

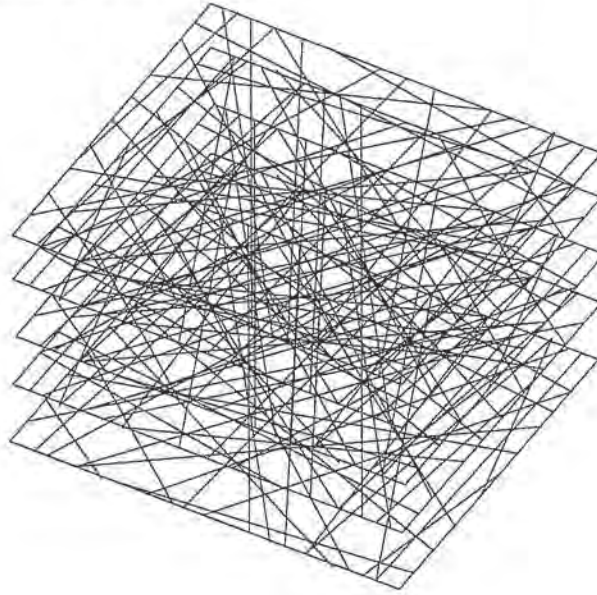
- f) Ein Ebenenbüschel mit einer Ferngerade als Träger ist eine Schar von parallelen Ebenen:



- g) Ein Ebenenbündel mit einem Fernpunkt als Träger:



- h) Ein Geradengebüsch, dessen Träger eine Ferngerade ist, besteht aus allen Geraden, welche parallel zu einer Ebene verlaufen:

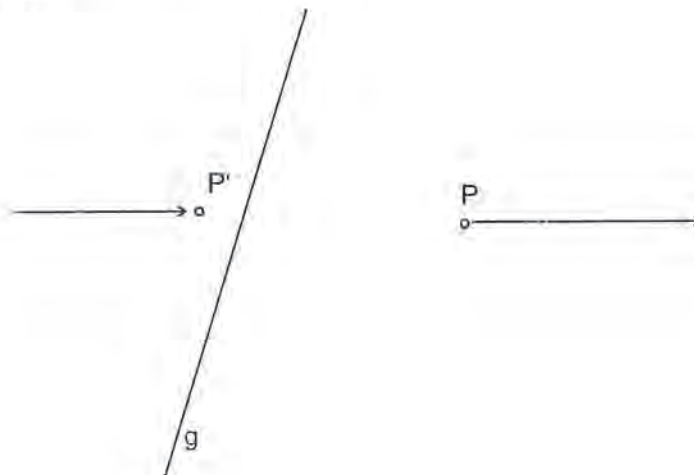


4 . Gliederung der Ebene

Die Ebene kann Träger eines Punktfeldes sowie eines Geradenfeldes sein. Es ist leicht einzusehen, dass vorhandene Geraden das Punktfeld in verschiedene Bereiche gliedern können. Ebenso können in der Ebene liegende Punkte das Geradenfeld gliedern.

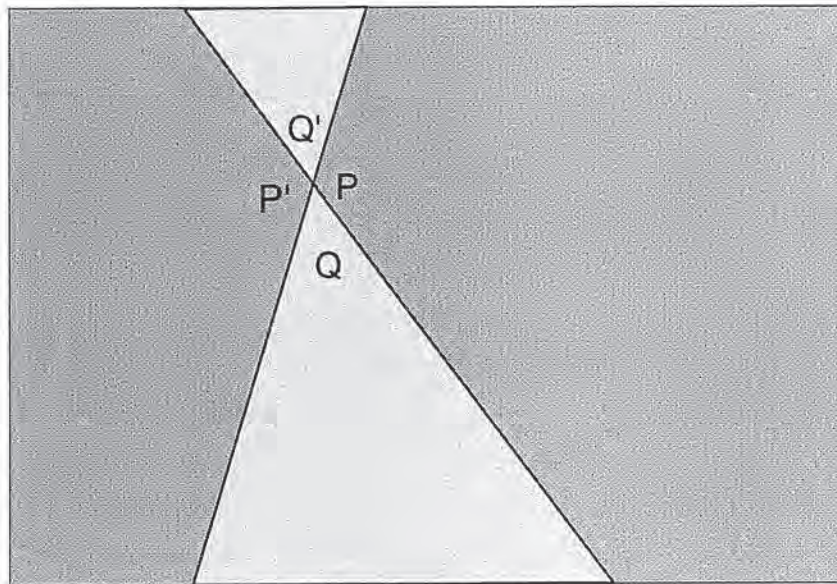
4.1. Gliederung eines Punktfeldes durch Geraden

- a) ... durch eine Gerade:



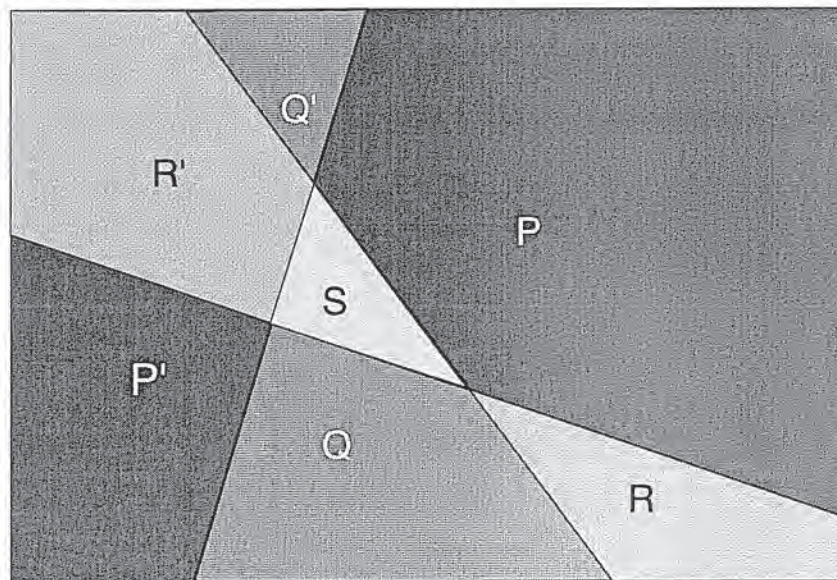
Durch **eine** Gerade wird das Punktfeld noch nicht gegliedert: denn P kann auf dem Weg über die Unendlichkeit in die Position P' wandern, ohne g dabei zu überqueren.

b) ... durch zwei Geraden:



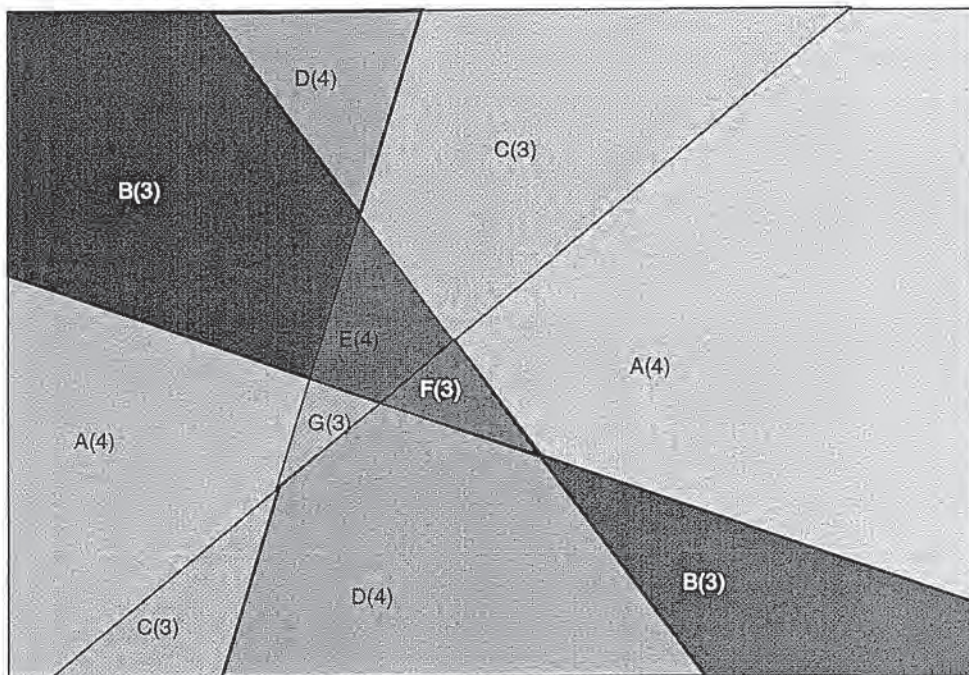
Durch zwei Geraden wird das Punktfeld in zwei disjunkte Gebiete aufgeteilt. In jedem dieser Gebiete gibt es für einen „wandernden“ Punkt jeweils zwei Extrempositionen, nämlich dort, wo die beiden Geraden sich kreuzen. Man nennt diese Gebiete daher „2-Punkt-Gebiete“.

c) ... durch drei Geraden:



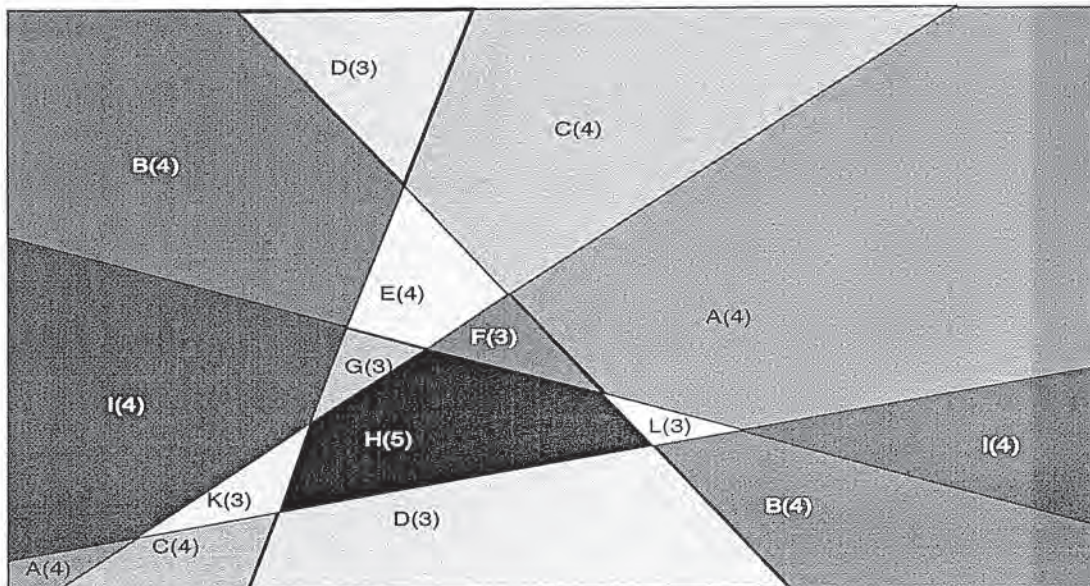
Hierbei entstehen vier 3-Punkt-Gebiete: Die Punkte P , Q , R und S können sich jeweils in Gebieten mit 3 Extrempunkten bewegen. Man kann jedes dieser 3-Punkt-Gebiete ein Dreieck nennen – auch wenn die ersten drei nicht der klassischen Vorstellung von einem Dreieck entsprechen.

d) ... durch 4 Geraden:



Hier entstehen vier 3-Punkt-Gebiete (Dreiecke) und drei 4-Punkt-Gebiete (Vierecke). – Die Bezeichnung bezieht sich auf einen repräsentativen Punkt in dem Gebiet, die Zahl in Klammern gibt die jeweils möglichen Extrempositionen an.

e) ... durch 5 Geraden:

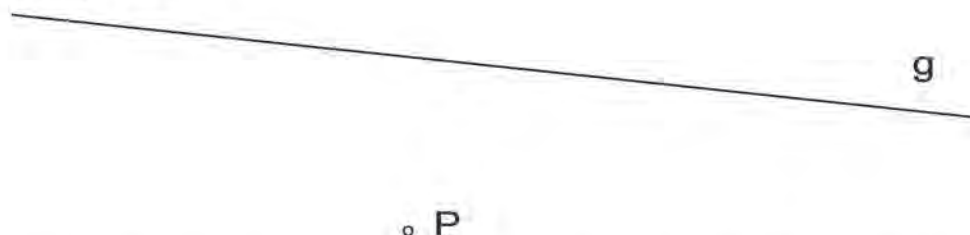


Jetzt entstehen fünf 3-Punkt-Gebiete, fünf 4-Punkt-Gebiete und ein 5-Punkt-Gebiet. – Eine gute ergänzende Übung kann darin bestehen, eine solche Situation mit einem über die Unendlichkeit reichenden 5-Punkt-Gebiet zu zeichnen.

4.2. Gliederung eines Geradenfeldes durch Punkte

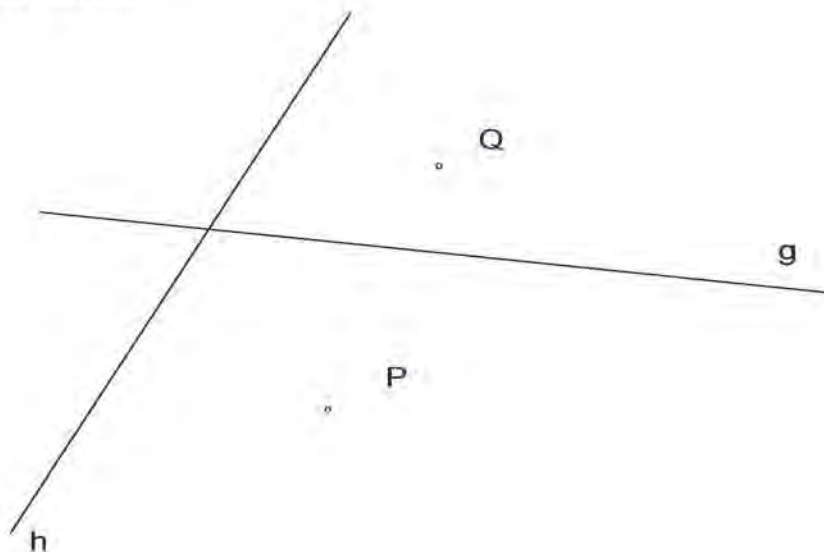
Analog können nun Punkte das Geradenfeld gliedern: Zwei Geraden gehören zum selben Gebiet, wenn die eine ohne Überstreichung eines gliedernden Punktes in die andere überführt werden kann. – Da sich die Gebiete des Geradenfeldes überlappen können, sind sie nicht durch flächendeckende Einfärbung darstellbar. Statt dessen wird für jedes Gebiet eine repräsentative Gerade eingezeichnet.

a) ... durch einen Punkt:



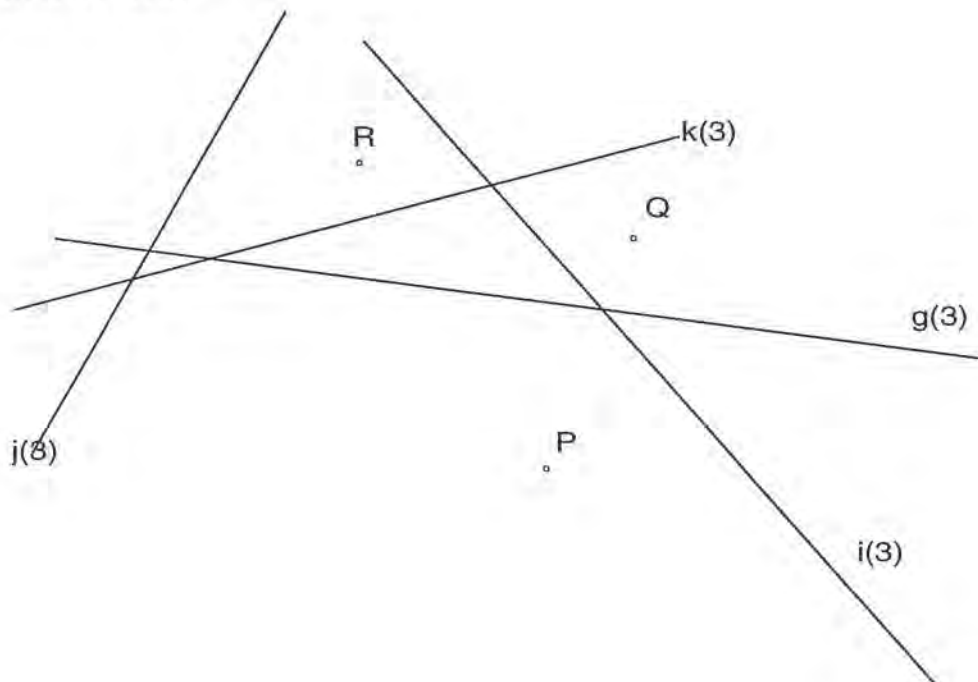
Durch einen Punkt wird das Geradenfeld noch nicht gegliedert; die Gerade g kann in jede Position verschoben werden, ohne P zu überstreichen.

b) ... durch zwei Punkte:



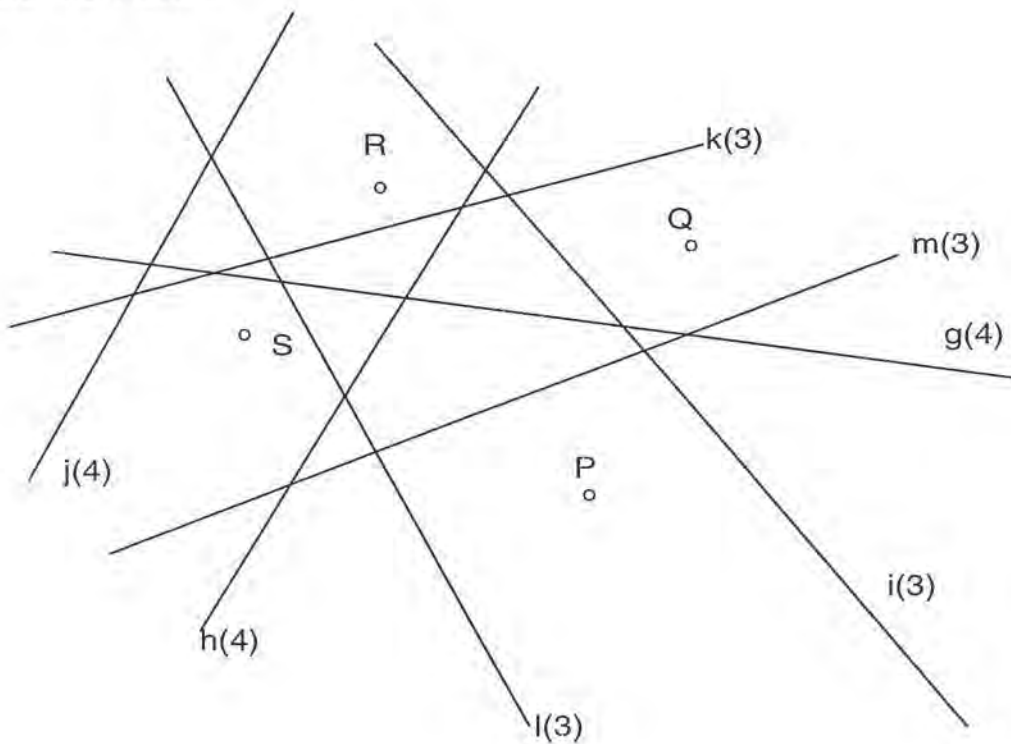
g kann nicht in die Position von h gelangen, ohne P oder Q zu überstreichen. g und h repräsentieren unterschiedliche Gebiete des Geradenfeldes. – In ihrer Bewegungsfreiheit kann jede der beiden Geraden zwei Extrempositionen einnehmen, indem sie in der einen oder anderen Weise an P und Q anliegen. Wir haben es daher mit zwei 2-Strich-Bereichen zu tun.

c) ... durch drei Punkte:



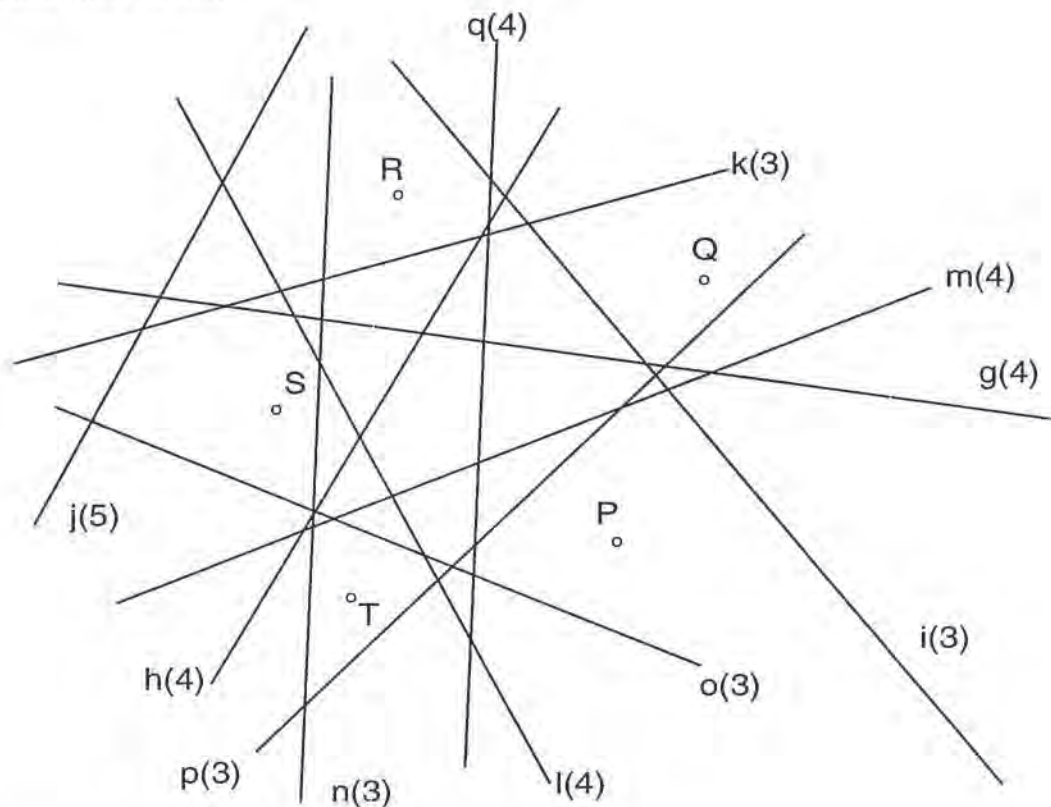
Hier entstehen vier 3-Strich-Bereiche (oder „Dreiseite“ – mehr dazu später). – Die repräsentativen Geraden sind wieder mit der Zahl der Extrempositionen gekennzeichnet.

d) ... durch vier Punkte:



Es entstehen vier 3-Strich-Bereiche und drei 4-Strich-Bereiche.

e) ... durch fünf Punkte:



Hier entstehen fünf 3-Strich-Bereiche, fünf 4-Strich-Bereiche und ein 5-Strich-Bereich.

Zwischen der Gliederung des Punktfeldes durch Geraden und der Gliederung des Geradenfeldes durch Punkte besteht eine auffällige Symmetrie: Bezüglich ihrer gegenseitigen Lagebeziehungen sind offensichtlich Punkt und Gerade völlig gleichwertig. Man spricht von der *Dualität von Punkt und Gerade* in der Ebene.

Geht man in den Raum über, so kann man eine entsprechende *Dualität von Punkt und Ebene* erkennen; die Geraden bleiben dabei in einer neutralen Mittlerfunktion. So sind z. B. die platonischen Körper Ikosaeder (20 Flächen, 12 Ecken, 30 Kanten) und Pentagon-Dodekaeder (12 Flächen, 20 Ecken, 30 Kanten) zueinander dual aufgebaut, ebenso Hexaeder (Würfel) und Oktaeder.

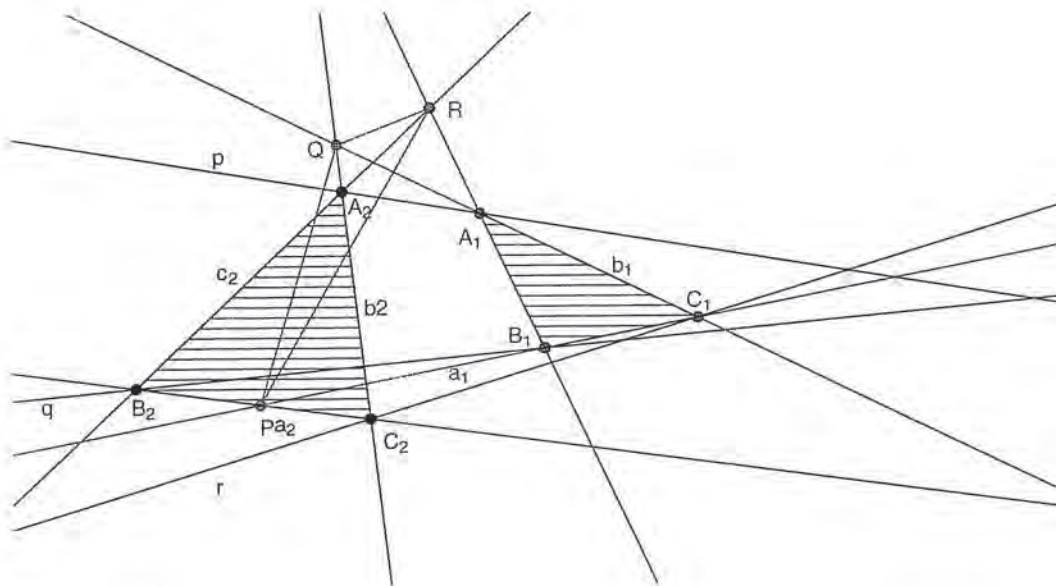
Das Prinzip der Dualität von Punkt und Gerade kann dank der Einbeziehung der Fernpunkte absolut konsequent durch die gesamte projektive Geometrie der Ebene verfolgt werden. Wir werden für jede neue Entdeckung nachweisen, dass sie sich jeweils auch dual wiederfinden lässt.

5 . Die Desargues'sche Konfiguration

5.1. Einführung

Drei Punkte liegen immer in einer Ebene, jedoch im allgemeinen nicht auf einer Geraden (sie bilden ein Dreieck). Innerhalb der Zeichenebene ist es also ein Sonderfall, wenn drei Punkte auf einer Geraden liegen. – Entsprechend werden sich drei Geraden in der Regel nicht in einem Punkt schneiden, sondern ein „Dreiseit“ bilden.

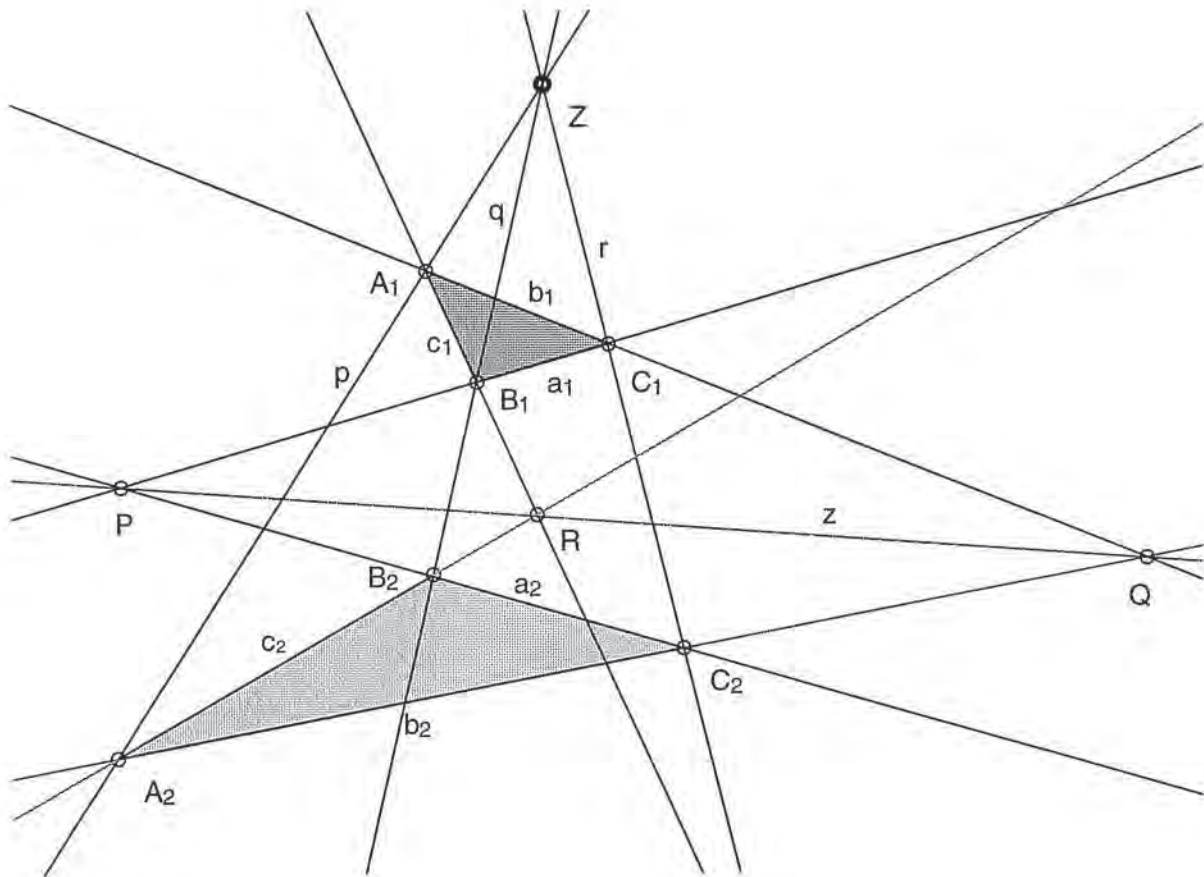
Wir betrachten nun zwei beliebige allgemeine Dreiecke A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 . Jedes Dreieck hat drei Eckpunkte, welche durch drei Seiten verbunden sind, wobei wir diese als ganze Geraden betrachten wollen.



Man kann nun die sich entsprechenden Ecken A_1 und A_2 , B_1 und B_2 sowie C_1 und C_2 miteinander verbinden, wobei drei neue Geraden p , q und r entstehen. Diese werden im Allgemeinen miteinander ein Dreieit bilden.

Entsprechend kann man die Geraden a_1 mit a_2 , b_1 mit b_2 und c_1 mit c_2 schneiden; diese drei Schnittpunkte P , Q und R werden im Allgemeinen ein Dreieck bilden.

Legt man dagegen die beiden Dreiecke so, dass die Verbindungsgeraden sich entsprechenden Eckpunkte sich in einem Punkt Z treffen, so ergibt sich folgende Situation:

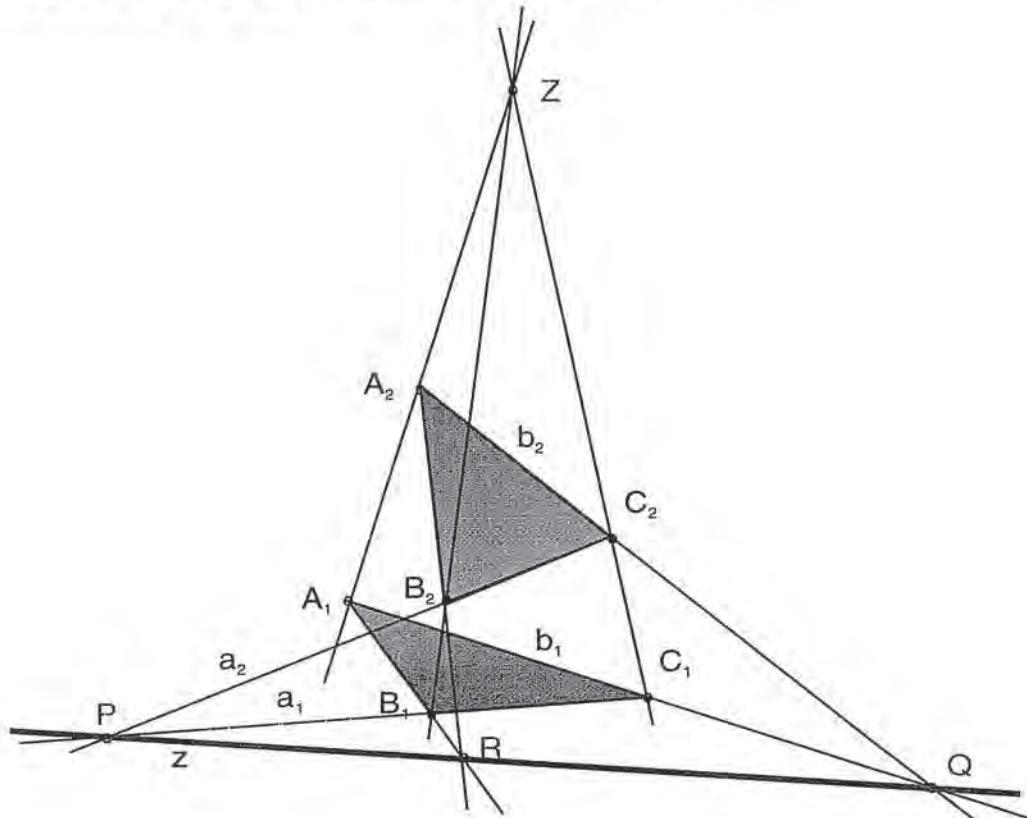


Die Anschauung lässt folgendes vermuten (Satz von Desargues):

Schneiden sich die Verbindungsgeraden sich entsprechender Eckpunkte zweier Dreiecke in einem Punkt, so liegen die Schnittpunkte sich entsprechender Dreiecksseiten auf einer Geraden.

5.2. Beweis des Satzes von Desargues

Um die Richtigkeit des Satzes von Desargues einzusehen, ist es hilfreich, sich die gesamte Konfiguration als perspektivisches Bild eines räumlichen Gebildes vorzustellen: Es sei das Dreieck A_1, B_1, C_1 der Boden eines „Indianerzeltes“, die Zeltstangen seien die Geraden p, q und r . Das Dreieck A_2, B_2, C_2 bildet dabei eine Art Zwischendecke.



Aus der räumlichen Anordnung wird deutlich, dass die Gerade z die Schnittgerade der beiden Dreiecksebenen ist.

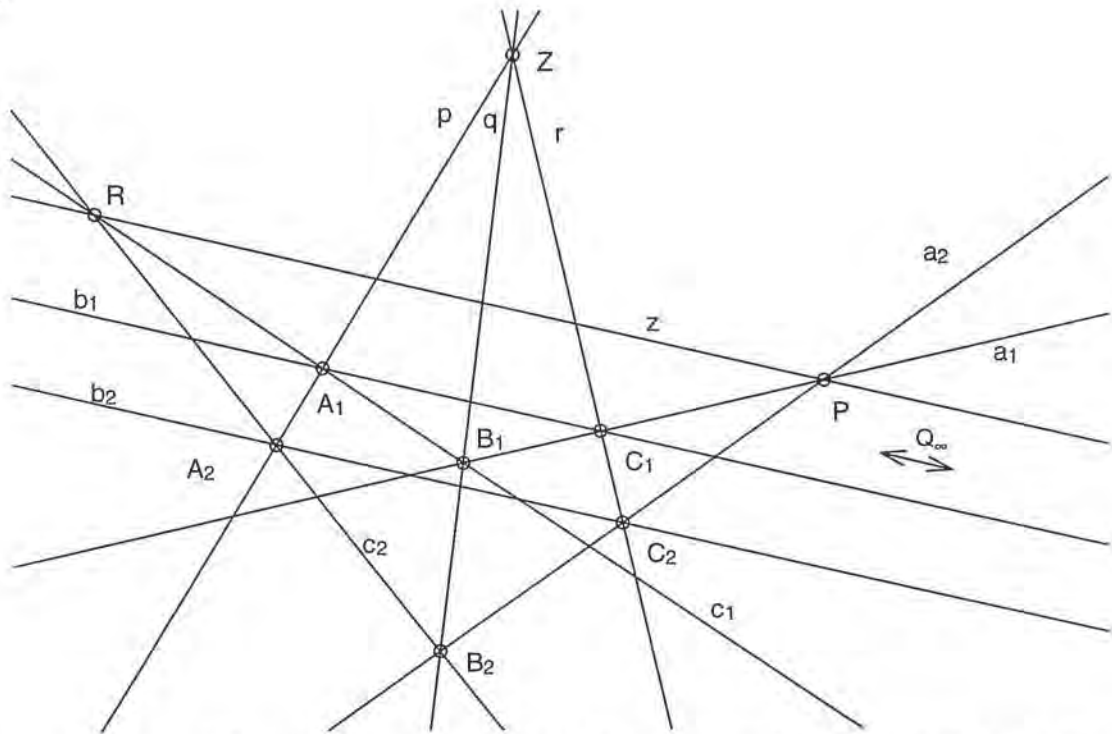
Die Geraden b_1, b_2 und c_1, c_2 liegen jeweils in einer gemeinsamen Ebene (liegen nicht windschief), d. h. Q und R sind tatsächlich räumliche Schnittpunkte; sie liegen damit auch auf der Schnittgeraden z . Die entsprechende Überlegung für die Geraden a_1 und a_2 zeigt, dass auch P auf dieser Geraden liegen muss. – Räumlich von Z aus gesehen verdeckt das eine Dreieck genau das andere; man nennt sie daher zueinander zentral-perspektiv. Gleichzeitig treffen sich aber die entsprechenden Geraden wie in einem gemeinsamen Horizont; diese Eigenschaft bezeichnet man als achsial-perspektiv.

Der Satz von Desargues kann damit etwas allgemeiner formuliert werden:

Sind zwei geometrische Figuren der Zeichenebene zueinander zentral-perspektiv, so sind sie auch achsial-perspektiv und umgekehrt.

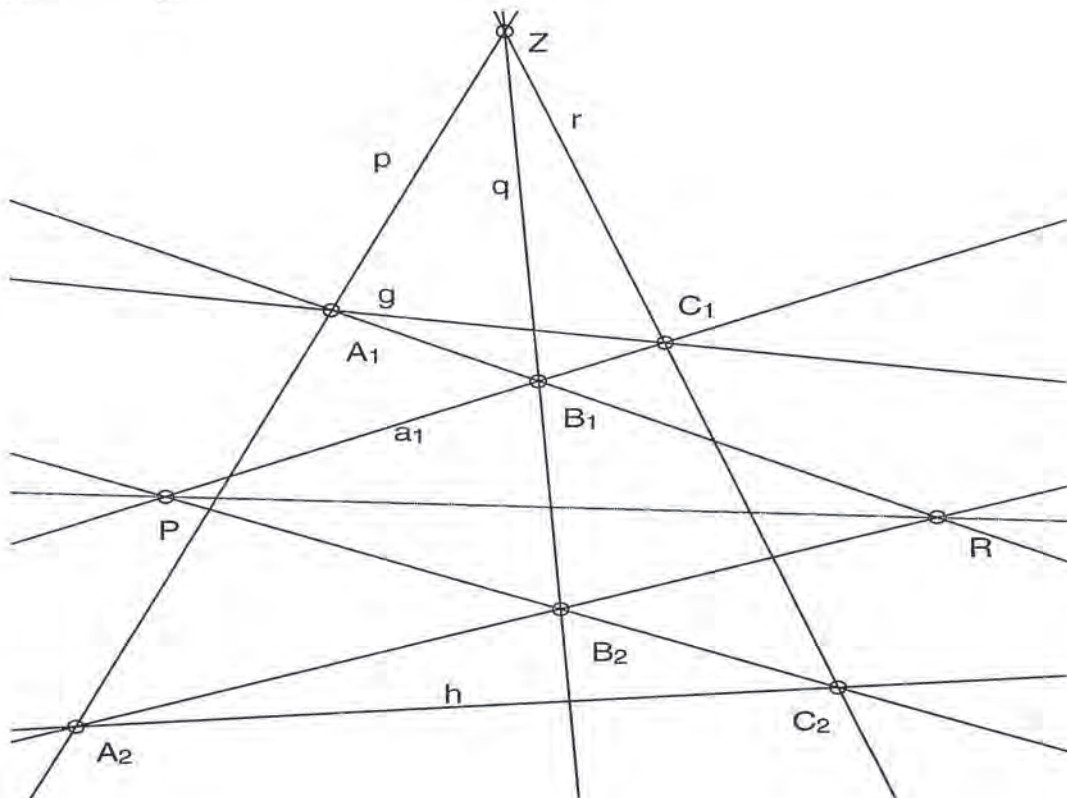
5.3. Beispielaufgaben

- a) Von einer Desargues'schen Konfiguration seien gegeben Z, A_1, B_2, C_2 und a_1 ; Q soll ein Fernpunkt sein.



- b) Gegeben seien zwei Geraden g und h , deren Schnittpunkt außerhalb des zeichenbaren Bereichs liegt, sowie ein Punkt P . – Konstruieren Sie auf dem Blatt die Verbindungsgerade von P zum Schnittpunkt von g und h .

Wir fassen g und h als die Geraden b_1 und b_2 einer Desargues'schen Konfiguration auf; die fehlenden Teile fügen wir hinzu und konstruieren zum Schluss z .

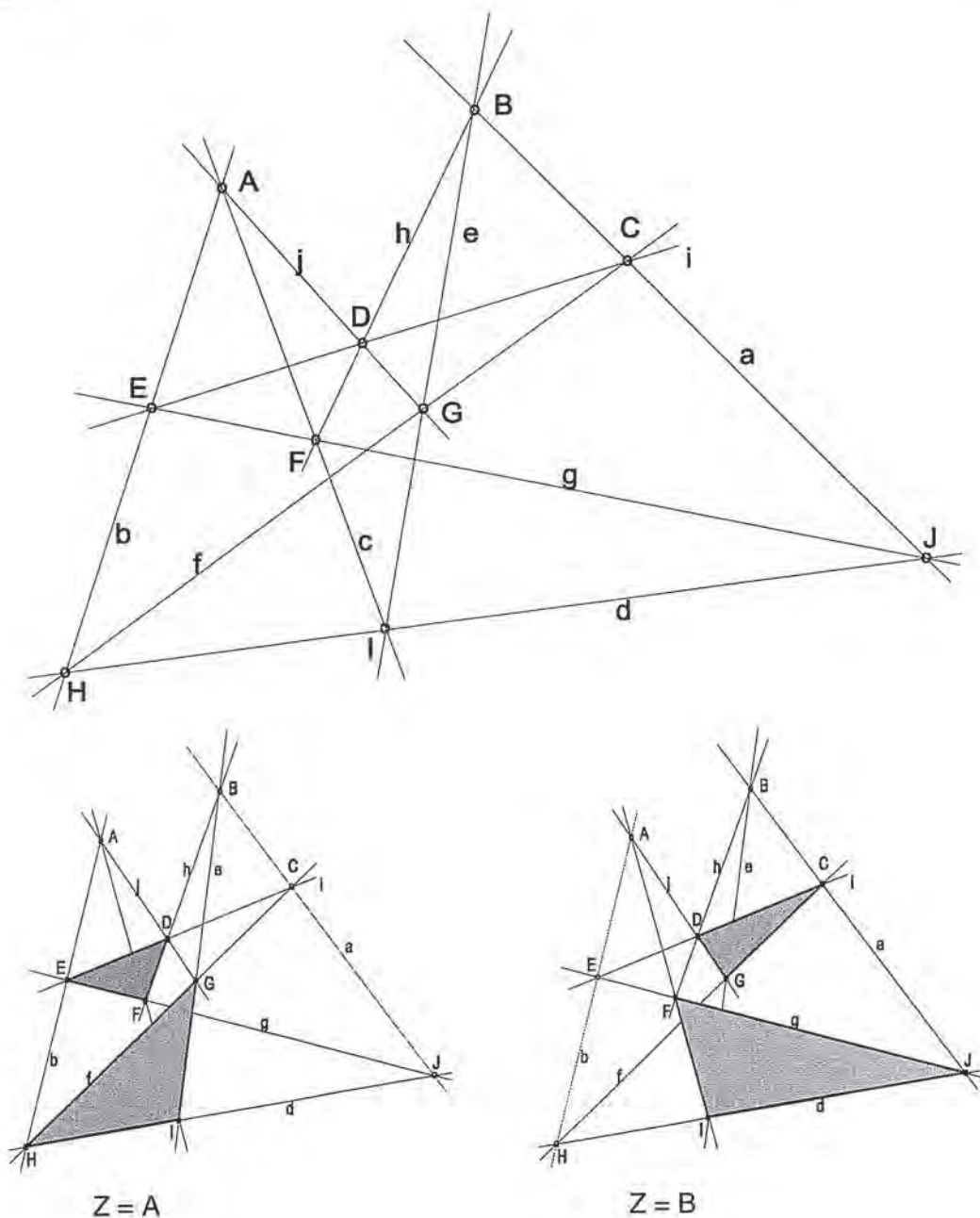


5.4. Zehn Blickwinkel und duale Beziehungen

Die Desargues'sche Konfiguration besteht aus 2 Dreiecken mit jeweils drei Geraden und drei Punkten, ferner den Punkten Z , P , Q , R sowie den Geraden p , q , r und z – also insgesamt aus 10 Geraden und 10 Punkten. Dabei gehen durch jeden Punkt drei Geraden, und auf jeder Geraden liegen drei Punkte.

Lässt man nun alle Bezeichnungen weg, so ist es nicht mehr möglich zu bestimmen, welcher der zehn Punkte Z ist. In der Tat kann jeder der 10 Punkte die Rolle von Z übernehmen und jede Gerade kann z sein.

Hierzu kann man den Schülern 10 Kopien der gleichen Desargues'schen Konfiguration ausgeben und sie jeweils nach Vorgabe von Z die beiden Dreiecke suchen lassen. – Die erste (größere) Zeichnung kann als Kopiervorlage dienen, darunter sind die Fälle $Z = A$ und $Z = B$ ausgeführt.



In den vorangegangenen Zeichnungen wird auch deutlich, dass jedem Punkt, als Zentrum betrachtet, jeweils eine Gerade in der Rolle von z entspricht. Diese beiden Elemente stehen sich also in dieser Konfiguration dual gegenüber: Tatsächlich ist die Aussage „Die Verbindungsgeraden sich entsprechender Eckpunkte schneiden sich in einem Punkt“ die exakte duale Aussage zu „Die Schnittpunkte sich entsprechender Dreiecksseiten liegen auf einer Geraden“. – Es verwundert daher auch nicht, dass der exakte duale Aufbau zu einer völlig gleichen Konfiguration führt:

1.	Wir beginnen mit einem Punkt, durch welchen drei Geraden verlaufen.	Wir beginnen mit einer Geraden, auf welcher drei Punkte liegen.
2.	Auf jeder der drei Geraden wird jeweils ein weiterer Punkt gewählt.	Durch jeden der drei Punkte wird jeweils eine weitere Gerade gezeichnet.
3.	Die drei Punkte werden durch drei Geraden verbunden.	Die Schnittpunkte der drei Geraden werden markiert.
4.	Die Schritte 2 und 3 werden mit neuen Punkten wiederholt.	Die Schritte 2 und 3 werden mit neuen Geraden wiederholt.
5.	Die Schnittpunkte jeweils zweier sich entsprechender Geraden aus den Schritten 2 bis 4 werden markiert.	Jeweils zwei sich entsprechende Punkte aus den Schritten 2 bis 4 werden durch Geraden verbunden.
6.	Die entstandenen drei Schnittpunkte liegen auf einer Geraden.	Die gezeichneten drei Geraden treffen sich in einem Punkt.

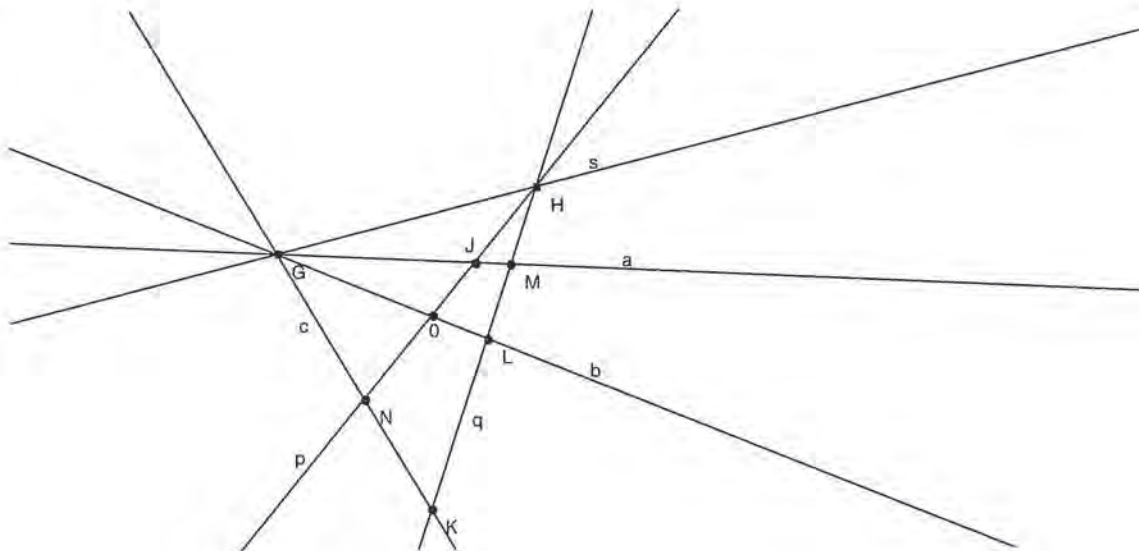
An dieser Stelle können sich weitere Übungen zur Dualisierung vorgegebener Verhältnisse anschließen. Als Beispiel einer solchen Dualisierungsübung sei das folgende angeführt:

Gegeben seien zwei sich in der Zeichnung schneidende Geraden g und h ; ihr Schnittpunkt sei S . Ferner auf g die Punkte A, B, C , auf h die Punkte P und Q .

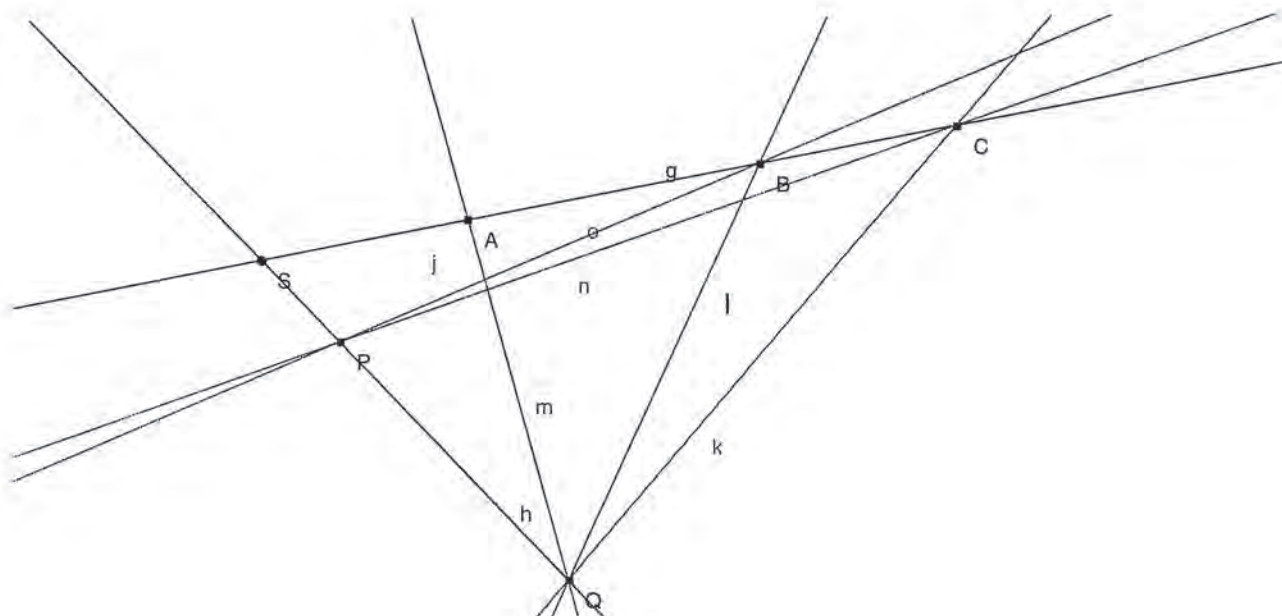
Zeichnen Sie alle Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte ein und bezeichnen Sie diese. Stellen Sie anschließend eine duale Figur her.

(Vorgabe und duale Figur: Siehe nächste Seite)

Vorgabe:



Duale Figur:



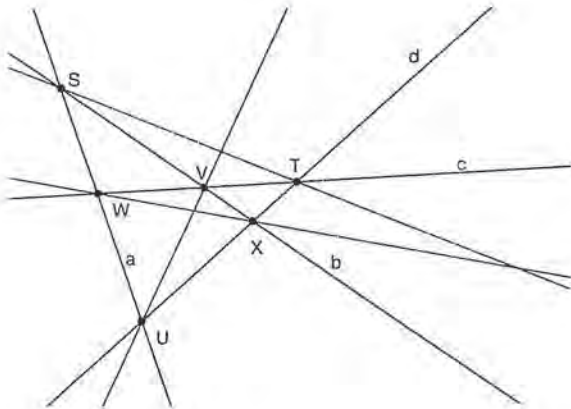
Es gibt geometrische Figuren, die zu sich selbst dual sind (z. B. die Desargues'sche Konfiguration). Dies gilt insbesondere auch für ein Dreieck: Es besteht aus drei Punkten die durch drei Geraden verbunden sind bzw. drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden. Dreieck und Dreiseit unterscheiden sich also nur durch ihre Entstehung, nicht in der Erscheinung. Beim Viereck sieht dies anders aus.

6 . Vollständiges Vierseit, vollständiges Viereck und harmonische Lage

6.1. Vollständiges Vierseit und vollständiges Viereck

Vier Punkte lassen sich durch insgesamt sechs Geraden verbinden; vier Geraden haben miteinander sechs Schnittpunkte. Wir wollen in dieser Dualität Viereck und Vierseit nebeneinander aufbauen:

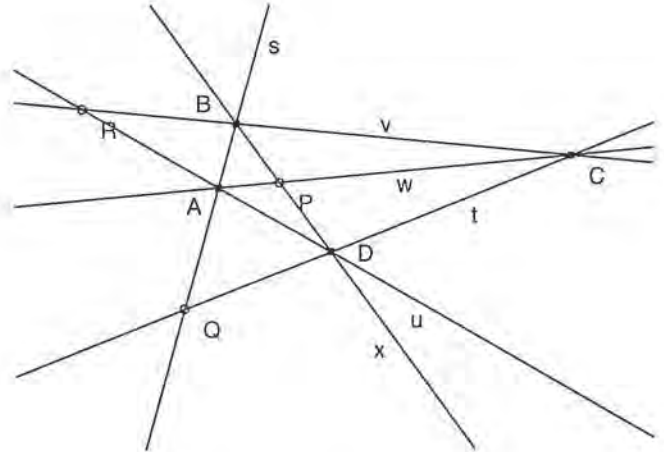
Vierseit:



Wir beginnen mit vier Geraden a, b, c, d , die sich in sechs Punkten $S = a \cap b$, $T = c \cap d$, $U = a \cap d$, $V = b \cap c$, $W = a \cap c$, $X = b \cap d$ treffen.

Von den sechs Punkten liegen auf jeder Geraden drei; somit bleibt zu jedem dieser Punkte **ein** weiterer Punkt, mit dem er (noch) nicht durch eine Gerade verbunden ist. Durch diese zwei „Eckpunkte“ lässt sich dann jeweils eine weitere Gerade zeichnen - also insgesamt 3 Geraden: $p = XW$, $q = ST$, $r = UV$.

Viereck:



Wir beginnen mit den vier Punkten A, B, C, D ; es lassen sich sechs Verbindungsgeraden $s = AB$, $t = CD$, $u = AD$, $v = BC$, $w = AC$, $x = BD$ einzeichnen.

Diese treffen sich außer in den vorgegebenen Punkten noch in drei weiteren Punkten $P = x \cap w$, $Q = s \cap t$, $R = u \cap v$.

Welche Bedeutung haben die drei Geraden bzw. drei Punkte im Sinne eines „klassischen“ Vierecks?

Je nach Betrachtungsweise des Vierseits kann jede der drei Geraden Diagonale sein. Nimmt man die Schnittpunkte der drei Diagonalen hinzu, so hat man auf jeder Diagonalen vier Punkte.

Das Vierseit, ergänzt um sein Diagonalendreieck, nennt man vollständiges Vierseit.

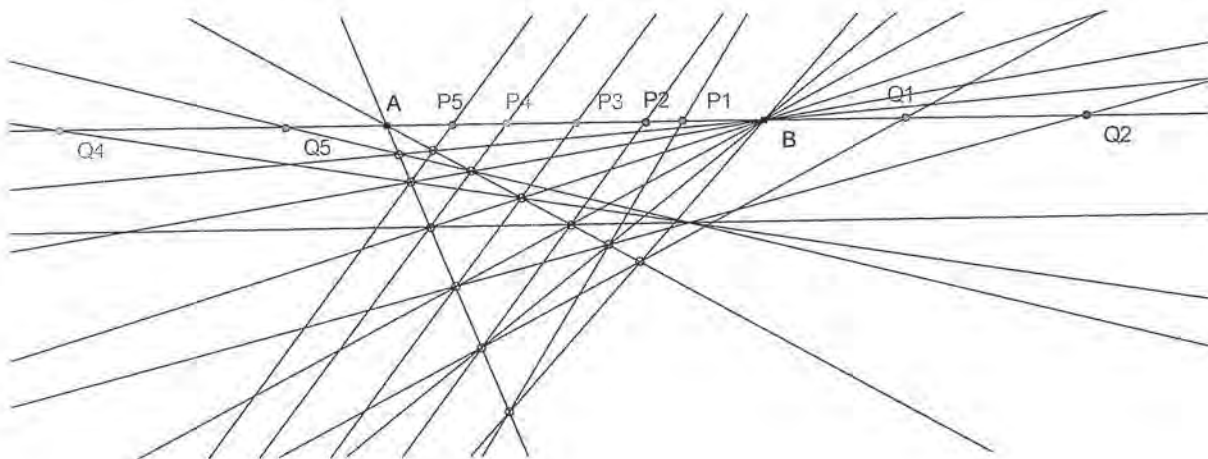
Je nach Betrachtungsweise des Vierecks kann jeder der drei Punkte Kreuzungspunkt von Diagonalen sein. Zeichnet man die Verbindungsgeraden dieser drei Punkte untereinander mit ein, so gehen durch jeden der Punkte vier Geraden.

Das Viereck, ergänzt durch sein Diagonalpunktedreieck, nennt man ein vollständiges Viereck.

Wir wenden uns nun zunächst den jeweils vier Punkten zu, die beim Vierseit auf den Diagonalen entstanden sind, und untersuchen deren besondere Lagebeziehungen.

6.2. Harmonische Punkte

Wir konstruieren ein Vollständiges Vierseit derart, dass die Gerade durch A und B waagrecht liegt und auf dieser Geraden die Punkte P und Q des Diagonalendreieits liegen. (Die Punkte A und B entsprechen also z. B. den Punkten U und V in der Zeichnung auf der vorigen Seite links, die Trägergerade unserer 4 Punkte entspricht der Geraden r.) Während wir A und B fest lassen, lassen wir P von rechts nach links wandern und beobachten dabei die Bewegung des Punktes Q.



Die Lage von Q scheint also durch die Lage von A, B und P bestimmt zu sein. Nähert sich P an B, so kommt ihm Q von der anderen Seite entgegen. Liegt P in der Mitte zwischen A und B, so ist Q ein Fernpunkt. Geht P weiter auf A zu, so kommt ihm wiederum Q von der anderen Seite entgegen.

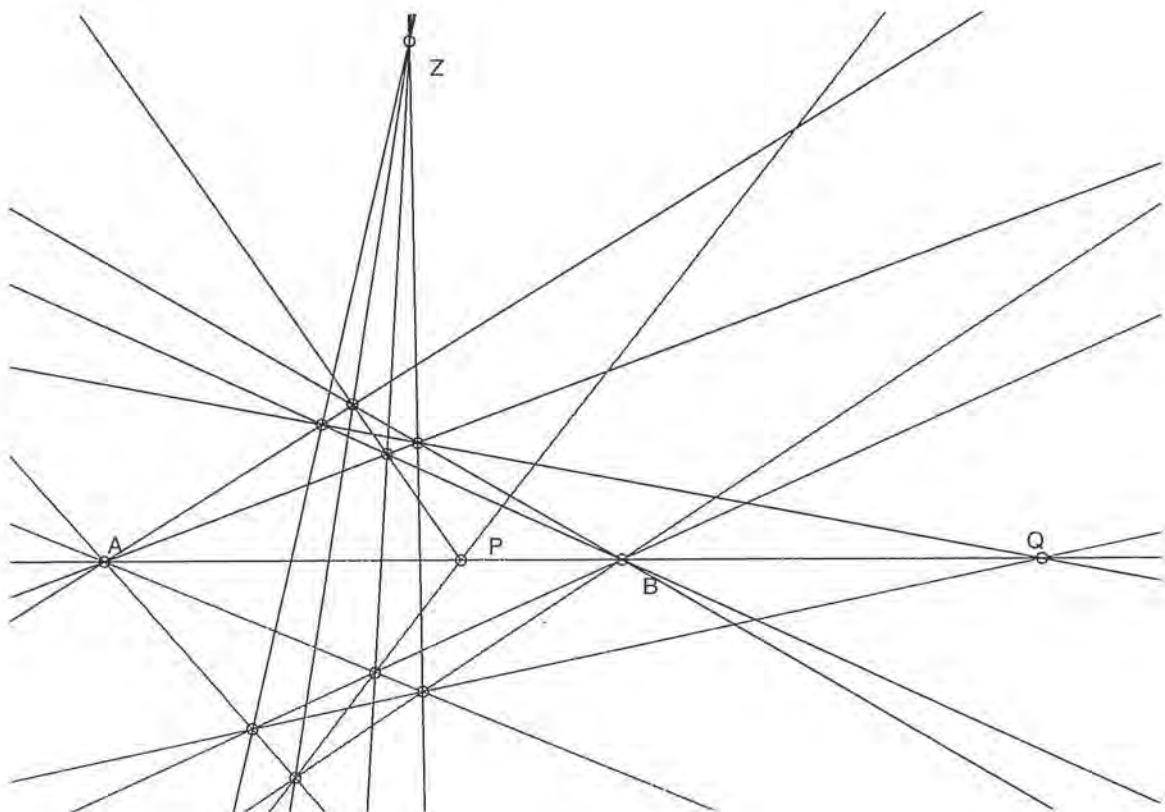
Aus der Anschauung lässt sich vermuten: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$; d. h. P teilt die Strecke AB im gleichen

Verhältnis von innen, wie Q die Strecke von außen „teilt“. – Man spricht von einem harmonischen Teilverhältnis; die vier Punkte A, B, P, Q sind dann vier harmonische Punkte (vier Punkte inharmonischer Lage, ein harmonischer Punktewurf).

Die Richtigkeit dieser Vermutung wird in den folgenden Kapiteln zu beweisen sein.

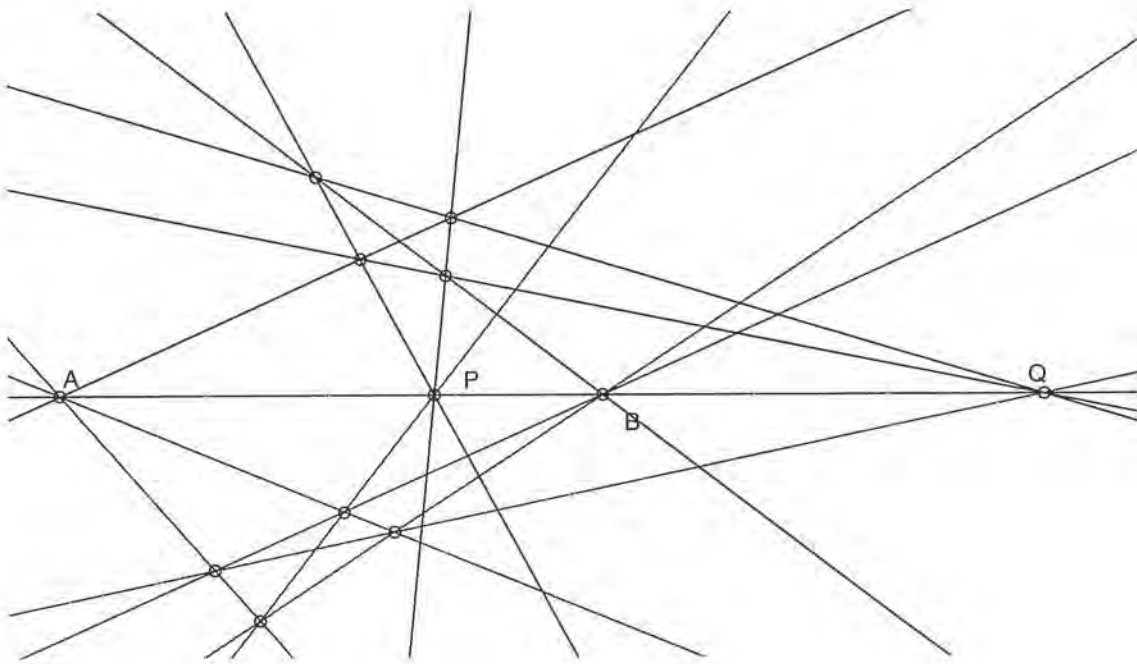
6.3. Beweis der Eindeutigkeit

Zunächst müssen wir sicherstellen, dass die Lage von Q tatsächlich durch A, B und P bestimmt ist und nicht von der Wahl des Vierseits abhängt. Wir konstruieren dazu von A, B und P aus ein weiteres Vierseit; man kann leicht erkennen, dass beide Vierseite zueinander perspektiv sind. Daher schneiden sich auch die Q erzeugenden Diagonalen auf der Geraden AB. Die Lage von Q ist also unabhängig von der Wahl des Vierseits.



Man kann sogar die Punktpaare A, B und P, Q ihre Rollen tauschen lassen, ohne dass sich die Verhältnisse ändern:

(Zeichnung siehe nächste Seite)

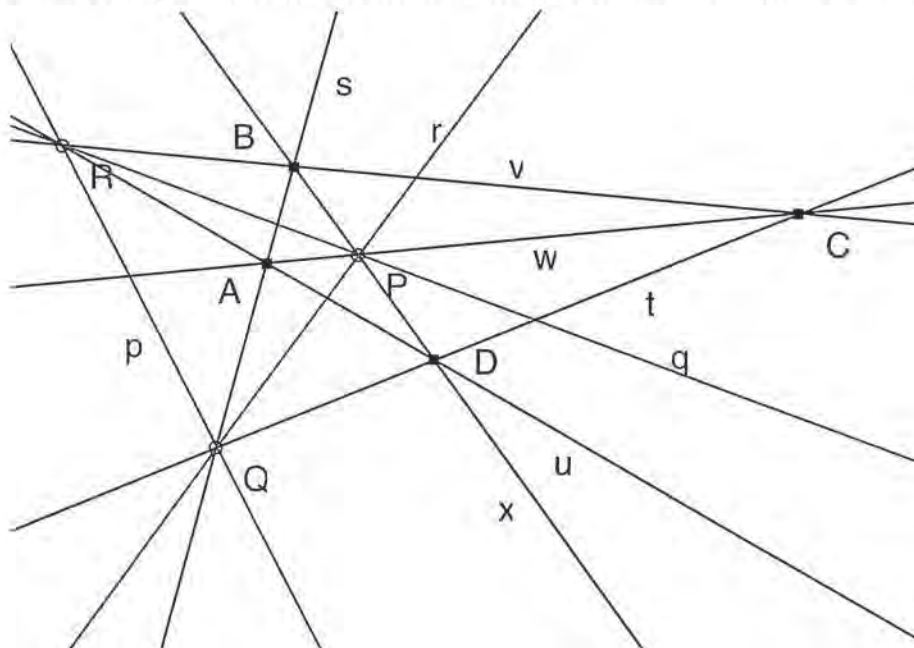


6.4. Harmonische Geraden

Den vier harmonischen Punkten auf den Diagonalen des Vierseits entsprechen die vier Geraden in jedem der Diagonalkreuzungspunkte des Vierecks.

Auch hier kann man ähnliche Bewegungsbeobachtungen machen wie bei den harmonischen Punkten; wir nennen solche vier Geraden in Anlehnung an die Punkte harmonische Geraden.

Viereck: A, B, C, D; Diagonalkreuzungspunkte: P, Q, R; harmonischer Geradenwurf z. B. in Q: t, r, s, p.

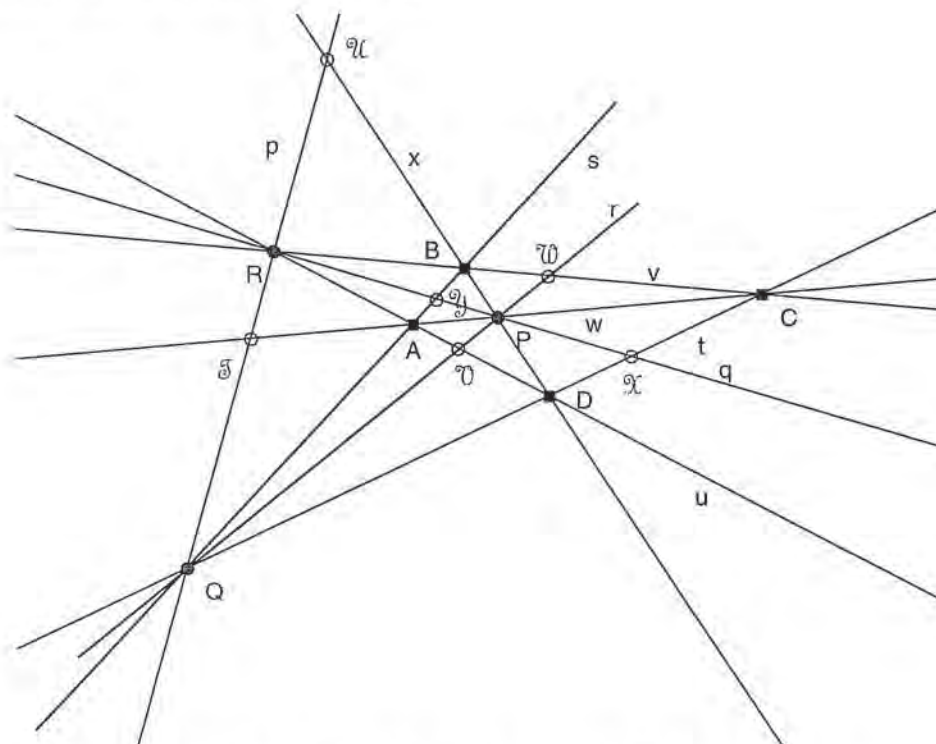


Denken wir uns das Viereck als Quadrat, so schließen die vier harmonischen Geraden im Mittelpunkt des Quadrates jeweils Winkel von 45° miteinander ein. Dies stellt also einen Sonderfall von harmonischen Geraden dar.

6.5. Die Invarianz der harmonischen Lage

Wir betrachten nun ein vollständiges Viereck, nehmen jedoch einige sich neu ergebende Schnittpunkte hinzu: Die als Kreise gekennzeichneten Punkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$.

Betrachten wir nun die Geraden s , t , v , u : Sie spannen miteinander ein **Vierseit** auf. Dessen Diagonalen sind die Geraden x , w und p .



Die Punkte Q , $\mathfrak{J}$, R und $\mathfrak{U}$ sind daher in harmonischer Lage.

Analog kann man auch die Vierseite finden, welche für die harmonischen Punktwürfe Q , $\mathfrak{V}$, P , $\mathfrak{W}$ bzw. R , $\mathfrak{Y}$, P , $\mathfrak{X}$ verantwortlich sind.

Die vier harmonischen Geraden, welche von P ausgehen, schneiden also p in einem harmonischen Punktwurf. Wegen der in V.3 gezeigten Eindeutigkeit ergibt sich dieser Zusammenhang aber für jede Gerade, die mit diesem harmonischen Geradenwurf geschnitten wird. Daher gilt:

- a) Verbindet man vier Punkte eines harmonischen Wurfes zu einem Punkt außerhalb der Trägergeraden, so entsteht dort ein harmonischer Geradenwurf.
- b) Schneidet man die vier Geraden eines harmonischen Wurfes mit einer Geraden, welche nicht durch den Trägerpunkt geht, so entsteht auf dieser ein harmonischer Punktwurf.

Oder:

Die harmonische Lage ist invariant gegenüber den (projektiven) Operationen des Verbindens (zu einem Punkt) und Schneidens (mit einer Geraden).

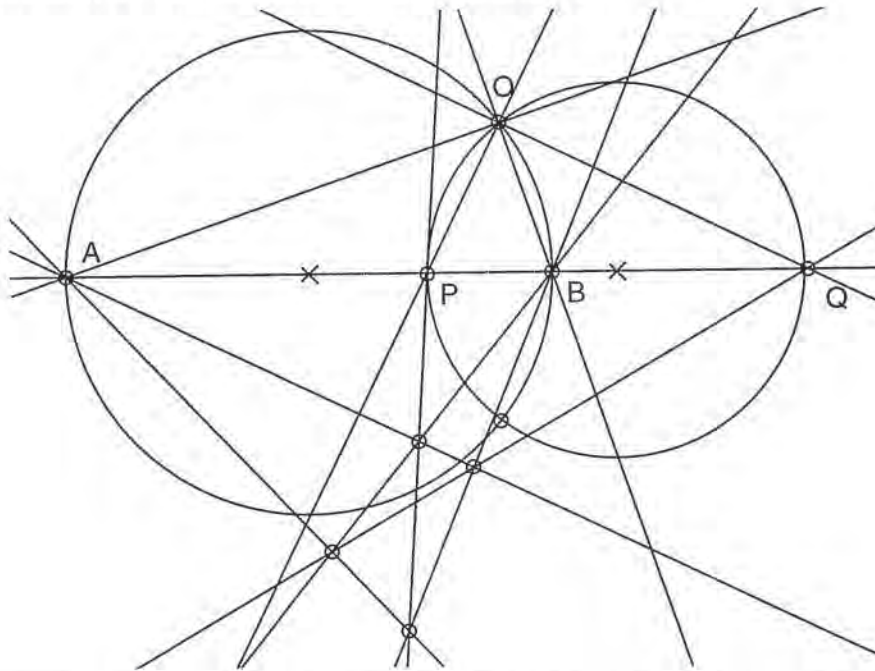
6.6. Das harmonische Teilverhältnis

Es soll nun mit Hilfe der bisherigen Erkenntnisse gezeigt werden, wie die harmonische Teilung als Verhältnis bzw. Doppelverhältnis rechnerisch dargestellt werden kann.

Dies geschieht in zwei Schritten:

1. Wir zeigen: Zu jedem harmonischen Punktewurf gibt es einen Punkt O außerhalb der Trägergeraden, so dass die Verbindungsgeraden zu den vier Punkten paarweise aufeinander senkrecht stehen, d. h. sich jeweils im Winkel von 45° schneiden.

Hierzu zeichnen wir die Thaleskreise über AB und PQ.



Wie man sieht, muss in O ein harmonischer Geradenwurf entstehen; andererseits stehen die vier Geraden paarweise aufeinander senkrecht; wegen der Eindeutigkeit müssen daher alle vier (bzw. acht) Winkel 45° haben.

2. Wir zeichnen diesen speziellen Fall (der sich aber immer herstellen lässt) und beweisen daran mithilfe von ähnlichen Dreiecken die Vermutung aus V.2:

Behauptung: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$;

Beweis: Von Q und P aus werden die Lote auf die Gerade AO eingezeichnet. Die Dreiecke (ALP), (AOB) und (AMQ) sind ähnlich; deshalb sind die Längenverhältnisse auf der Geraden AM gleich denen auf der Geraden AQ.

2. Gegeben seien drei Punkte A, B, C in allgemeiner Lage.
 - a) In wie viele und welche Punktgebiete teilen die Verbindungsgeraden von A, B und C die Ebene (als Punktfeld)?
 - b) Nun sei ein weiterer Punkt D_∞ gegeben. Stellen Sie das vollständige Viereck mit Diagonalkpunktendreieck her und kennzeichnen Sie **einen** entstehenden harmonischen Geradenwurf.
3. Gegeben seien drei Geraden a_1, b_1, c_1 in allgemeiner Lage sowie der Punkt Z und die Gerade z. Zeigen Sie durch Farben in Ihrer Zeichnung
 - a) welche Elemente einer Desargues'schen Konfiguration dadurch festgelegt sind;
 - b) dass es noch mehrere Möglichkeiten gibt, die Desargues'sche Konfiguration zu vollenden (führen Sie zwei verschiedene Möglichkeiten in unterschiedlichen Farben aus und geben Sie jeweils an, welches Element Sie mit welcher Einschränkung der Wahlfreiheit festgelegt haben).
4. Gegeben seien zwei Geraden g und h in allgemeiner Lage; auf g liegen die Punkte S, T, U, auf h liegen S, V, R. Ferner gibt es einen Punkt P, der nicht auf g oder h liegt und mit keinen zwei der anderen gegebenen Punkte auf einer Geraden liegt. – Zeichnen Sie alle möglichen Verbindungsgeraden der Punkte ein und bezeichnen Sie diese; erstellen Sie anschließend die komplette duale Figur.
5. Gegeben seien die Fernpunkte P_∞ und $A_{1\infty}$ (Winkel dazwischen 38°); ferner die Punkte R, C_2 und Z in allgemeiner Lage. Zeigen Sie durch Farben in Ihrer Zeichnung
 - a) welche Elemente einer Desargues'schen Konfiguration dadurch festgelegt sind;
 - b) dass es noch mehrere Möglichkeiten gibt, die Desargues'sche Konfiguration zu vollenden (siehe 3b).
6. Gegeben sei eine Gerade h und auf ihr die Punkte A, B und Q (in dieser Reihenfolge) mit den Maßen $AB = 10 \text{ cm}$, $BQ = 7 \text{ cm}$. Konstruieren Sie den vierten harmonischen Punkt P und prüfen Sie durch Nachmessen und Rechnen nach, ob das Doppelverhältnis $= 1$ ist.
7. Konstruieren Sie vier harmonische Punkte A, B, P, Q so, dass $AQ = 18 \text{ cm}$ und $PQ = 13 \text{ cm}$ ist.
8. Konstruieren Sie einen regelmäßigen Sechsstern (Kantenlänge der Dreiecke $= 5 \text{ cm}$); zeigen Sie, dass die beiden Dreiecke zueinander perspektiv sind, d. h. geben Sie das Zentrum, die Zentrale und die Punkte P, Q, und R an bzw. zeichnen Sie diese ein.

Ein Weg in die projektive Geometrie

Rolf Rosbigalle

1 . Vorbemerkung

Im 10. Schuljahr kann der Heranwachsende, etwa durch die Entdeckung, dass das eigene Denken mit seinen Ergebnissen „auf die Dinge der Erfahrung passt“ (Martin Wagenschein) – siehe Trigonometrie und Landvermessung –, eine gegenüber dem mehr chaotischen Bewusstseinszustand des 9.-Klässlers fortgeschrittene, das Lebensgefühl stabilisierende Gedankenklarheit gewinnen.

Diese kann nun weitergeführt werden zu einer ersten Erkundung des Denkens im Bereich des nicht mehr Vorstellbaren, sondern nur mit dem reinen Denken zu Erfassenden. Hierzu ist, wie in diesem Heft auf vielfache Weise erkennbar wird, **projektive Geometrie** ein geeignetes Mittel.

Die das 11. Schuljahr beherrschende Thematik der Geometrien stellt die Frage nach ihrer zeitlichen Anordnung.

Die erreichte innere Sicherheit und das subjektiv empfundene Befreiungsbedürfnis aus den Fesseln des vorgegebenen Umraumes in diesem Lebensalter lässt es zu, gewissermaßen „frei schwebend“ zu geometrisieren, was im 9. Schuljahr ganz undenkbar wäre und auch noch im 10. Schuljahr mit großer Vorsicht zu behandeln ist.

Andererseits habe ich gelegentlich erfahren, dass eine Geometrie im neu gefundenen, aber doch noch fast leiblich real erlebbaren Koordinatensystem – den Rechts- und Hochwerten, die aus der Koordinatisierung der Winkel- und Längen-Messwerte im Zusammenhang mit der Landvermessung entstehen – Vorstellung und Denken wieder so verfestigen kann, dass danach ein Ergreifen der Grundgedanken der synthetischen projektiven Geometrie wieder schwerer fällt. Daher bevorzuge ich eine Bearbeitung der letzteren eher im ersten Teil des Schuljahres.

Ganz andere Impulse setzen die „Vektorgeometrie im Anschauungsraum“ und die „algebraischen Kurven in Konstruktion und Analyse“, behandelt im Zusammenhang mit der klassischen analytischen Geometrie, die ich immer gern in der zweiten Hälfte des 11. Schuljahres zu zentralen Themen mache.

Der hier gemeinte Gegenstand handelt von Freiheit und Notwendigkeit, von freier Annahme von Ideen und der Prüfung ihrer Sinnhaftigkeit, und das nahezu ohne Vorkenntnisse.

Der Weg führt über das erlebende Tun und das gespannte Selbst-Entdecken, bis sich schließlich in der sich dabei aufdrängenden inneren Folgerichtigkeit notwendige Begriffsbildungen vollziehen, die zu harmonischen Ganzheiten ohne Ausnahmen führen. Und das setzt dann das eigentliche Staunen ein, das sozusagen Erkenntnischarakter hat. (R. Steiner, Konferenzen) Eine dieser Ganzheiten ist die **geometrische Metamorphose**, die über das

Vehikel des Zeichnerischen gedanklich erlebt werden kann und eine exzellente Möglichkeit bedeutet, bewegliches Vorstellen und Denken heranzubilden und eigentlich erst dadurch die Möglichkeit zu entwickeln, Verwandlungsprozesse vollständig zu erfassen...

Ich stelle hier einen Weg in die **ebene** projektive Geometrie ohne eine vorherige räumliche Behandlung dar. In diesem Falle finde ich es erstrebenswert, wenigstens eine Unterrichtseinheit, z.B. in der 12. Klasse, dem Übergang in den Raum zu widmen und ein Erleben und Erfassen der Begriffe von „Raum und Gegenraum“¹ mindestens vorzubereiten. Hierzu bieten die Aufsätze in diesem Heft und mehrere Kapitel in A. Bernhard, Projektive Geometrie, reiche Anregungen, abgesehen von den entsprechenden, sehr weit reichenden Darstellungen z.B. von L. Locher-Ernst, Olive Whicher und George Adams.

Diese Begriffe weisen nach heutigem Stand in zukünftige, neue Betrachtungsweisen auch in den Naturwissenschaften und sind zeitgemäße Denkformen. Hier hat die Waldorfschule eine besondere Erziehungsaufgabe zu leisten, denn kaum eine andere Schulform hebt auf dieses Gebiet ab.

Da selbst die allerwichtigsten Teilgebiete der projektiven Geometrie jeden schulischen Rahmen sprengen, bedarf es einer geschickten und exemplarischen Auswahl für die zur Verfügung stehende 3- bis 4-wöchige² Hauptunterrichtsepoche in der 11. Klasse. Und die Gesamtgestaltung dieser wie jeder Epoche sollte ein rundes Ganzes darstellen, in dem sich das eine sinnvoll zum anderen fügt und am Ende ein überzeugender Gesamtzusammenhang mit Ausblicken aufleuchtet, nicht einfach eine Aneinanderreihung netter Inhalte, die das Mathematikerherz bewegen. – Was die Auswahl nicht leichter macht, aber den Schüler zu überzeugen vermag!

Ich erinnere bei dieser Gelegenheit an die Empfehlungen R. Steiners im 3. Vortrag GA 302 („Menschenerkenntnis und Unterrichtsgestaltung“) zur Verteilung der verschiedenen Phasen des Lernens auf je zwei Hauptunterrichte aufeinanderfolgender Tage und damit der pädagogischen Berücksichtigung der Nacht, die dort für die Fächer Physik und Geschichte beschrieben ist. Deren Umsetzung ist äußerst wirkungsvoll und kann – zusammen mit dem „rhythmischen Teil“ und anderen pädagogischen Maßnahmen – als die eigentliche pädagogische Stärke mindestens der Hauptunterrichtsepochen gelten.³

Hierauf komme ich im Laufe dieser Darstellung vereinzelt zurück.

Mir liegt sehr am Herzen, gerade auch Schüler mit Verständnisschwierigkeiten „mitzunehmen“, so dass sie zumindest die Grundlagen tief verstehen und ihnen die innere Folgerichtigkeit der Sache zu einem Bedürfnis wird. So kann man ein schematisches, konditionierendes Lernen verhindern helfen, was heute so sehr verbreitet ist. Wenn man insgesamt Fülle erzeugt und bis ins hohe Niveau vorstößt, wird sicherlich kein Begabter „unterfordert“.

¹ Siehe andere Beiträge dieser Sammlung und das gleichnamige Buch von L. Locher-Ernst
Weitere Literaturangaben hierzu befinden sich weiter unten

² Laut Lehrplan stehen der Mathematik 8 Wochen Epoche zu, und sie benötigt sie eigentlich auch; selbst wenn dies technisch nicht immer realisierbar ist

³ Siehe hierzu z.B. meinen Aufsatz in „Mathematikthemen für die 9. Klasse“, Kassel 1999

2 . Der Vorlauf im 10. Schuljahr

Die Erfahrung hat mir gezeigt, dass es für eine vertiefte Begriffsbildung im 11. Schuljahr in der Tat sinnvoll ist, im 10. Schuljahr „... die ersten Elemente der Lagengeometrie ...Begriffe von der Dualität...nur die aller ersten Dinge beizubringen“⁴. Allerdings vermeide ich es, von „Unendlichkeiten“ zu sprechen (s.u.), und lasse Ausnahmen gelten; eine diesbezügliche, begrifflich klare Behandlung habe ich in dieser Klassenstufe immer als aufgesetzt und verfrüht erlebt (so etwa, als ich die Epoche „projektive Geometrie“ auf Grund des Hinweises von Fachkollegen vor Jahren noch im 10. Schuljahr unterrichtete).

An dieser Stelle schildere ich einen dazu gehörenden, möglichen Unterrichtsgang in aller Kürze; ein ähnliches Vorgehen mit anderem Gegenstand ist weiter unten in aller Ausführlichkeit geschildert.

(Ohne diesen Vorlauf wird man das Folgende in der 11-Klass-Epoche behandeln, siehe dort.)

Dazu habe ich, meistens in Übstunden im letzten Teil des 10. Schuljahres, an geeigneter Stelle den **Satz von Pascal**⁵ (zunächst auf den Kreis beschränkt) durch eine Konstruktionsaufgabe bekannt gemacht:

- Wähle 6 Punkte auf einem beliebigen Kreis
- Nummeriere die Punkte willkürlich durch
- Verbinde diese in der nummerierten Reihenfolge und erhalte auf diese Weise ein Sechseck mit den Seiten 12, 23, 34, 45, 56, 61
- Schneide die verlängerten „Gegenseiten“ 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 miteinander
- Was fällt auf?

Nun können eigenständig vielfältige Konstruktionen hergestellt werden (siehe Anhang), und für den leichteren Einstieg sind Arbeitsvorlagen vorbereitet. Diese werden zumindest mit einem Kreis versehen, damit das Unterfangen jedenfalls nicht am fehlenden Zirkel scheitert. Hat man dann aus der Fülle der aushängenden Konstruktionsblätter im Gespräch die Entdeckungen (nicht unwichtig auch die erstmalig auftretenden ungewöhnlichen, „uneuklidischen“ Sechsecke!) gesammelt, so kommt man – eventuell erst in der nächsten Übstunde – etwa auf die Formulierung:

Wenn die Ecken eines Sechsecks einem Kreis angehören,
dann liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden.

AUSNAHME: mindestens ein Paar Gegenseiten ist parallel.

⁴ R. Steiner, Konferenz am 17.06.1921. Siehe auch die Konferenz am 11.09.1921. Beide Angaben dort betreffen das 10. Schuljahr

⁵ Siehe zu diesem Kapitel die angegebene Literatur und andere Beiträge dieser Sammlung

Danach wird in entsprechender Weise der **Satz von Brianchon** veranlagt, den man versucht, analog formulieren zu lassen:

Wenn die Seiten eines Sechsecks einem Kreis angehören⁶,
dann schneiden sich die Verbindungsgeraden der Gegenecken in einem Punkt.

AUSNAHME: mindestens zwei Verbindungsgeraden sind parallel.

Durch Gegenüberstellung der beiden Sätze (eventuell in der dritten Übunde, mit Wiederholung des Bisherigen) fällt das auf, was wir Dualität nennen (s.u.) und was wir dann auch als eine zentrale „plausible Vermutung“ formulieren.

Eine Erweiterung und Vertiefung erfährt der Pascal-Satz durch Übertragung auf Ellipse, Parabel und Hyperbel, was sich mit Hilfe der Konstruktionen der Pascal-Konfiguration auf mit diesen Kurven versehenen Arbeitsbögen erkunden lässt; das wird von den Schülern als sehr spannend erlebt. – Gilt diese Erweiterung über den Kreis hinaus dann auch für den Satz von Brianchon? – und in der Tat, das belegt unsere Vermutung, dass die „Dualisierung“ eines richtigen Satzes richtig sein muss – wenn man die Ausnahmen wegdenkt!

Außerdem sollte durch einige Zeichnungen plausibel werden, dass der Satz nicht gilt, wenn die Eckpunkte nicht auf einer der 4 Kurven liegen. (Ich vermeide den Begriff „Kegelschnitt“, sofern die Schüler diese Kurven nicht durch die Schnitte eines Kegels mit einer Ebene kennen gelernt haben.)

Kommt man jedenfalls so weit, so ist ein Keim gelegt für das später Folgende.

Man sollte eher verhindern als betreiben, dass schon an dieser Stelle irgendwie (und es ist eben meistens ein aufgeschnapptes und nachgeplappertes „Irgendwie“) von „unendlich fernen Punkten“ und „der Unendlichkeit“ usw. geredet wird, denn das Denken ist meist noch nicht so weit, das „Unendliche“ aufzufassen; es kann hier nur eine (eben deswegen falsche) Vorstellung sein.

3 . Der erste Epochenteil im 11. Schuljahr

Mehrfach bin ich den **Weg über die Zentralprojektion** gegangen:

1. Betrachtung historischer Abbildungen, Bemerkungen zur Entdeckung der Gesetzmäßigkeiten der Perspektive, Leonardo, Dürer
2. In zeichnerischem Entwickeln nacheinander „Zentral-Projizieren“, „Wachsende Dreiecke“, „Niederbrennende Kerze – zentriert-linierte Kollineation“, „Geometrische

⁶ Tangenten „gehören einem Kreis an“, Sekanten nicht, das scheint plausibel; durch die geeignete Konstruktionsvorschrift lässt sich diese sinnvolle Formulierung vorbereiten

Metamorphose“, „Satz von Desargues“, usw., etwa im Sinne der Aufeinanderfolge der Kapitel: (evtl. 11 vorweg), 3, 4, 5, 12, laut A. Bernhard⁷.

3. Hier schließen sich viele Möglichkeiten des weiteren Vorgehens an. (s.u.)

Ein Nachteil besteht darin, dass der Schritt vom ausführlich geübten Zentral-Projizieren zur ausschließlichen Betätigung in der Ebene (zentriert-linierte Kollineation) zumindest bei schwächeren Schülern die Gefahr in sich birgt, dass sie leicht wieder in die räumliche Anschauung zurückfallen.

Dieses Vorgehen hat sich bewährt und ist vergleichsweise wenig riskant im Sinne der Unterrichts- und Gesprächsführung, und es lässt sich gut an Alltagserfahrungen und z.B. Kenntnisse aus dem Malen und Zeichnen anknüpfen.

Im Folgenden schildere ich **einen anderen ökonomischen Weg**, der zunächst eine gewisse Fülle ebener geometrischer Erfahrungen schafft und der sich aus einem gewissermaßen freien geometrischen Tun heraus entwickelt und Schüler unterschiedlichster Couleur in einen experimentell-schöpferischen Prozess hinein zieht und urteilsfähig macht. Hieraus drängt sich dann gewissermaßen notwendiger Weise die Begriffsbildung auf.

Um auch Berufsanfängern gerecht zu werden, bemühe ich mich um eine Darstellung eng an einem von mir praktizierten möglichen Ablauf des Unterrichts mit Detail-Hinweisen, um den späteren Gang nur noch in großen Zügen und mit Hinweisen auf bereits vorliegende methodische Ausarbeitungen zu skizzieren.

4 . Zwei Dreiecke in Beziehung

Ist dies **die erste Hauptunterrichtsepochenstunde**, so benötigt man nach dem rhythmischen Teil zunächst leere Tischoberflächen und stille Aufmerksamkeit. Ist das eingetreten, so könnte man so vorgehen, dass der Lehrer stumm zwei Dreiecke an die Tafel zeichnet, dabei die Seiten zunächst als Strecken (siehe etwa Arbeitsbogen 1)⁸. Er bezeichnet die Ecken mit A, B, C bzw. A', B', C'. Dann verbindet er andersfarbig entsprechende Ecken über die ganze Tafel hinweg; aus den Geraden AA', BB', CC' entsteht ein *Dreiseit*, denn es ist ja aus Seiten gebildet. Nun verlängert er die Seiten der Dreiecke über die ganze Tafel hinweg; die Schnittpunkte gleichbenannter Seiten bilden ein *Dreieck*, denn es ist aus Ecken gebildet. Er wiederholt stumm die Konstruktion an der Nebentafel mit denselben, in der gegenseitigen Lage leicht veränderten Ausgangsdreiecken.

⁷ A. Bernhard, Projektive Geometrie, Stuttgart 1984

⁸ Zum Erreichen der gewünschten Konfiguration überlegt er sich vorher, wie diese Dreiecke liegen müssen; dazu macht er sich bei Bedarf vorher unauffällige Zeichen an die Tafel. Fortsetz. nächste S. Überhaupt wird der Anfänger, selbst wenn er sich strukturell in der projektiven Geometrie auskennt, sehr viel üben müssen, bis er sich konstruktiv frei in ihr bewegen kann und die Konfiguration voll überblickt, gewissermaßen darin lebt.

Für die nachfolgende zeichnerische Experimentierphase in „stiller“, selbstständiger Arbeit verteilt der Lehrer, was als „Anschub“ für viele Schüler günstig ist, einen Arbeitsbogen mit zwei geeignet gewählten Dreiecken und bezeichneten Ecken und regt an, durch Verwandlung der Ausgangsdreiecke (in Lage oder Form) auf neuen Blättern andere *Paare Dreiseit – Dreieck* zu erhalten. Man einigt sich zur besseren Überschaubarkeit auf jeweils einheitliche Farbgebung von *Dreiseit* und *Dreieck* und der Ausgangsdreiecke. Hierbei bekommt man die Konfiguration⁹ häufig nicht aufs Blatt; DIN A 3 – Format Kopierpapier erleichtert vieles und hilft bestimmte „unnötige“ Probleme, weil Nebenschauplätze, vermeiden. Es tritt schnell die Frage auf, ob es, wenn nicht mehr auf dem Blatt, so jedenfalls irgendwo weiter weg Schnittpunkte gibt, was man schnell entscheiden kann, und manchmal gibt es eben auch Parallelitäten, und die massenweise. Aber die sind „viel seltener“ als Schnitte. Und man wird sich daher bemühen, die Konfiguration so zu gestalten, dass sie aufs Blatt passt.

Fertige Zeichnungen können nun gleich nach der Entstehung dicht beieinander an die Wände gehängt werden. Nach einiger Zeit ist eine Fülle von mindestens einigen zig Konfigurationen entstanden. Manche Schüler lassen sich von ihren eigenen Zeichnungen verwirren und „sehen nichts mehr“ (*Dreiseit* und *Dreieck* nicht), und der Aushang hilft ihnen, wieder zu „sehen“, er spricht für sich. Einzelne Schüler entdecken sehr schnell Charakteristika der Wandlung. Man wird zu ihnen gehen, sofern sie nicht selbst fragen, und Anteil nehmen, sie fragend bestätigen, zu weiteren Erkundungen leiten, etwa: – geht das bei zwei Vierecken auch? Probieren Sie mal! aber nichts verraten! – Die jungen Menschen müssen sich jetzt verstanden fühlen, sonst ist der Lehrer nicht vorbereitet. Kreatives Gemurmel und sachbezogene Verständigung mit Nachbarn sollte man nicht zu unterbinden versuchen.

Nachdem die Fülle reichhaltig genug scheint, kann man die restlichen Zeichnungen aushängen lassen, stellt sich gemeinsam davor hin und lässt miteinander seinen Blick auf allem ruhen. – Was fällt auf? – Man sammelt nun die Beobachtungen; alle sind nützlich, auch die scheinbar wertlosen, auch die eher falschen. Vieles korrigiert sich, korrigieren die Schüler gleich selbst, und der Lehrer versucht alles Gesagte so zu verstehen, wie es wohl gemeint war. Fachsprache ist noch nicht verlangt. Man lässt zusammenfassen, man lässt an der Tafel im mittleren Teil kladdenartig notieren, – was ist wesentlich, was vielleicht eher zufällig? – müssen wir die Zeichnungen anders hinhängen, welche passen zueinander, welche nicht? – gegebenenfalls lässt man Zeichnungen zueinander hängen, möglicherweise als eine Entwicklungsreihe – man regt eine Art exaktes Gefühl an. Man folgt einfach den Ideen, die sich äußern, und der Lehrer moderiert geschickt. Es spitzt sich auf eine höchst merkwürdige Entdeckung zu, denn egal wie die Anfangsdreiecke gewählt wurden:

⁹ dieser Begriff meint die figürliche Zusammenstellung von geometrischen Elementen mit gewissen Inzidenzeigenschaften. (Siehe auch: Lexikon der Schulmathematik, Köln 1980)

Je kleiner (punktförmiger) das *Dreiseit* wird, umso flacher (linienförmiger¹⁰) wird das *Dreieck*. Und umgekehrt genauso.

(So oder ähnlich fallen die Formulierungen der Schüler aus, und der Lehrer nimmt sie an, lässt sie auf Wunsch verbessern, und presst nichts Eigenes hinein.)

Dieser hervorgehobene Satz kann nun, sofern alles so angeordnet wurde wie beschrieben, an der Tafel im unteren Drittel fixiert werden. Im oberen Teil der Tafel würde dann noch, außer der Überschrift „Zwei Dreiecke in Beziehung“ notiert werden können, wie wir vorgegangen sind.

Allerdings hat man oft gar kein *Dreiseit* oder *Dreieck* auf einem noch so großen Blatt Papier; Parallelitäten verhindern das. Und doch scheint die Entdeckung eindringlich genug, als dass uns Ausnahmekonfigurationen davon abbringen könnten.

Die Aufgabe zum nächsten Hauptunterrichtstag kann darin bestehen, dass sich jeder eine eigene, aber wirklich stringente Entwicklungsreihe aus etwa 8 bis 10 Zeichnungen zielgerichtet konstruiert und zusammenstellt, die auf die oben formulierte Kernaussage zuläuft. Man beginnt damit noch in der verbleibenden Unterrichtszeit.

Eine Beschreibung der Konstruktionsvorschrift durch Schüler beseitigt etwaige Unklarheiten und zieht die restlichen Schüler in den Prozess hinein. Ein nachfolgender Vergleich der beiden Konfigurationen lenkt das Augenmerk darauf: Was hat sich verändert? Wie könnte man weitere Veränderungen der Anfangsdreiecke vollziehen? Kann man jeweils vorausahnen, was sich bei diesen Veränderungen dann für die Gesamtfigur ergibt? Nun, das muss man wohl ausprobieren!

Am Ende des rhythmischen Teils des **zweiten Hauptunterrichts** kann man nun die folgende recht gebräuchliche Vorstellungsübung machen, die ein Schüler einmal so beschrieb (wird als Hausaufgabe gestellt):

„Man stelle sich eine feste waagerechte Gerade vor, die von einer drehbar gelagerten Geraden in gleicher Ebene zunächst senkrecht geschnitten wird. Dreht man nun letztere Gerade, so wandert ihr Schnittpunkt. Tritt nun die Situation ein, dass die Geraden fast parallel sind, so liegt ihr Schnittpunkt zwar sehr weit weg, doch er wäre rechnerisch noch zu erfassen (besser: in der Vorstellung noch zu erfassen; der Autor). Wird in dieser Lage die drehbare Gerade nur um einen sehr kleinen Winkel gedreht, so bewegt sich der Schnittpunkt ein sehr großes Stück. Dreht man die Gerade weiter, bis beide Geraden parallel sind, so gibt es keinen Schnittpunkt mehr, aber beim Weiterdrehen entsteht sofort wieder ein Schnittpunkt, der aber jetzt auf der entgegengesetzten Seite liegt...“

Man hat auf diese Weise die Schüler wach im Kopf und gleichzeitig eine sachgemäße Überleitung zum Betrachtungsteil. (Siehe auch den Aufsatz von S. Sigler)

¹⁰ ich lasse zunächst „Linie“ und „Gerade“ als Synonyme gelten

– An welche Situationen von gestern erinnert uns das? – Und das Gespräch sammelt und vertieft das gestern Getane und Entdeckte. – Was lag eigentlich vor am Ende der Entwicklungsreihe?

Am Ende hatten wir zwei Dreiecke, deren Verbindungsgeraden der Paare entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt laufen, und daraufhin liegen die Schnittpunkte der (verlängerten) Seiten auf einer Geraden.

Aber wir können es auch umgekehrt aussprechen, denn in den Zeichnungen trat beides gleichzeitig miteinander ein. Und wir müssen die Ausnahmen berücksichtigen.

Nun können wir eine rollbare Tafel benutzen, an der bereits die gestrige Formulierung steht und der wir die oben angegebene Formulierung hinzufügen und nach Schülervorschlag verfeinern; auch Alternativen werden erbeten und ebenso notiert. Der Lehrer macht schließlich auch einen Vorschlag; einen, den Arnold Bernhard oft verwendet und der den Schülern gut gefällt:

Sind zwei Dreiecke zentriert, so sind sie auch liniert, und umgekehrt.

Diese Formulierung ist wunderbar. Dennoch basteln wir auch noch an der bereits an der Tafel stehenden weiter, bis der Lehrer – er lässt sie sich diktieren – schließlich eine sehr harmonische Formulierung an die Tafel schreiben kann (s.u.), und zwar in von ihm gewollter Anordnung, zunächst nur die linke Hälfte. Die rechte Hälfte könnte ein Schüler hinzufügen, was ihm zumindest mit Hilfe anderer auch gelingt. Da darf ruhig auch mal dazwischen gerufen werden.

(Tafelbild:)

Uns drängt sich folgende Vermutung auf:

„Satz von Desargues“

und aber auch

anders herum:

Gehen
die Verbindungsgeraden
entsprechender Ecken
zweier Dreiecke
durch einen Punkt,
so
liegen
die Schnittpunkte
entsprechender Seiten
auf einer Geraden,

Liegen
die Schnittpunkte
entsprechender Seiten
zweier Dreiecke
auf einer Geraden,
so
gehen
die Verbindungsgeraden
entsprechender Ecken
durch einen Punkt,

außer es kommen PARALLELITÄTEN vor.

Auf eine sehr eindringliche Weise können die Schüler jetzt von der Sache selbst auf etwas gestoßen werden; hier spricht sich der Kern der Sache selbst aus:

hat als Gegenüber

gehen...	liegen...
... durch	... auf
liegen...	gehen...
... auf	... durch
Verbindungsgeraden	Schnittpunkte
Schnittpunkte	Verbindungsgeraden
Ecken	Seiten
Seiten	Ecken
Punkt	Gerade
Gerade	Punkt

Es liegt also eine eigenartige Symmetrie von Begriffspaaren vor, die bei Vertauschung die „Hälften“ des Tafelbildes ineinander übergehen lässt.

Dieses wird man im Gespräch aus dem Tafelbild entwickeln und ebenfalls an der Tafel fixieren.

Man hat jetzt angenehmer Weise einige Tatsachen dauerhaft auf einer verschiebbaren „Merktafel“ festgehalten und kann diese so genau in einem späteren, richtigen Moment wieder ins Spiel bringen (s.u.).

An der üblichen zentralen Tafel befindet sich bereits, vom Lehrer gestern oder heute früh vorgefertigt, eine schöne und gut durchschaubare **Desargues-Figur**, d.h. lediglich die Punkte und Geraden. (Dieselbe Figur kann der Lehrer auch als Overhead-Folie schon auf dem bereitstehenden Projektor vorbereitet haben, s. u.) Was liegt da eigentlich vor? Welche Eigenschaften hat sie? Im Folgenden wird gesprächsweise herausgearbeitet¹¹:

- Sie besteht aus 10 Geraden und 10 Punkten
- Auf jeder Gerade liegen 3 Punkte,
durch jeden Punkt gehen 3 Geraden
- Jede Gerade kann die Rolle der Achse,
jeder Punkt die Rolle des Zentrums übernehmen
- Ist das Zentrum oder ist die Achse einmal gewählt, so ergibt sich die zugehörige Konfiguration eindeutig.

¹¹ siehe dazu ausführlich z.B. A. Bernhard, L. Locher-Ernst und andere bzw. die anderen Ausarbeitungen dieses Heftes

Nun kann das „Sehen der Dreiecke“ wie folgt geübt werden:

Ein Schüler geht an die Tafel und legt einen der 10 Punkte als Zentrum fest. Nun versucht er aus der Figur die damit eindeutig festgelegte Konfiguration zu bilden. Er sucht also die beiden Dreiecke und die Achse und markiert sie. Dazu gilt es richtig zu kombinieren, und die beobachtenden Mitschüler sind genauso intensiv am Mitdenken, geben bei Bedarf Hinweise, der Lehrer ist hier nur Moderator.

Im Weiteren bietet sich zum Beispiel die folgende Vorgehensweise an:

Das Tafelbild wird gelöscht, der Projektor wird angeschaltet, und die projizierte Desargues-Figur (schwarz auf Folie) erscheint immerhin noch so deutlich auf der grünen Tafel, dass man den obigen Vorgang mit einem anderen Zentrum vollzieht. Dieser für die Schüler durchaus spannende Prozess kann, je nach eingeschätztem Bedarf und zur Verfügung stehender Zeit (s.u.) und mit wechselnder Schüler-Lehrer-Aktivität, mehrmals oder sogar bis zum vollständigen Ende weitergeführt werden.

Ca. eine halbe Stunde sollte aber noch für die nachfolgende Stillarbeit bis zum Ende des Hauptunterrichts zur Verfügung stehen. Sie muss nicht unbedingt dem Notieren des Tafelanschiebs dienen, denn der wird möglicherweise jeweils von einem geeigneten Schüler „druckreif“ hergestellt und bei Bedarf kopiert und verteilt. Vielmehr können an dieser Stelle vier verschiedene Desargues-Figuren als Vorlage-Arbeitsbögen (siehe Anhang) verteilt werden, dabei vom ersten gleich 10 identische Kopien an jeden Schüler, damit dieser gleich den Arbeitsauftrag umsetzen kann, zur ersten Figur alle 10 möglichen Konfigurationen zu entwickeln. Für die anderen drei Bögen (mit wachsendem Schwierigkeitsgrad) kann er je 10 identische Exemplare per Durchlochen selbst herstellen. Eine mögliche Hausaufgabe besteht darin, mindestens drei der vier Konfigurations-Sätze fertig zu stellen.

Durch diese Schulung des Sehens kann eine „Einwurzelung“¹² in diesen für die Geometrie so wichtigen Satz stattfinden.

Übrigens tun sich enorme Unterschiede in der Fähigkeit des „Sehens“ auf, und sie ist nicht unbedingt gekoppelt an die mathematische Begabung des einzelnen. Oft finden gerade Schüler, die sich sonst im Mathematischen schwer tun, hier einen sicheren Zugang. Und Erwachsene, die sich das erste Mal hiermit beschäftigen, haben oftmals größte Schwierigkeiten, „Konfigurationen zu sehen“.

Folgendes ist im Sinne einer Vollständigkeit unserer Denkbewegungen unbedingt wichtig zu behandeln, und ich tue das in den zur Epoche parallel laufenden Übstunden, um den Bogen der längs der Epochenstunden laufenden Gedanken nicht zu sehr zu überspannen: Der Satz von Desargues handelt von der gleichzeitigen Zentriertheit und Liniertheit von Dreiecken. Daher ist noch die Frage zu provozieren, sofern sie nicht ohnehin von einem Schüler kommt:

¹² Peter Buck, *Einwurzelung und Verdichtung – Tema con variazione über zwei Metaphern Wagenscheinscher Didaktik*, Dürnau 1997

– Wer sagt denn, dass das nicht für Vierecke oder überhaupt für Vielecke ebenfalls gilt? Denn was ist der Satz sonst wert? – Diesem sollte man durch Konstruktionsübungen forschend nachgehen, wie es beispielhaft etwa bei A. Bernhard in Kap. 17 dargestellt ist. (Siehe auch den Übungsbogen im Anhang.) Hierdurch tritt eine deutliche Vertiefung des Verständnisses ein, und wie auch sonst im hier Dargestellten, geht der Weg zur Erkenntnis übers Selbst-Tun. Erst dann entwickelt sich eigentliches Können.

Wie weit sind wir jetzt? Wir nehmen bewusst keine Setzungen von Fernelementen vor, solange nicht die Situation uns wirklich nahe legt, ja drängt, etwas zu tun, damit die vielen Ausnahmen und Sonderfälle uns die gefundenen Ideen und Zusammenhänge nicht ständig in Frage stellen.

Haben wir nun den Vorlauf im 10. Schuljahr gehabt (s.o.), so ist es günstig, an dieser Stelle, also **im nächsten Hauptunterricht**, die Sätze von Pascal und Brianchon wieder wachzurufen. (Ist dieser Vorlauf nicht gewesen, so sollte man den nachfolgend beschriebenen Unterrichtsabschnitt, z.B. nach dem Muster des Satzes von Desargues (s.o.), deutlich ausführlicher inszenieren.)

Nach Aufgreifen des Gestrigen und Wiederholen/Abfragen aller im Zusammenhang mit dem Satz von Desargues erarbeiteten Sachverhalte könnte man wie folgt vorgehen: Der Lehrer schlägt die Tafelflügel zurück, und links außen sieht man eine Pascal –, rechts außen eine Brianchon-Konfiguration. Man lässt einige weitere Konfigurationen beider Sätze in der Tafelmitte entwickeln und bindet dabei die Schüler fragend ein, so dass ihnen der Gegenstand wieder gegenwärtig ist. Nun entwickelt man miteinander die verbalen Formulierungen der beiden Sätze und notiert sie nebeneinander in der vorher gelöschten Tafelmitte:

Wenn die Ecken
eines Sechsecks
einem Kreis angehören,
dann liegen
die Schnittpunkte
der Gegenseiten
auf einer Geraden.

AUSNAHME:

mindestens ein Paar Gegenseiten
ist parallel.

Wenn die Seiten
eines Sechsecks
einem Kreis angehören,
dann schneiden sich
die Verbindungsgeraden
der Gegenecken
in einem Punkt.

AUSNAHME:

mindestens zwei Verbindungsgeraden
sind parallel.

Hier können wir nun an die „eigenartige Symmetrie“ (s.o.) des Satzes von Desargues anknüpfen und finden diese hier wieder – jedenfalls dort, wo wir nicht die besagten Ausnahmen vorliegen haben.

Wir können also alle zueinander gehörenden Begriffe eines richtigen geometrischen Satzes paarweise vertauschen und gewinnen wiederum einen richtigen geometrischen Satz!

Und das nennt man das **Prinzip der Dualität in der Ebene**.

Olive Whicher nennt das die Urbeziehung der Elemente der Ebene:

Die Linie verhält sich zum Punkt wie der Punkt zur Linie.

Gehen wir zur denkbar einfachsten geometrischen Situation zurück:

Der Lehrer markiert zwei Punkte auf der Tafel und verbindet sie mit einer Geraden. – Wie viele Geraden gibt es? – Na, genau eine! – Wie können wir diesen Sachverhalt ausdrücken? –

1) Zwei Punkte haben genau eine Verbindungsgerade.

– Und die hierzu duale Aussage?

2) Zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

– Naja, außer sie sind parallel.

– Dann gilt also all die schöne Dualität nur mit Ausnahmen?

– Was müsste man tun, um diese beiden Grundtatsachen wirklich dual zu haben?

– Könnte man sich zu zwei parallelen Geraden einen Punkt dazu denken? Welche Bedingungen müssten dann erfüllt sein?

(Obiges simuliert nicht unbedingt das wünschenswerte Frage-Antwort-Gespräch Lehrer-Schüler, es zeigt nur den Gedankengang, der sich in einem Austausch ergeben kann; man beachte, dass das Erwachen geistiger Kräfte sich im Gespräch vollzieht.)

Das kann jetzt an all den Konfigurationen durchgespielt werden, die ja noch von den ersten beiden Hauptunterrichten an den Pinnwänden hängen oder sich noch an Tafeln befinden; ebenso an der oben beschriebenen Vorstellungsübung, und man erarbeitet miteinander die neuen Begriffe: den zu jeder Schar paralleler Geraden gehörenden gemeinsamen Punkt, und zwar zu jeder Schar ein eigener, verschieden von dem einer anderen Schar; seine Eindeutigkeit; die Vereinbarkeit mit 2); aber nun die Notwendigkeit, wegen der verlangten Vereinbarkeit mit 1), zu allen diesen neu hinzugedachten Punkten eine Verbindungsgerade hinzuzudenken, und zwar genau eine. (Siehe das Übersichts-Blatt aus einem Schülerheft auf Seite 212.)

Nun hat sich ergeben, dass wir in aller **Freiheit** eine Setzung vollzogen haben, die uns allerdings ein unbefriedigender Sachverhalt, nämlich die Störung der inneren Symmetrie eines geometrischen Satzes (des selbstdualen S. v. D.) bzw. derjenigen zweier harmonisch zueinander gehöriger Sätze, nahegelegt hat. Und diese Setzung unterliegt der **Notwendigkeit**, ihre Vereinbarkeit mit den bisherigen Phänomenen des Schneidens und Verbindens zu erweisen. Dies ist der Fall, und es tut sich immerhin die Perspektive auf, aus einem als gültig erkannten Satz durch Dualisierung einen neuen, daraufhin ebenfalls gültigen Satz zu finden. Letzteres kann man nun wunderbar mit dem **Satz von Pappos** tun. Man lernt ihn zunächst konstruierend in seinem vielfältigen Erscheinungsbild kennen, um dann den dualen Satz

verbal zu entwickeln und durch Konstruktion zu sehen, dass und was sich für ein wunder-schöner neuer richtiger Satz ergibt. (Siehe die folgenden Seiten, sie stammen aus Epochen-heften.)

Nun werden die Schüler sich nicht nur daran freuen wollen, sondern unter anderem die Fra-ge aufwerfen, was man denn damit noch machen könne. Eine Antwort im engeren Sinne gibt die Tatsache des **Entstehens von Hüll-Kurven zweiter Ordnung aus dem Satz von Pappos und von Punktkurven zweiter Ordnung aus dem Satz von Pappos, duale Form:**

Dieser Satz (siehe S.1 des Schüler-Heftes) steht im großen Zusammenhang des Fundamen-talsatzes¹³. Setzt man die Pappos-Konstruktion fort, indem man einem weiteren, frei gewähl-ten Element sein entsprechendes zuordnet und dann dieses Elementepaar verbindet bzw. sich schneiden lässt, so entsteht als Hüllkurve bzw. Punktkurve ein Kegelschnitt. (Siehe die S. 2 und 3 des Schülerheftes)

Das finden die Schüler sehr faszinierend, auch im Zusammenhang mit den vielfältigen ande-ren Entstehungsweisen dieser Kegelschnittskurven, die sie früher kennen gelernt haben.

Hier erschließt sich ein umfangreiches Übungsfeld, eine Abenteuersuche der Entdeckung der verschiedenen Kegelschnittskurven, je nach Anordnung der Grundelemente der Pappos-Figur. Es empfiehlt sich für den Lehrer, vielfältige Vorlage-Bögen herzustellen, die die jewei-lige Kurve harmonisch auf dem Blatt entstehen lassen¹⁴, denn es ist für den Schüler frustrie-rend, immer wieder erleben zu müssen, dass er bei frei gewählter Anordnung das Eigentliche nicht mehr aufs Blatt bekommt, auch wenn man jetzt grundsätzlich mit DIN A 3 - Format arbeitet.

All das lässt sich an dieser, aber auch an einer späteren Stelle des Epochenganges behan-deln.

5 . Weiterer Gang der Epoche und Ausblick

Wie auch immer man es handhabt, es gibt noch einen anderen Zusammenhang, in dem die Hinzunahme der Fernelemente sich als äußerst schlüssig erweist, und das ist die lückenlose Verwandlung von Figuren der Ebene in sich. Das Ziel ist die **Geometrische Metamorpho-se**.¹⁵

Der Weg dorthin geht z.B. über die vollständige Verwandlung eines Dreiecks in der Ebene (siehe etwa A. Bernhard, Kap. 12, ab S.47, nur noch in der Horizontalebene betrachtet!), wobei es nicht notwendig, aber reizvoll ist, in diesem Zusammenhang die zentriert-linierte

¹³ Siehe hierzu L. Locher-Ernst, Projektive Geometrie, Dornach 1980², S. 95f und S.122f, ebenfalls Olive Whicher, Projektive Geometrie, Stuttgart 1970, S. 80ff

¹⁴ Eine höchst anregende, streckenweise sehr anspruchsvolle Sammlung vielfältigster Konstruktio-nen stellt das Buch von Angelo Andes Rovida, Übungen zur synthetischen projektiven Geometrie, Dornach 1988, dar

¹⁵ Eine bewährte didaktische Aufbereitung hierzu liegt vor in A. Bernhard, Projektive Geometrie, Stuttgart 1984

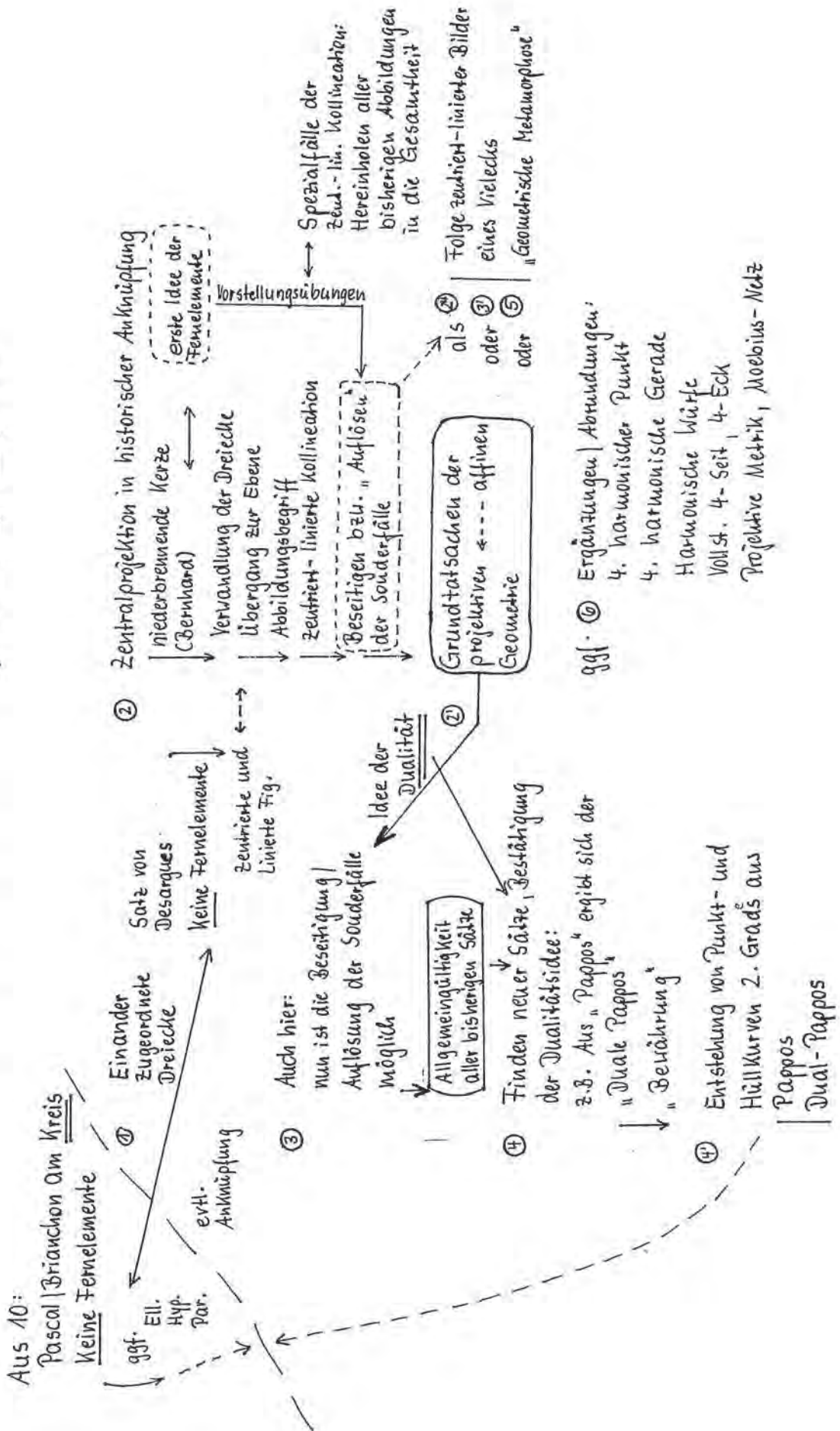
Kollineation als „bewegendes Mittel“ einzuführen und ihre Eigenschaften sorgfältig zu besprechen (siehe z.B. A. Bernhard, Kap. 15). Von hier aus lassen sich vielfältige Verbindungen zum bisher Behandelten auffinden, was sich sehr eindringlich etwa am Satz von Desargues zeigt.

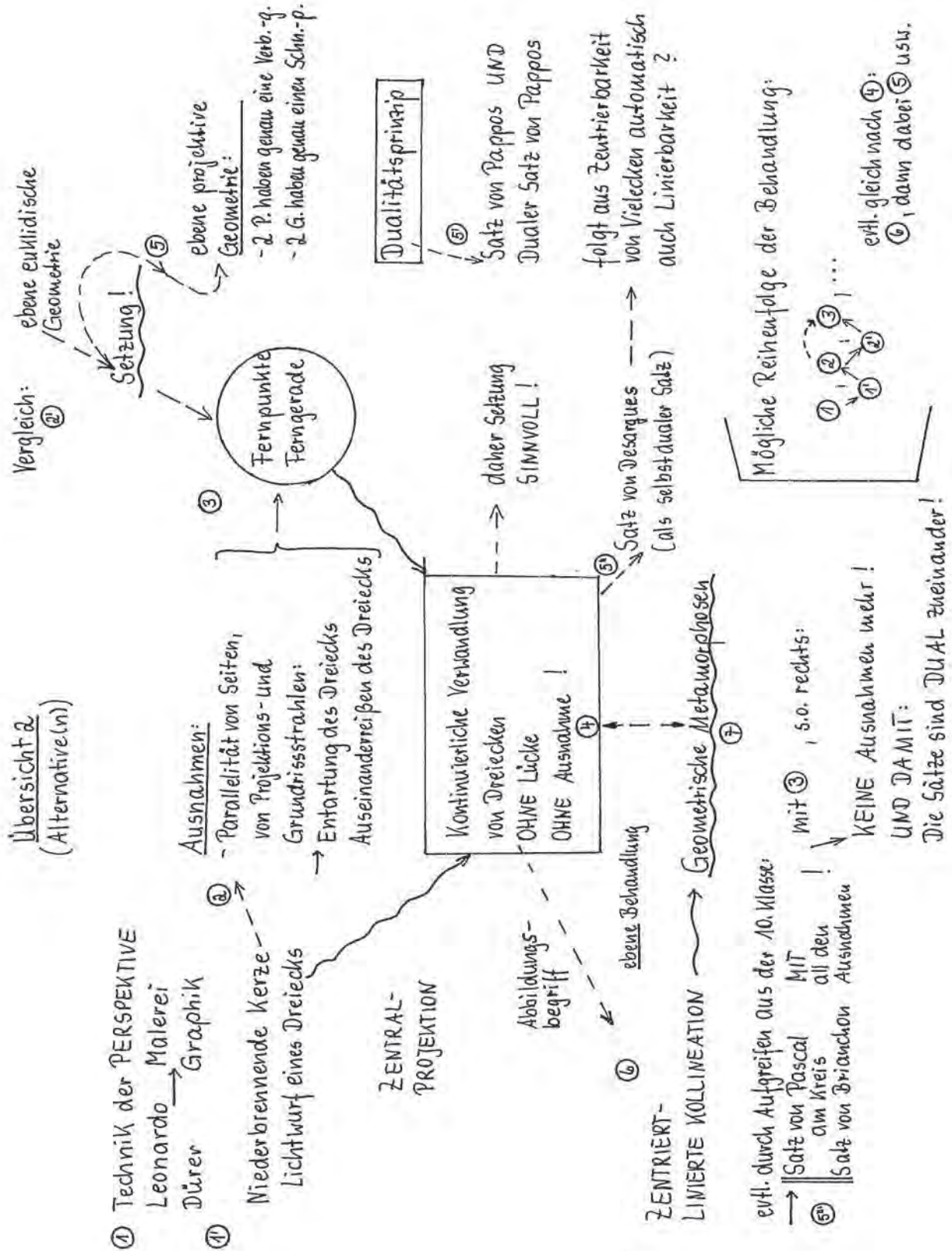
Weitere Möglichkeiten im Gang der Epoche, aber auch Alternativen in der Anordnung von Inhalten zeigen die beiden folgenden Übersichten. Hieran wird einerseits deutlich, dass man das Vorgehen flexibel am jeweils sich im Unterrichtsprozess entwickelnden Gedankengang orientieren kann, andererseits die Epoche auf vielfache Weise zu einem runden Ganzen gestaltet bekommt.

mögliche Reihenfolge des Vorgehens
 ①, ②, ②, ③, ③, ④ usw.

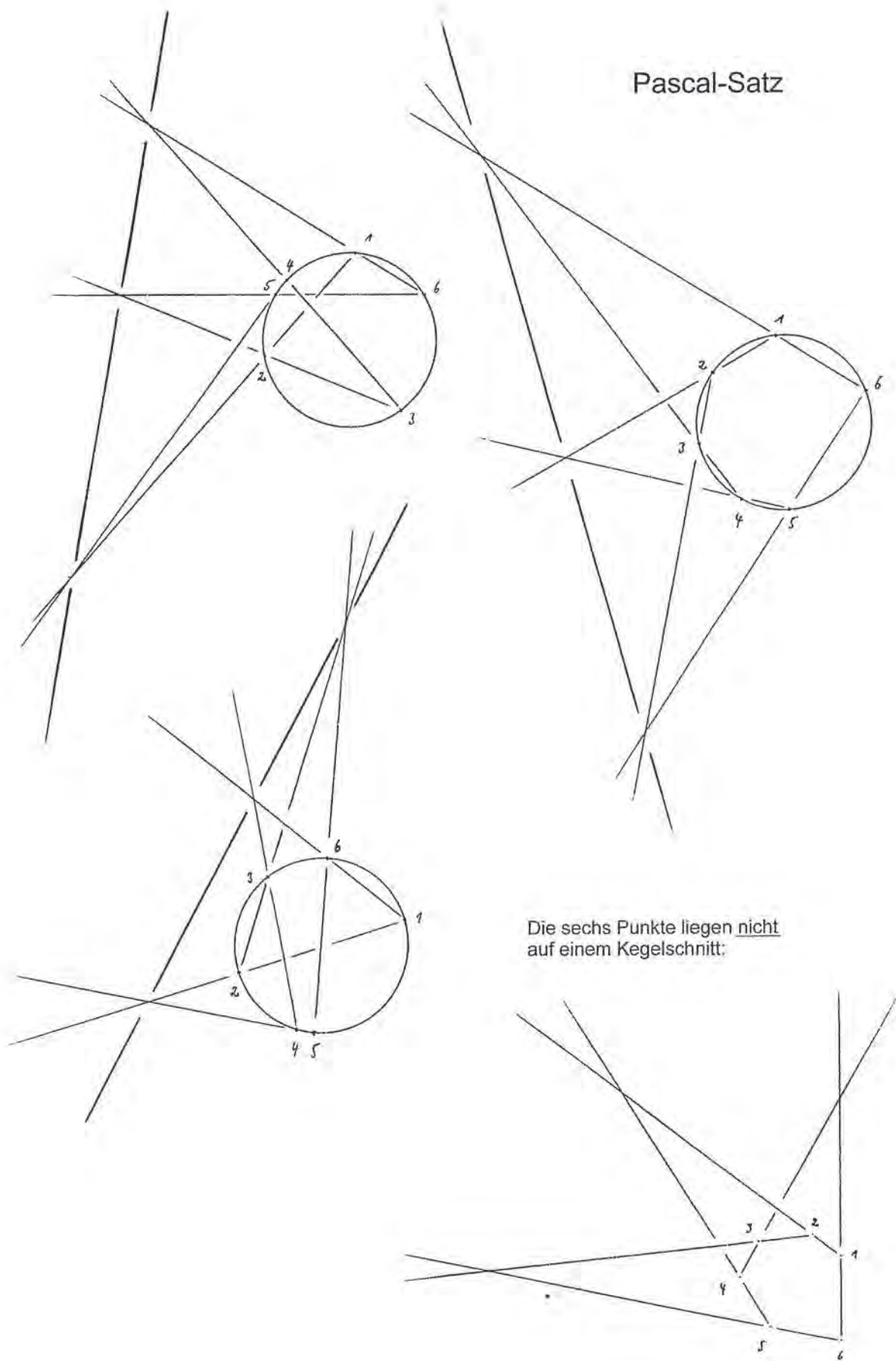
Übersicht 1

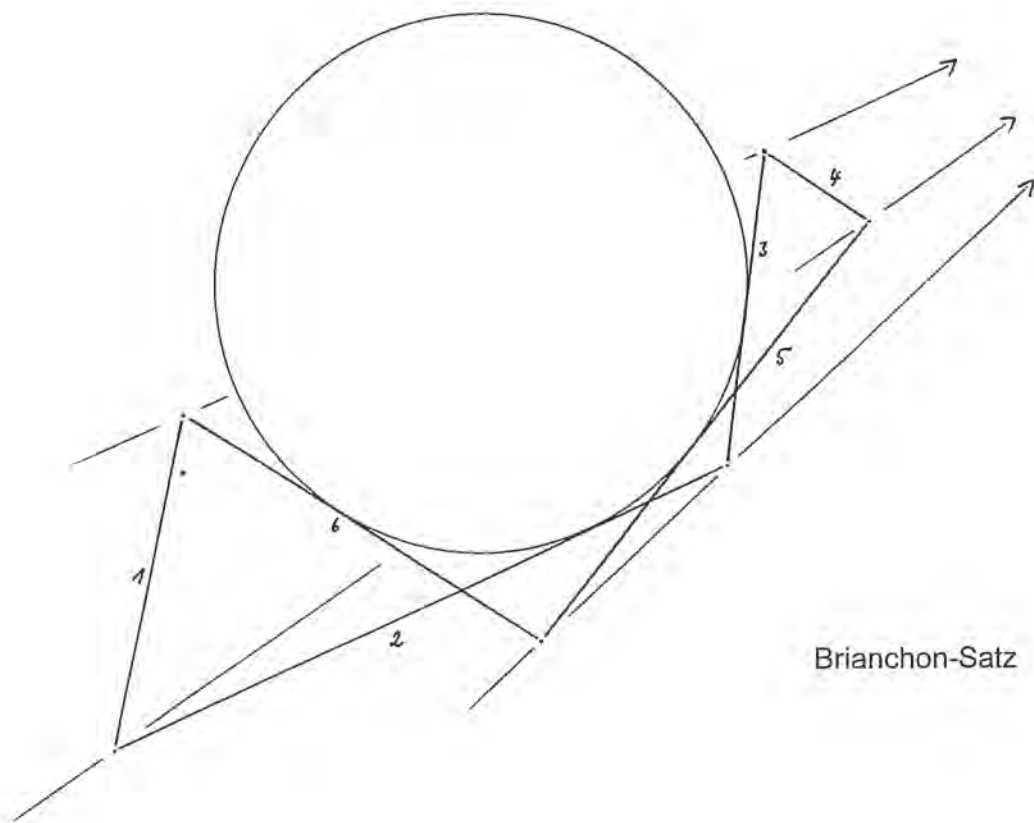
(weitere Varianten des Vorgehens)



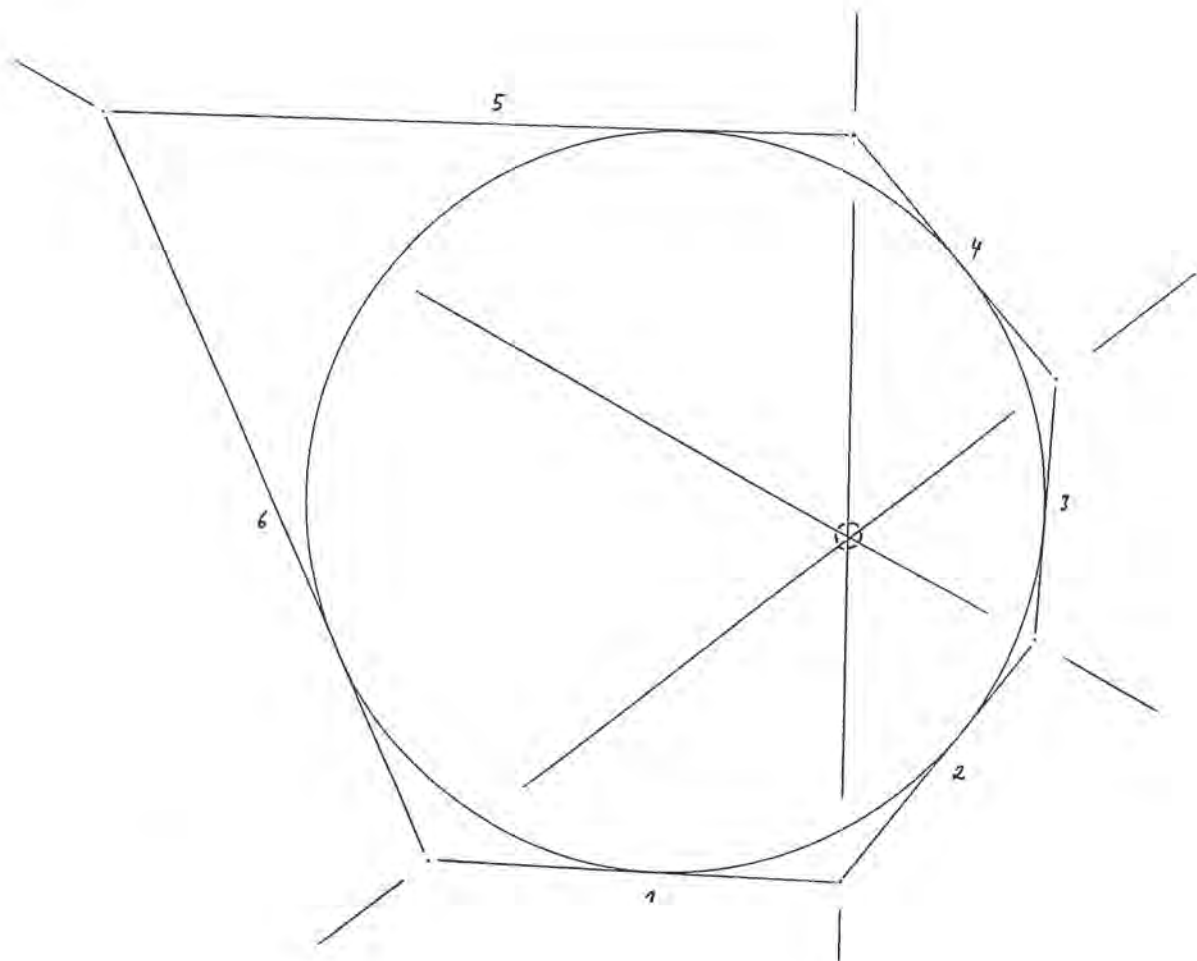


Pascal-Satz

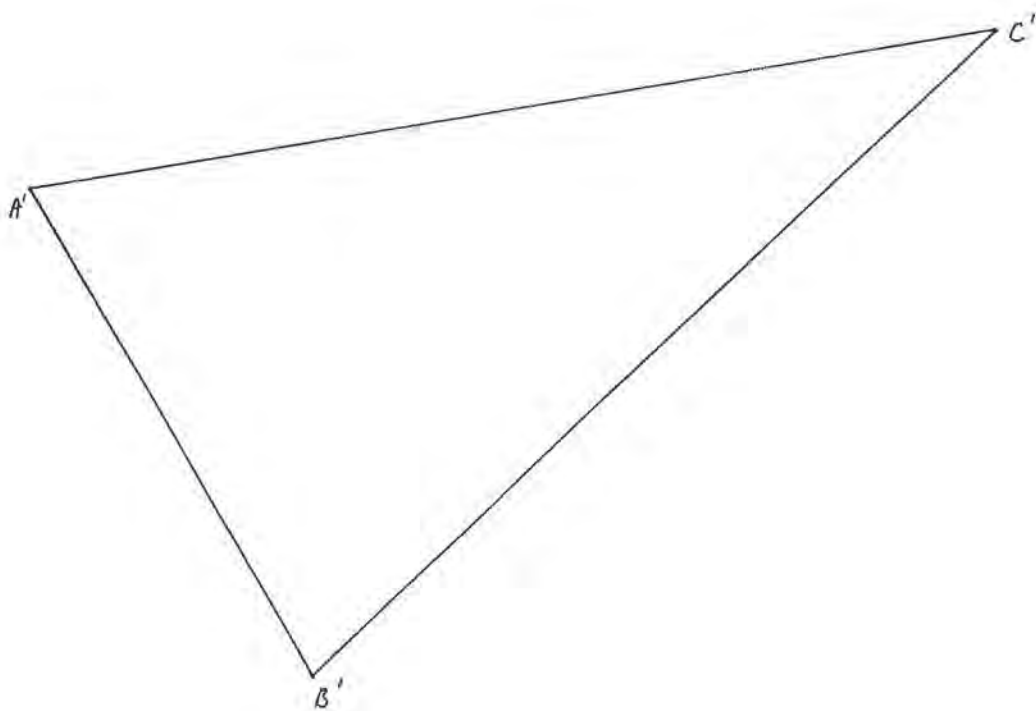
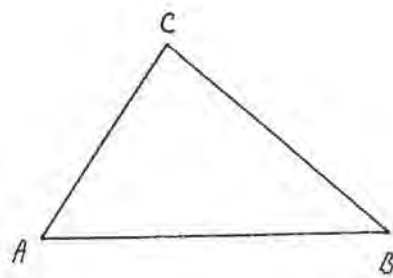




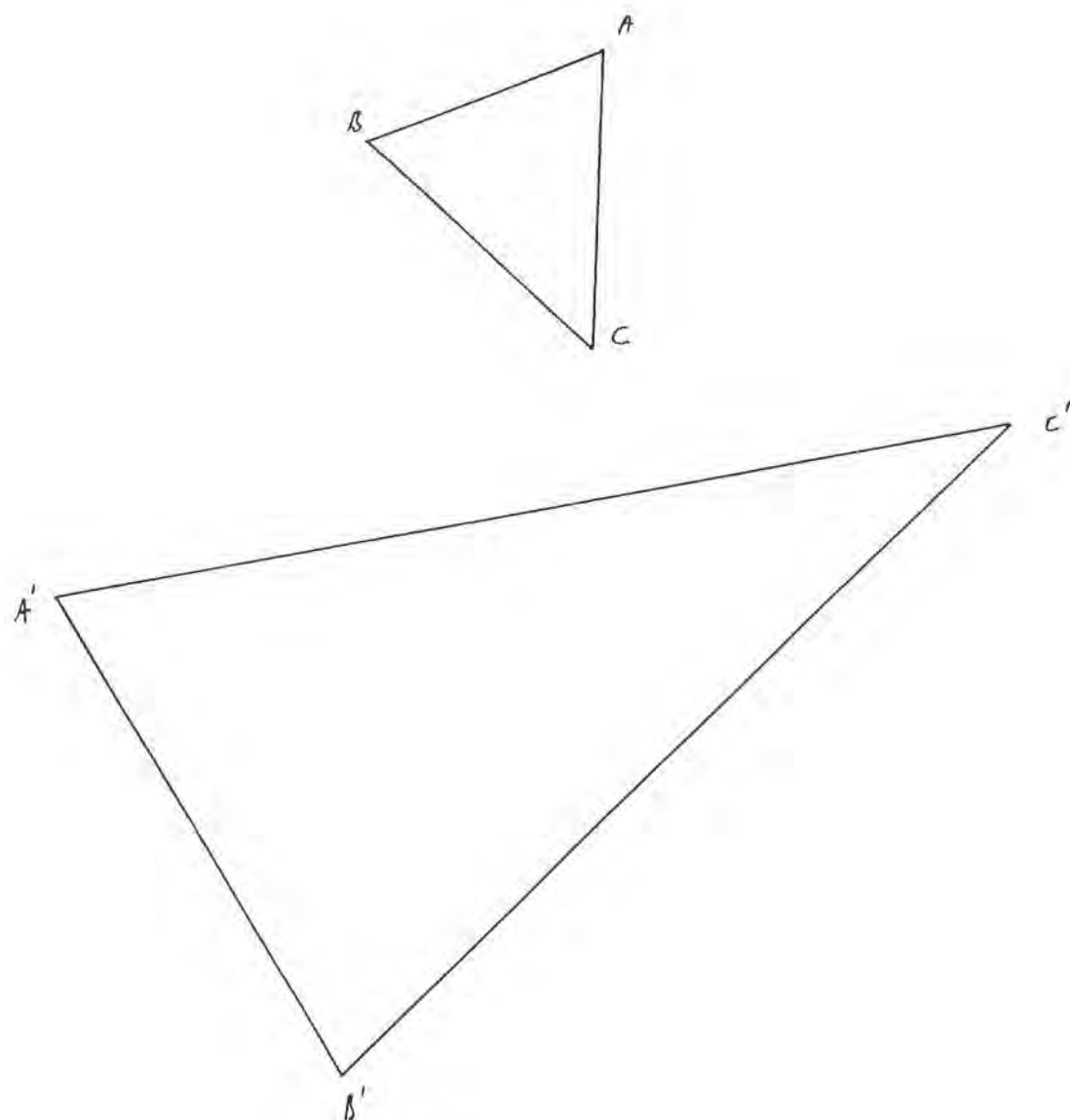
Brianchon-Satz

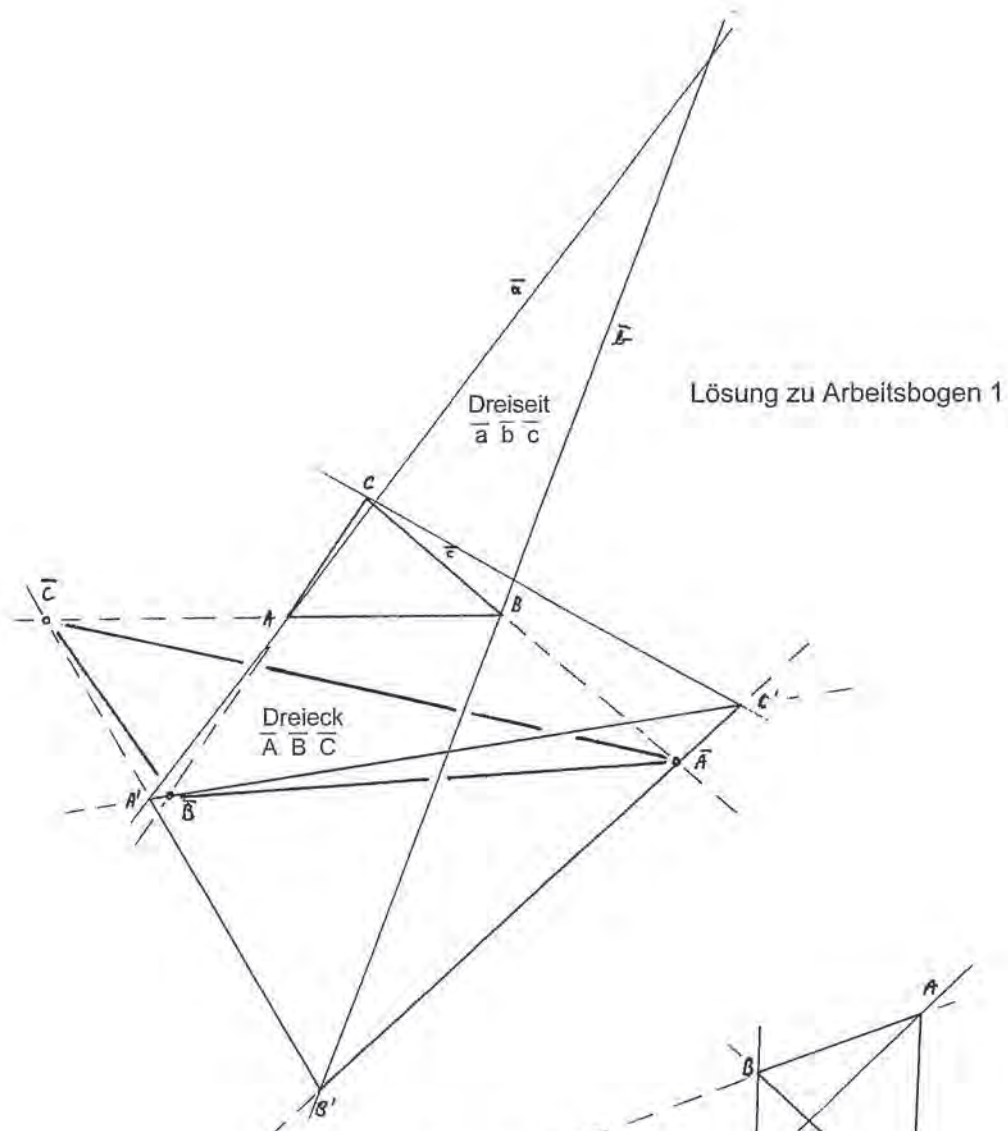


Arbeitsbogen 1

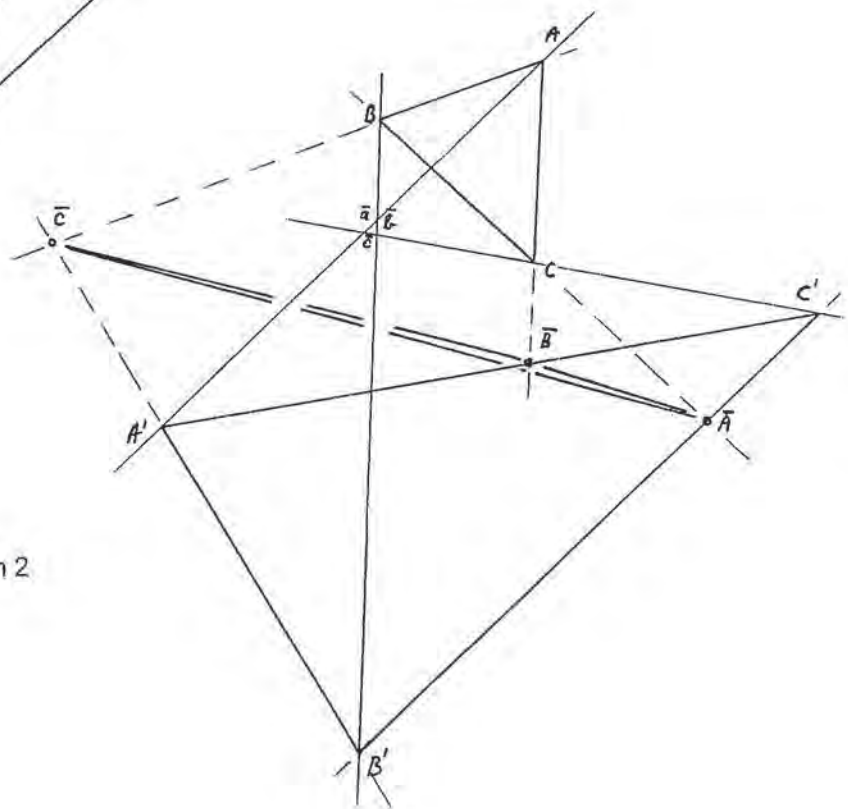


ein "relativ zugespitzter" Arbeitsbogen 2
(z.B. für die Schüler, die vergeblich
experimentiert haben)

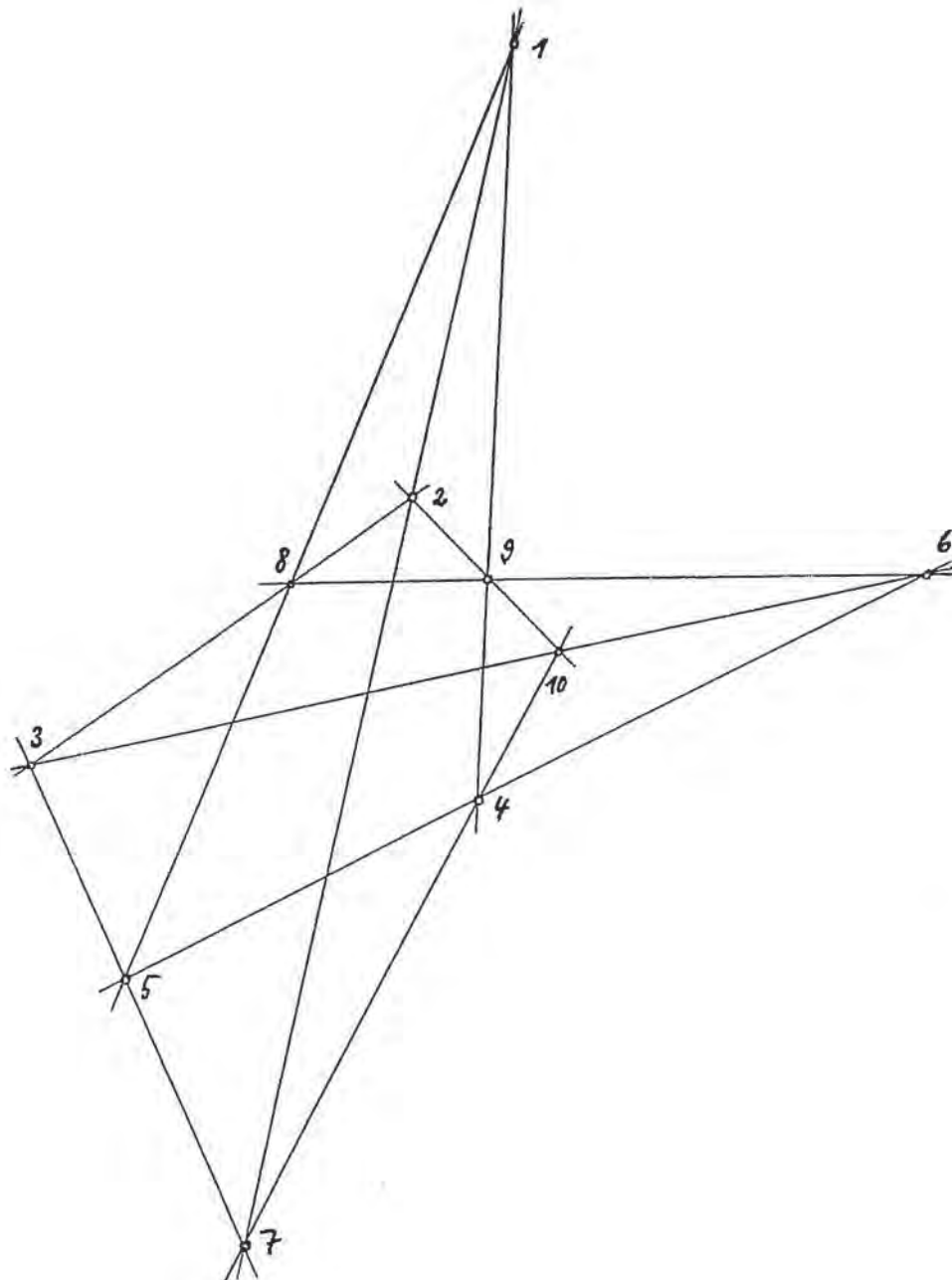




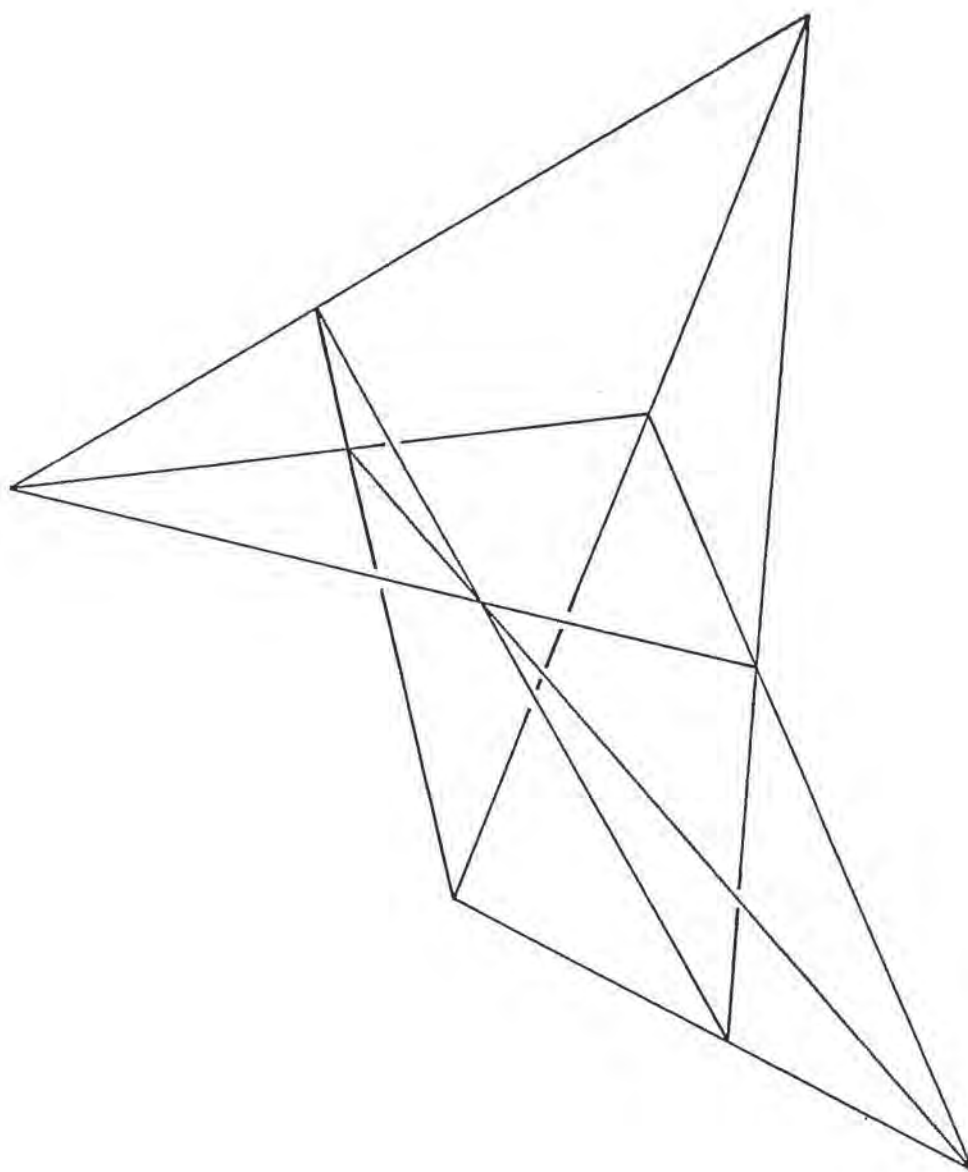
Lösung zu Arbeitsbogen 2



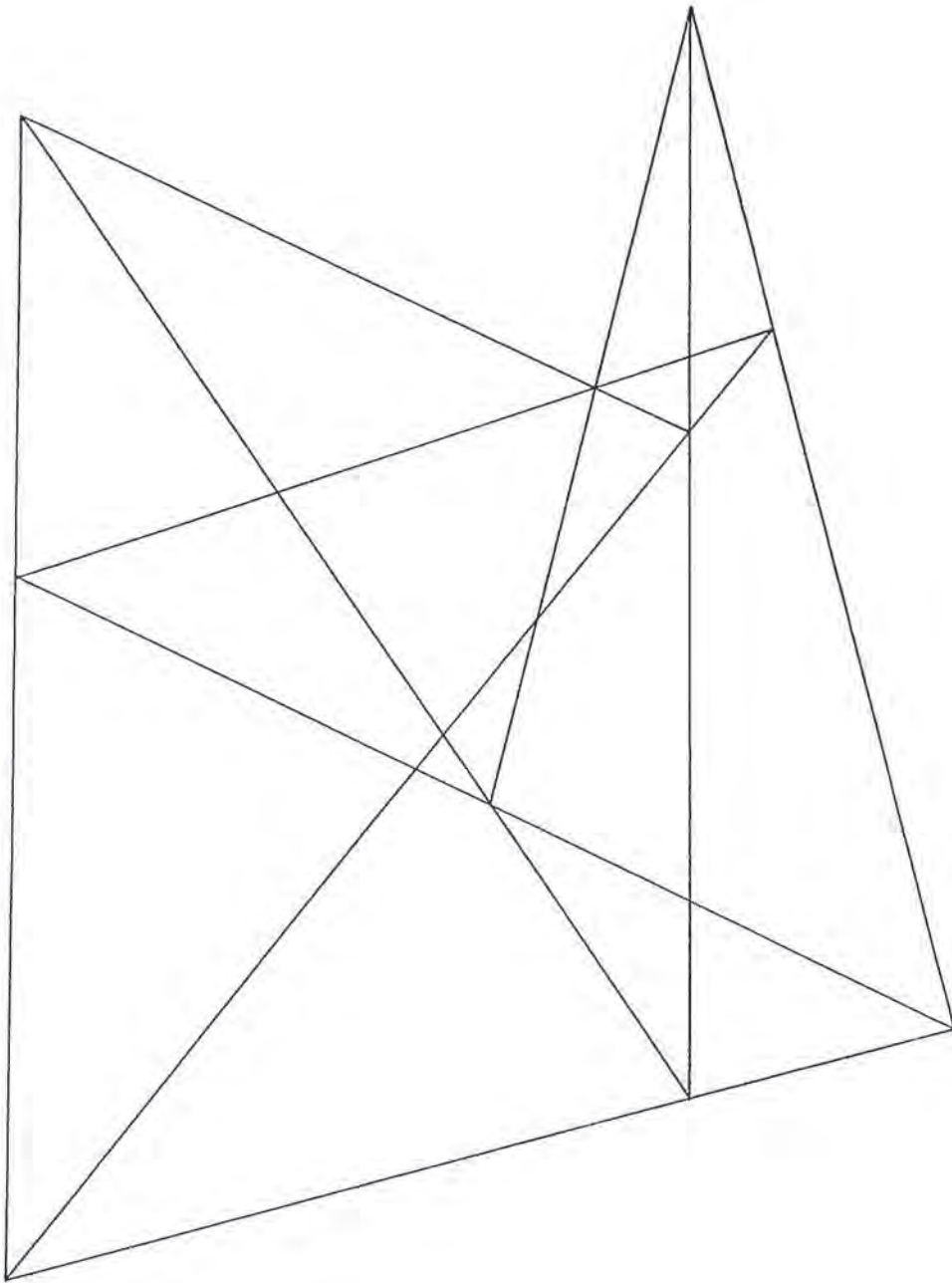
Arbeitsbogen Desargues 1



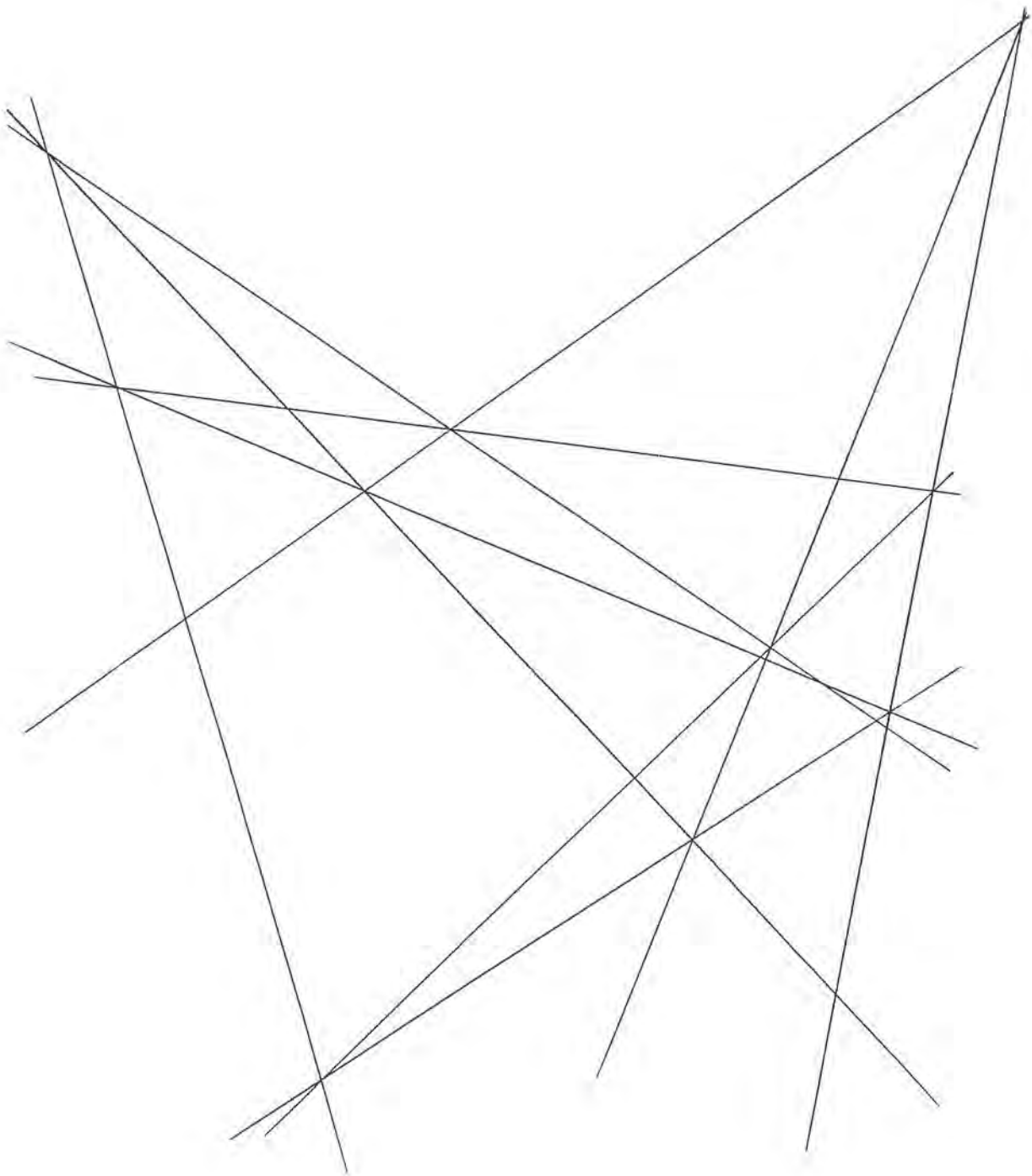
Arbeitsbogen Desargues 2



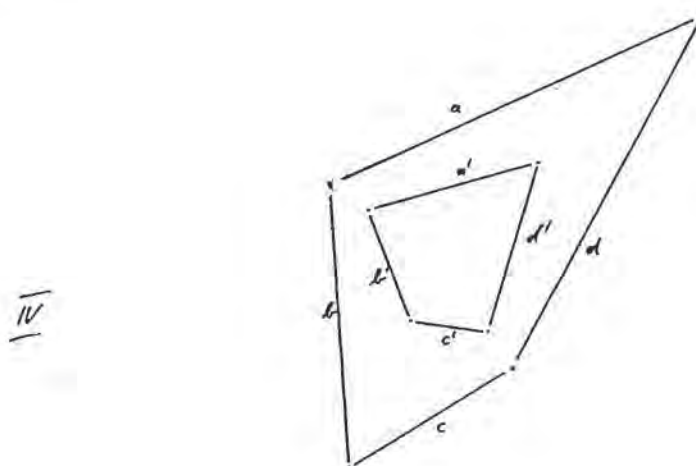
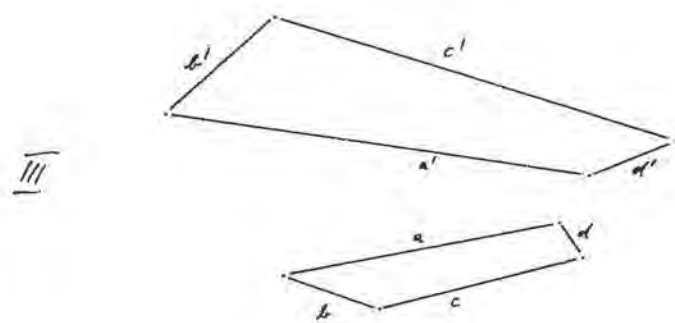
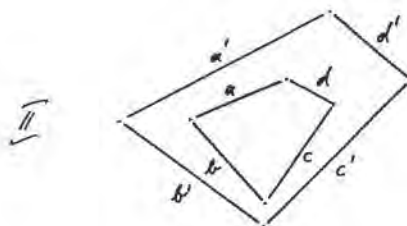
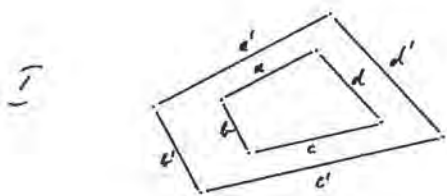
Arbeitsbogen Desargues 3



Arbeitsbogen Desargues 4

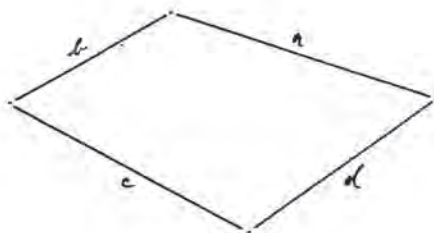
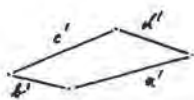


Welche Figurenpaare sind zentriert, welche hängt?

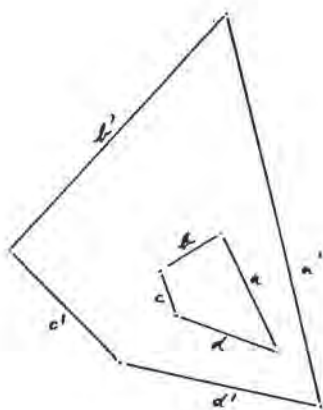


Arbeitsbogen b)

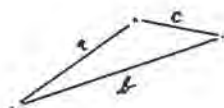
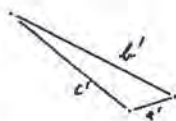
V



VI



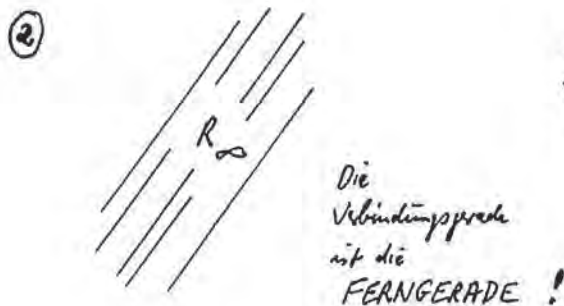
VII



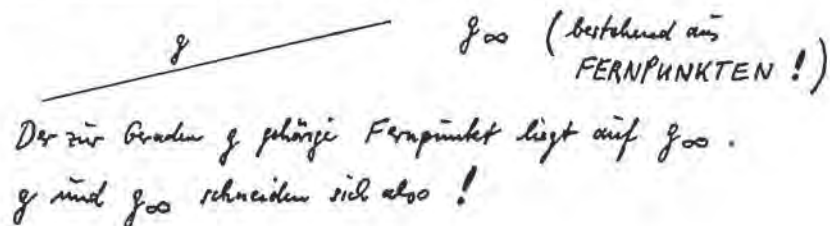
(Übersichtsblatt aus einem Schülerheft, Abdruck)

PRÜFUNG DER FERNELEMENTE AUF VERTRÄGLICHKEIT MIT DEN GEWÖHNLICHEN ELEMENTEN DER EBENEN GEOMETRIE

→ "2 Punkte haben genau 1 Verbindungsgerade"



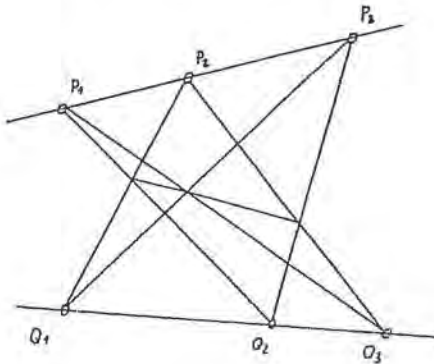
→ "2 Geraden haben genau 1 Schnittpunkt"



(S. 1)

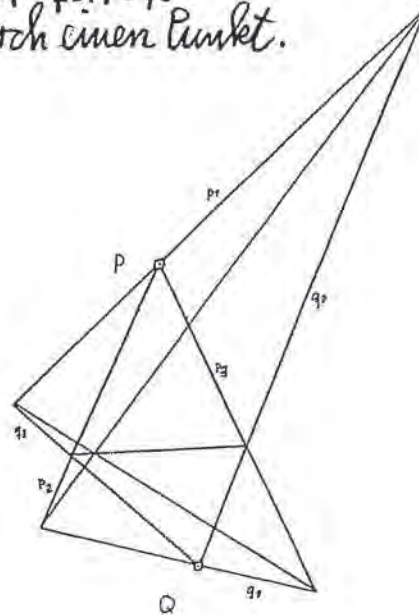
Der Satz von Pappos(-Pascal):

Liegen die Ecken eines Sechsecks $P_1 Q_2 P_3 Q_1 P_2 Q_3$ abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten $P_1 Q_2, P_2 Q_1$ bzw. $P_1 Q_3, P_3 Q_1$ bzw. $P_2 Q_3, P_3 Q_2$ auf einer Geraden.



Der Satz von Pappos(-Pascal) duale Form:

Gehen die Seiten eines Sechsecks $p_1 q_2 p_3 q_1 p_2 q_3$ abwechselnd durch zwei Punkte, so gehen die Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Ecken $p_1 q_2, p_2 q_1$ bzw. $p_1 q_3, p_3 q_1$ bzw. $p_2 q_3, p_3 q_2$ durch einen Punkt.

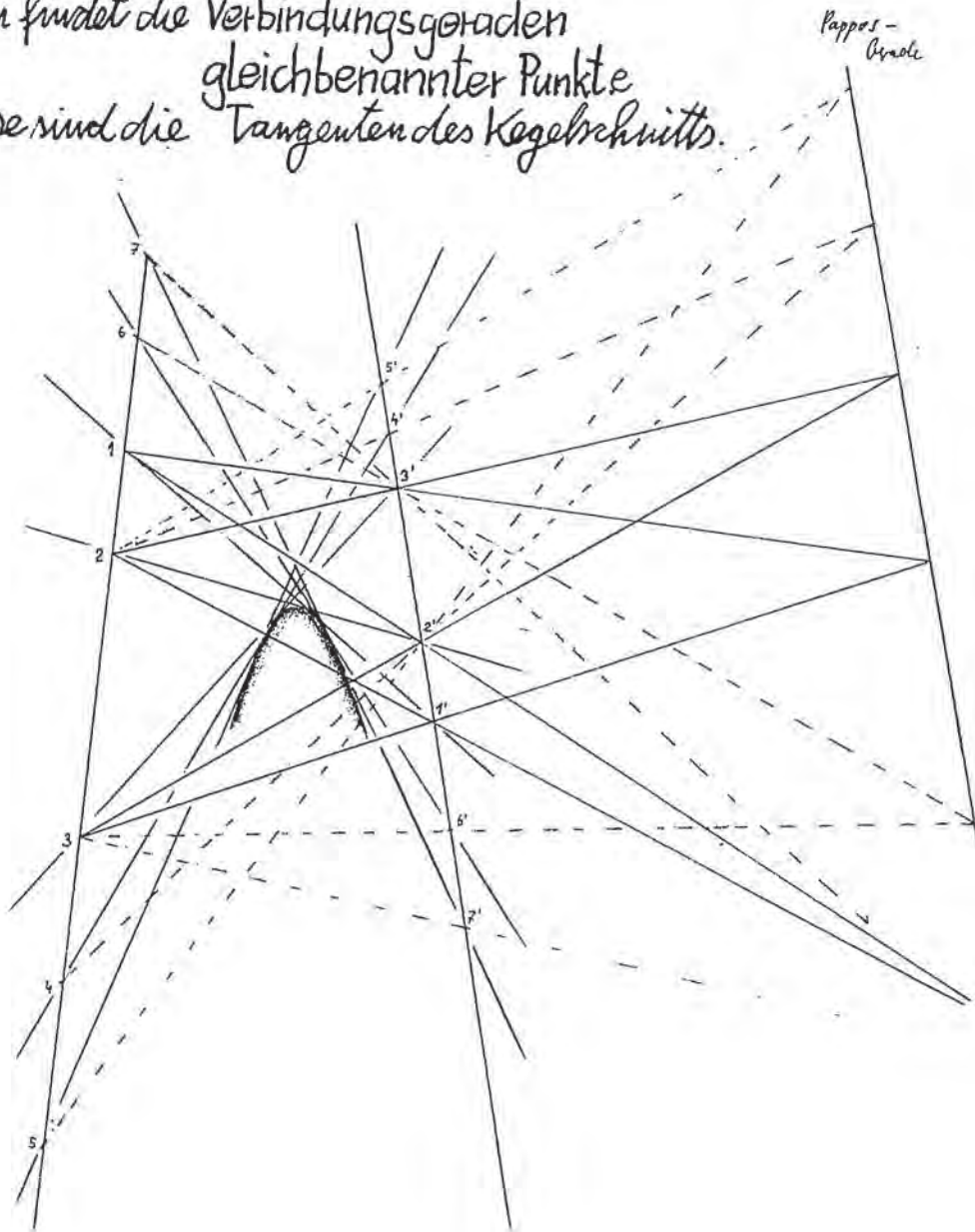


(Schülerheft S. 2)

Entstehung von Hüllkurven 2. Ordnung

durch fortgesetztes Verbinden und Schneiden
nach dem Satz von Pappos:

Man findet die Verbindungsgeraden
gleichbenannter Punkte
Diese sind die Tangenten des Kegelschnitts.

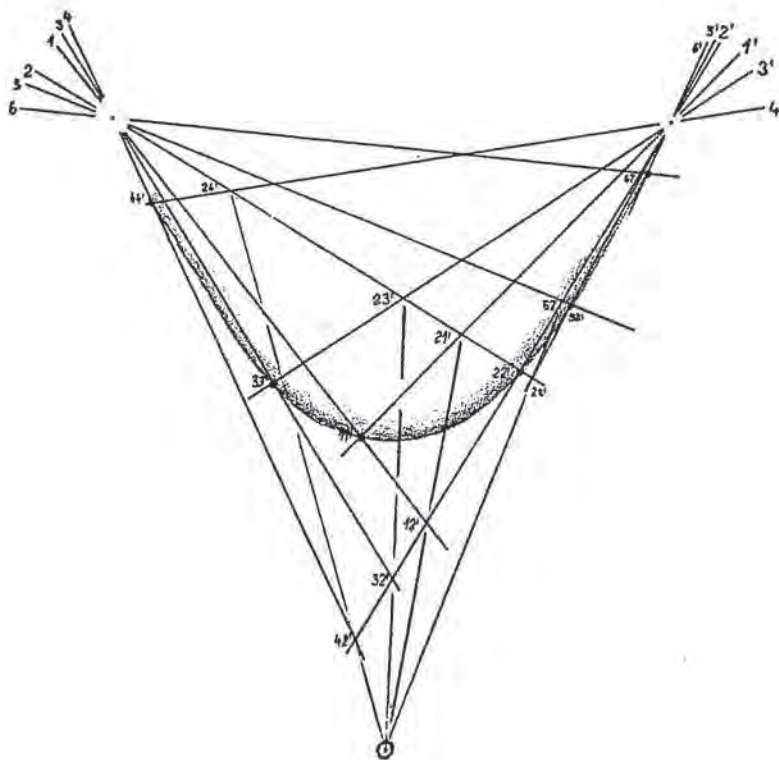


(Schilderhaft S. 3)

Entstehung von Punktkurven 2. Ordnung

durch fortgesetztes Schneiden und Verbinden
nach dem Satz von Pappos:

Man findet Schnittpunkte
gleichbenannter Geraden
Diese sind die Punkte des Kegelschnitts.

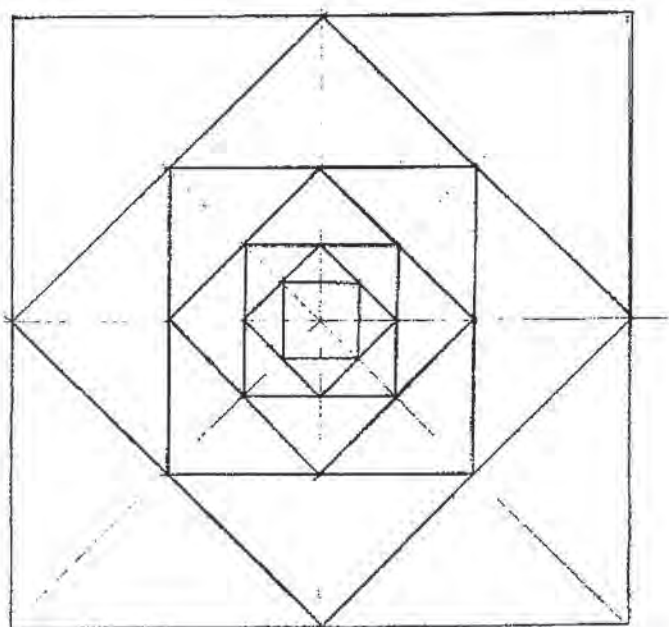


Vom Verhältnis zum Doppelverhältnis

Uwe Hansen

Für den heranwachsenden Schüler ist es ein wichtiges und befreiendes Erlebnis, die vertrauten Gesetze der euklidischen Geometrie in den allgemeinen Gesetzen der projektiven Geometrie wieder zu entdecken. Gesetzmäßigkeiten, die scheinbar keinen Zusammenhang haben, erscheinen dann als Spezialfälle einer umfassenden Beziehung. Dies soll an einem Beispiel erläutert werden.

Die Mittelpunkte der vier Seiten eines Quadrates bilden wieder ein Quadrat. Durch weitere Mittelpunktsbildung entsteht Figur 1, wobei diese Quadratfolge beliebig nach innen und nach außen fortgesetzt werden kann.



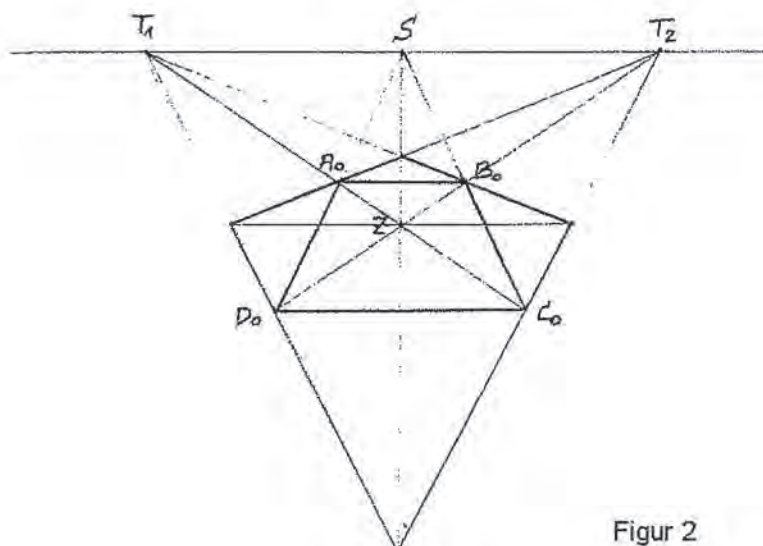
Figur 1

Wir betrachten nun die Abstände der Eckpunkte der Quadrate zum gemeinsamen Mittelpunkt. Liegen die Eckpunkte auf einer Geraden des Mittelpunktes, so bilden die Abstände eine geometrische Folge mit dem Faktor $q = 2$.

Es soll nun untersucht werden, wie sich Figur 1 verändert, wenn das Ausgangsquadrat zu einem gleichschenkligen Trapez verformt wird und dabei alle Inzidenzen von Figur 1 erhalten bleiben.

In Figur 1 sind die Diagonalen eines Quadrates parallel zu den Seiten des folgenden umschließenden Quadrates und umgekehrt. Wegen der Inzidenzforderung müssen in Figur 2 die Diagonalen des Trapezes die gegenüberliegenden Seiten des umschließenden Vierecks, bzw. die gegenüberliegenden Seiten des Trapezes die Diagonalen des umschließenden Vierecks in einer Geraden schneiden, die in Figur 1 die unendlich ferne Gerade ist. Diese

Gerade muss durch S gehen, und sie muss außerdem parallel zu A_0B_0 sein, da A_0B_0 parallel zu C_0D_0 ist. Es folgt: das umschließende Viereck ist ein Drache, dessen Seiten die Diagonalen des Trapezes in den Punkten T_1 und T_2 schneiden. Eine Diagonale des Drachens geht durch S, die andere ist parallel zu A_0B_0 . Da das Trapez als gleichschenkelig vorausgesetzt wurde, schneiden sich die Diagonalen des Drachens rechtwinklig.



Figur 2

Das Trapez $A_0B_0C_0D_0$ wurde so gewählt, dass A_0 Mittelpunkt der Strecke T_1C_0 ist. Daraus folgt, dass A_0B_0 halb so lang wie C_0D_0 ist. Dann teilt Z die Strecke A_0C_0 im Verhältnis 1:2. Daher gilt $ZA_0 : A_0T_1 = 1 : 3$. A_0 teilt also die Strecke ZT_1 im Verhältnis 1 : 3. Dies gilt auch für den Punkt C_0 .

Durch wiederholte Bestimmung von Seitenverhältnissen bei ähnlichen Dreiecken kann man entsprechend zeigen:

$$ZA_1 : A_1T_1 = 2 : 3$$

$$ZA_2 : A_2T_2 = 4 : 3$$

allgemein: $ZA_n : A_nT_1 = 2^n : 3$

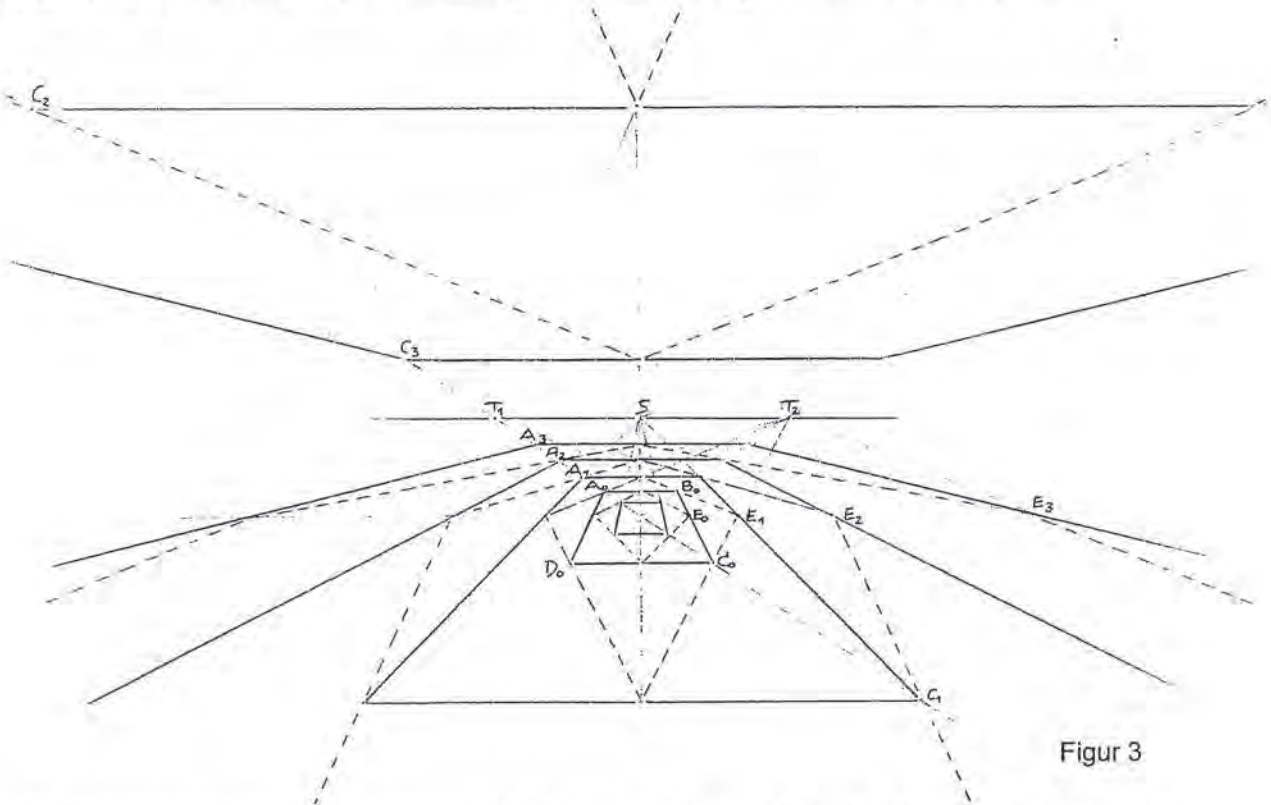
(siehe Figur 3, in der weitere Trapeze und Drachen gezeichnet sind, deren Seiten sich in S bzw. T_1 und T_2 schneiden müssen.) Das bedeutet: Die Teilverhältnisse $ZA_n : A_nT$ bilden eine geometrische Folge mit dem Faktor $q = 2$.

Für das Doppelverhältnis gilt also

$$(1) \quad \frac{ZA_{n+1}}{A_{n+1}T_1} : \frac{ZA_n}{A_nT_1} = 2$$

Wir kommen also zu dem erstaunlichen Ergebnis, dass das konstante Verhältnis $q = 2$ von Fig. 1 sich verwandelt zu dem konstanten Doppelverhältnis $D = 2$ in Figur 3. Dieses Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Form des Trapezes $A_0B_0C_0D_0$.

Auf allen durch Z gehenden Geraden erzeugen die Ecken dieser Vierecksmetamorphose Punktfolgen, für die das Doppelverhältnis gleich 2 ist, mit Ausnahme der Punktfolge E_n . Die Punkte E_n liegen auf einer Geraden, die parallel zur Geraden T_1T_2 ist, für diese Punktfolge gilt daher: Die Strecken ZE_n bilden eine geometrische Folge mit dem Faktor $q = 2$.



Figur 3

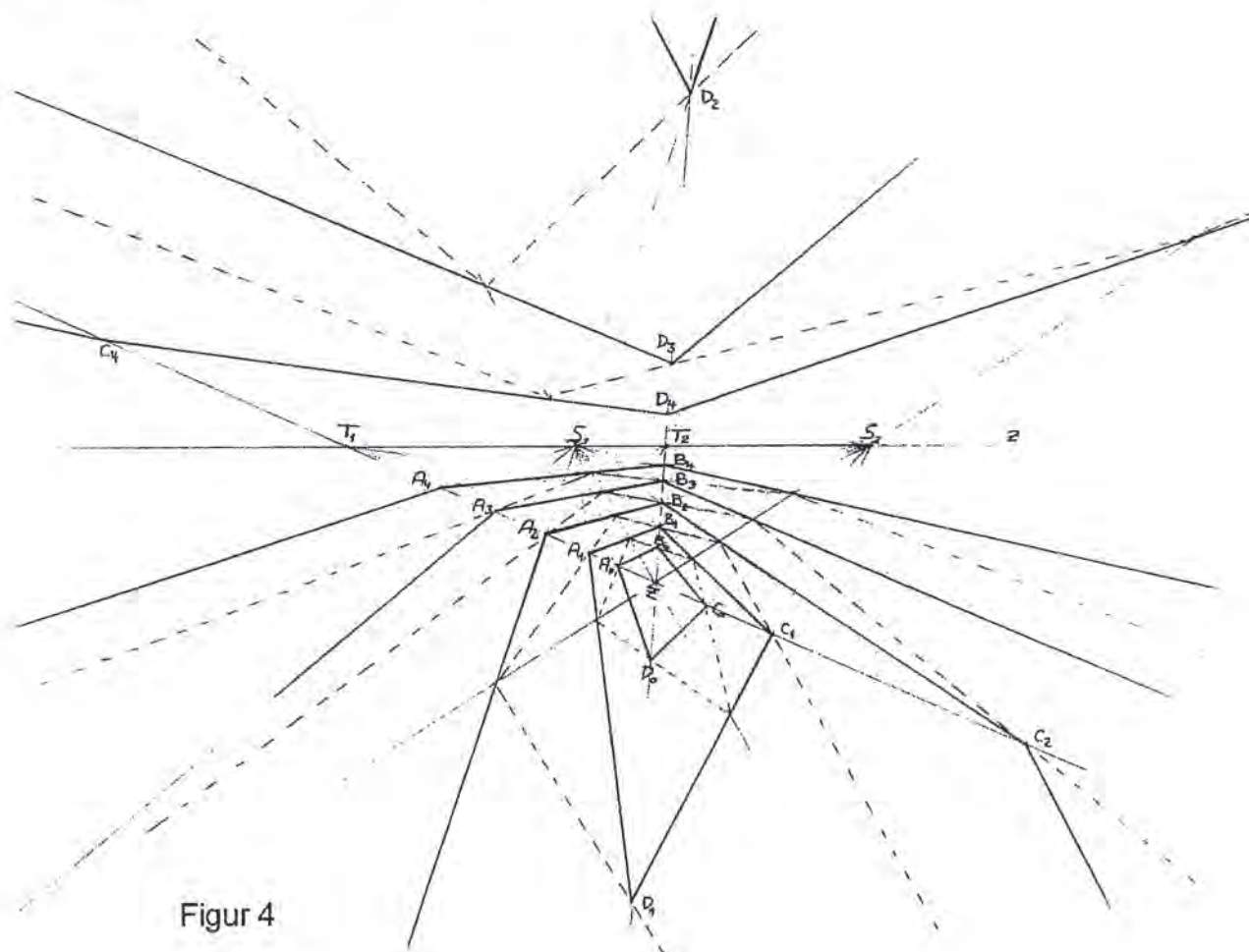
In Figur 3 nähern sich die Vierecke auf der einen Seite dem Zentrum Z, auf der anderen Seite umschließen sie die „Grenzgerade“ T_1T_2 ; Im Grenzfall ist also das Viereck ein Punkt oder eine Doppelgerade.

Formt man die Gleichung (1) um zu

$$\frac{ZA_{n+1}}{ZA_n} : \frac{A_{n+1}T_1}{A_nT_1} = 2$$

so erkennt man: Wenn T_1 zu einem unendlich fernen Punkt wird, so konvergiert der zweite Bruch gegen 1. Die Strecken ZA_n bilden dann eine geometrische Folge.

In einem zweiten Schritt wird nun das Trapez in ein beliebiges Vierseit verwandelt. Man erhält Figur 4, wenn man weitere Vierecke einzeichnet. Auch hier hat die Gerade $z = T_1T_2$ die Funktion der „unendlich fernen“ Gerade übernommen. Die Schnittpunkte gegenüberliegender Vierecksseiten liegen auf z . Der Punkt Z und die Gerade z sind die Zentren dieser Vierecksmetamorphose.



Figur 4

Auch hier soll nun das Doppelverhältnis bestimmt werden. Dazu betrachten wir wieder die Gerade ZT_1 . Sie ist Nebenseite des vollständigen Vierseits $ZS_1, ZS_2, A_1S_1, A_1S_2$. Daher trennen sich die vier Punkte $ZA_1; A_0T_1$ harmonisch (siehe die Beiträge von Herrn Georg und Herrn Hünig).

Daher gilt:

$$(2) \quad \frac{ZA_0}{A_0A_1} = -\frac{ZT_1}{T_1A_1}$$

Wir bezeichnen nun $ZA_0 = a$, $A_0A_1 = b$, $A_1T_1 = c$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= -\frac{a+b+c}{-c} \\ ac &= ab + b^2 + bc \\ 2ac &= ab + ac + b^2 + bc \\ 2ac &= (a+b)(b+c) \\ 2 \frac{a}{b+c} &= \frac{a+b}{c} \end{aligned}$$

oder

$$2 \cdot \frac{ZA_0}{A_0T_1} = \frac{ZA_1}{A_1T_1}$$

oder

$$(3) \quad \frac{ZA_1}{A_1T_1} : \frac{ZA_0}{A_0T_0} = 2$$

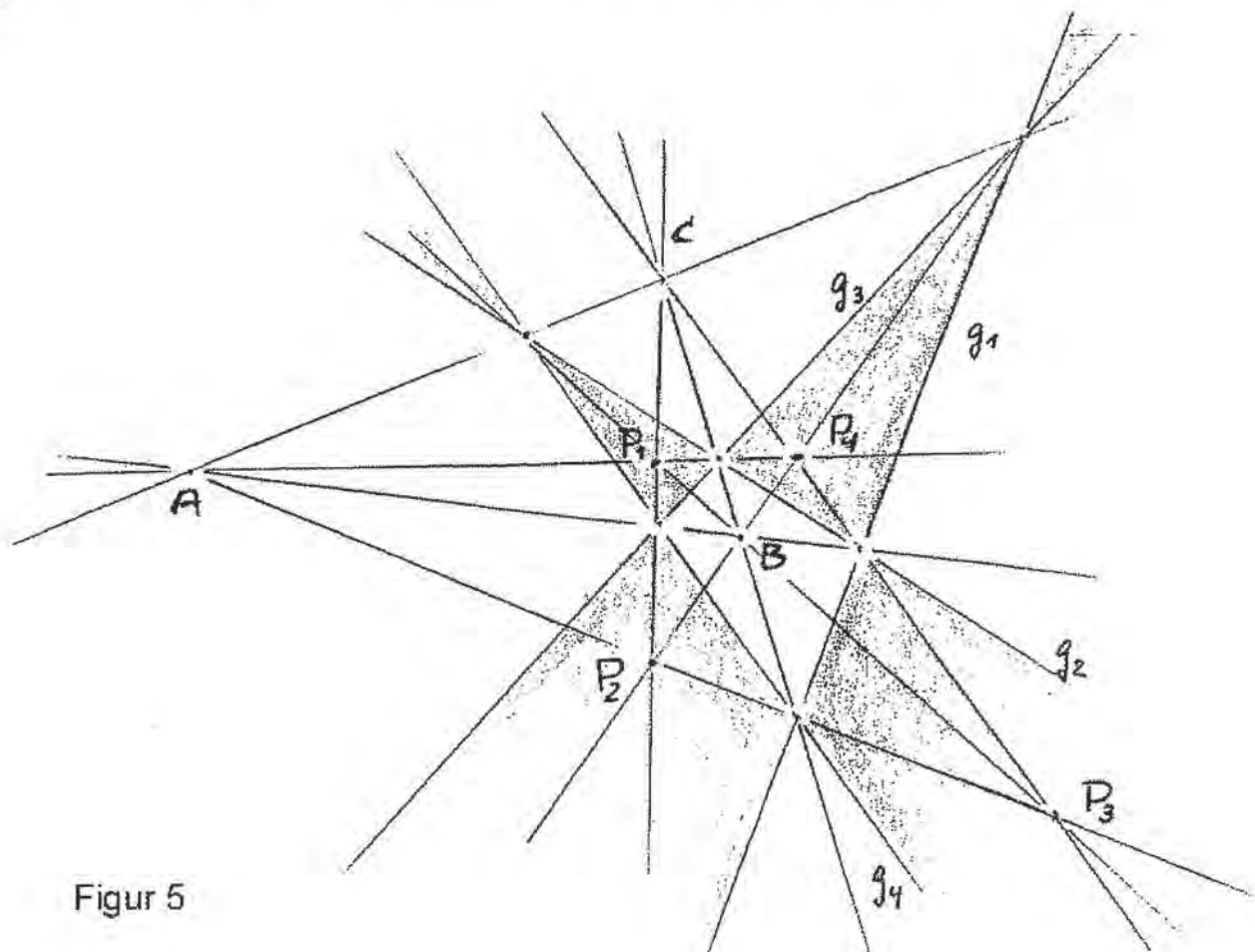
Geht man von einem anderen Vierseit aus, so kann man in gleicher Weise zeigen

$$\frac{ZA_2}{A_2T_1} : \frac{ZA_1}{A_1T_1} = 2$$

oder allgemein (4) $\frac{ZA_{n+1}}{A_{n+1}T_1} : \frac{ZA_n}{A_nT_1} = 2$

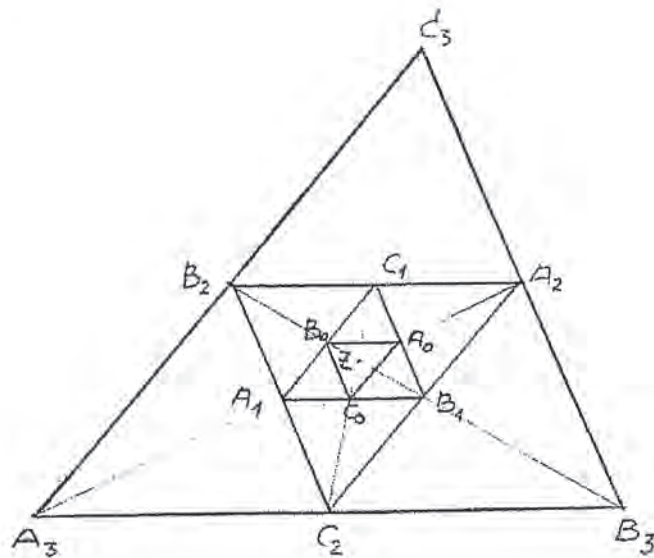
Wir sehen: die Gleichung (1) gilt allgemein für alle Vierseite. Dieses konstante Doppelverhältnis 2 ist also der Ausdruck für das innere Konstruktionsprinzip dieser Vierecksmetamorphose, einer Folge von Vierecken, die sich aus dem vollständigen Vierseit ergibt.

Das vollständige Vierseit (die harmonische Grundfigur) zeigt ein rätselhaftes Verwobensein der Dreiheit mit der Vierheit (siehe Figur 5): Die vier Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 sind die „Mittelpunkte“ der vier dreiseitigen Gebiete, die drei Ecken A, B, C – sie bilden das Nebendreieck – sind die „Mittelpunkte“ der drei vierseitigen Gebiete. Die innere Harmonie des Dreiecks vermittelt zwischen den Vierheiten der 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und der vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 .



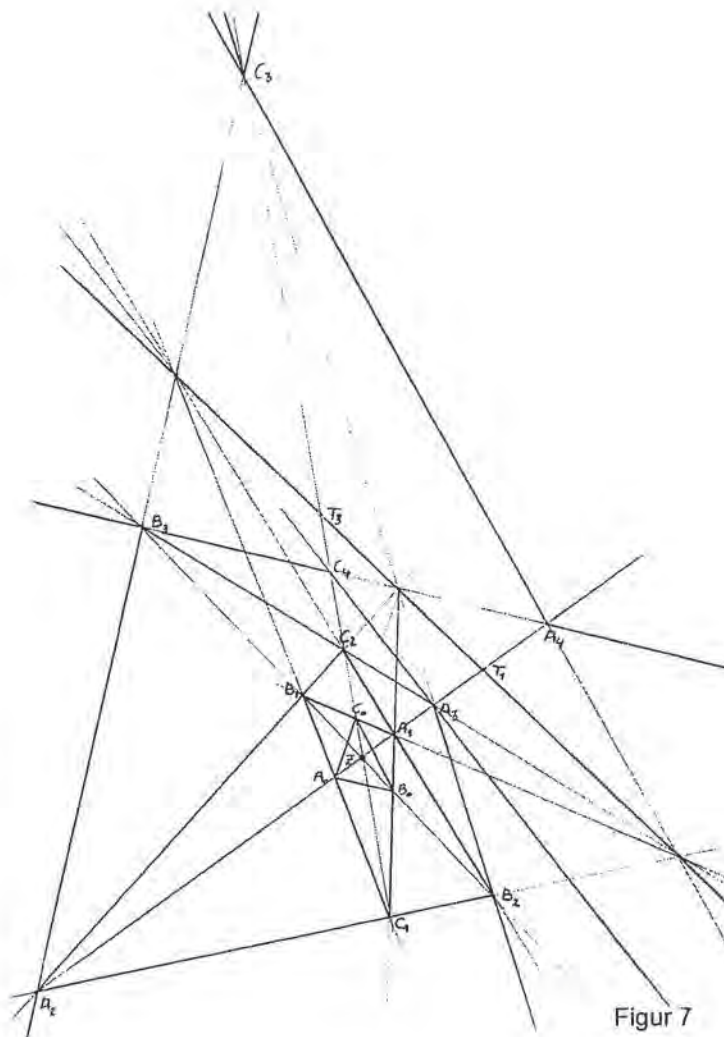
Figur 5

Eine Nebenecke, z.B. B kann als Zentrum Z einer Vierecksmetamorphose angesehen werden – ein Viereck ist z.B. $P_1P_2P_3P_4$. Die Gerade AC wäre dann die Bezugsgerade z. Die innere Ausgewogenheit von der Drei mit der Vier legt es nun nahe, auch das Zentrum eines dreiseitigen Gebietes als Zentrum einer Dreiecksmetamorphose anzusehen. Wenn z.B. P_1 Zentrum ist, so gehört das Dreieck ABC dazu; die Gerade g_1 ist dann Bezugsgerade. Wir betrachten zunächst den einfachsten Spezialfall, in dem ähnliche Dreiecke auftreten (Figur 6). In diesem Fall bilden die Strecken $ZA_0, ZA_1, ZA_2, \dots$ eine geometrische Folge mit dem Faktor $q = -2$.



Figur 6

Im Falle eines allgemeinen Dreiecks tritt dann das Doppelverhältnis $D = -2$ auf. Dieses zeigt die folgende Überlegung (Figur 7).



In dem Vierseit $A_2B_1, B_1Z, ZC_1, C_1A_2$ ist A_2Z Nebenseite. Daher liegen die vier Punkte $A_1A_0; A_2Z$ harmonisch. Es gilt also

$$(5) \quad \frac{A_1A_2}{A_2A_0} : \frac{A_1Z}{ZA_0} = 1$$

In dem Vierseit $A_2B_1, B_1A_1, A_1C_1, C_1A_2$ ist ebenfalls A_2Z Nebenseite. Daher liegen auch die vier Punkte $A_1A_2; T_1A_0$ harmonisch, so dass also gilt:

$$(6) \quad \frac{A_1T_1}{T_1A_2} = -\frac{A_1A_0}{A_0A_2}$$

Diese Gleichung (6) entsteht aus Gleichung (2), wenn man die Buchstaben Z, A_0, A_1, T durch A_1, T_1, A_2, A_0 ersetzt. Ersetzt man auch in Gleichung (3) die Buchstaben in dieser Art, so folgt also aus Gleichung (6) die Gleichung (7):

$$(7) \quad \frac{A_1A_2}{A_2A_0} : \frac{A_1T_1}{T_1A_0} = 2$$

Dividiert man die Gleichung (7) durch die Gleichung (5), so erhält man

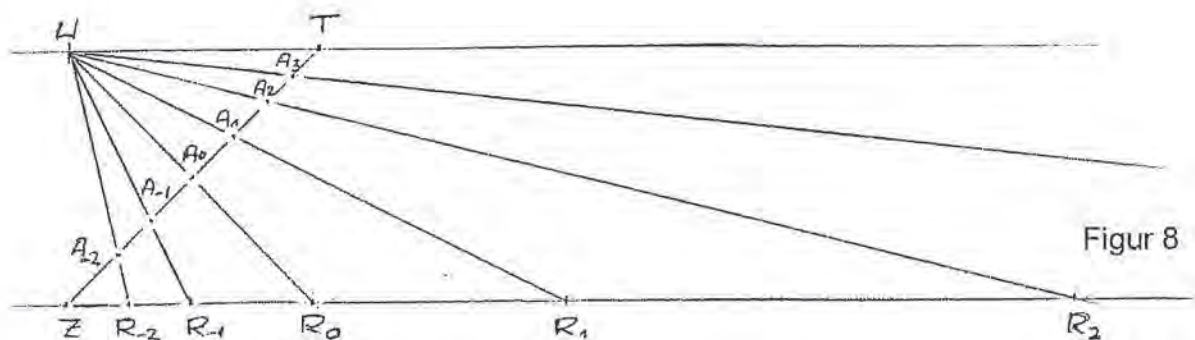
$$\frac{A_1Z}{ZA_0} : \frac{A_1T_1}{T_1A_0} = -2$$

oder (8)
$$\frac{ZA_1}{A_1T_1} : \frac{ZA_0}{A_0T_1} = -2$$

Durch eine geeignete Wahl anderer Vierseite lässt sich allgemein beweisen:

(9)
$$\frac{ZA_{n+1}}{A_{n+1}T_1} : \frac{ZA_n}{A_nT_1} = -2$$

Diese Ausführungen haben gezeigt, dass die harmonische Grundfigur (Figur 5) erweitert werden kann zur Vierecksmetamorphose (Figur 4) und zur Dreiecksmetamorphose (Figur 7), deren Spezialfälle die Figur 1 und die Figur 6 zeigen. Damit wird deutlich, wie durch die projektive Geometrie sehr verschiedene Gesetzmäßigkeiten zusammengefasst werden. Die Vierecksmetamorphose wird durch das Doppelverhältnis $D = 2$ bestimmt, die Dreiecksmetamorphose durch das Doppelverhältnis $D = -2$. Außerdem wurde deutlich, dass das Doppelverhältnis zum einfachen Verhältnis wird, wenn bestimmte Punkte zu Grenzpunkten der Ebene werden. Dies zeigt auch Figur 8: Die Strecken ZR_n bilden eine geometrische Folge mit dem Faktor $q = 2$.



Durch Projektion entsteht die Punktfolge A_n , wobei T das Bild des unendlich fernen Punktes von ZR_0 ist.

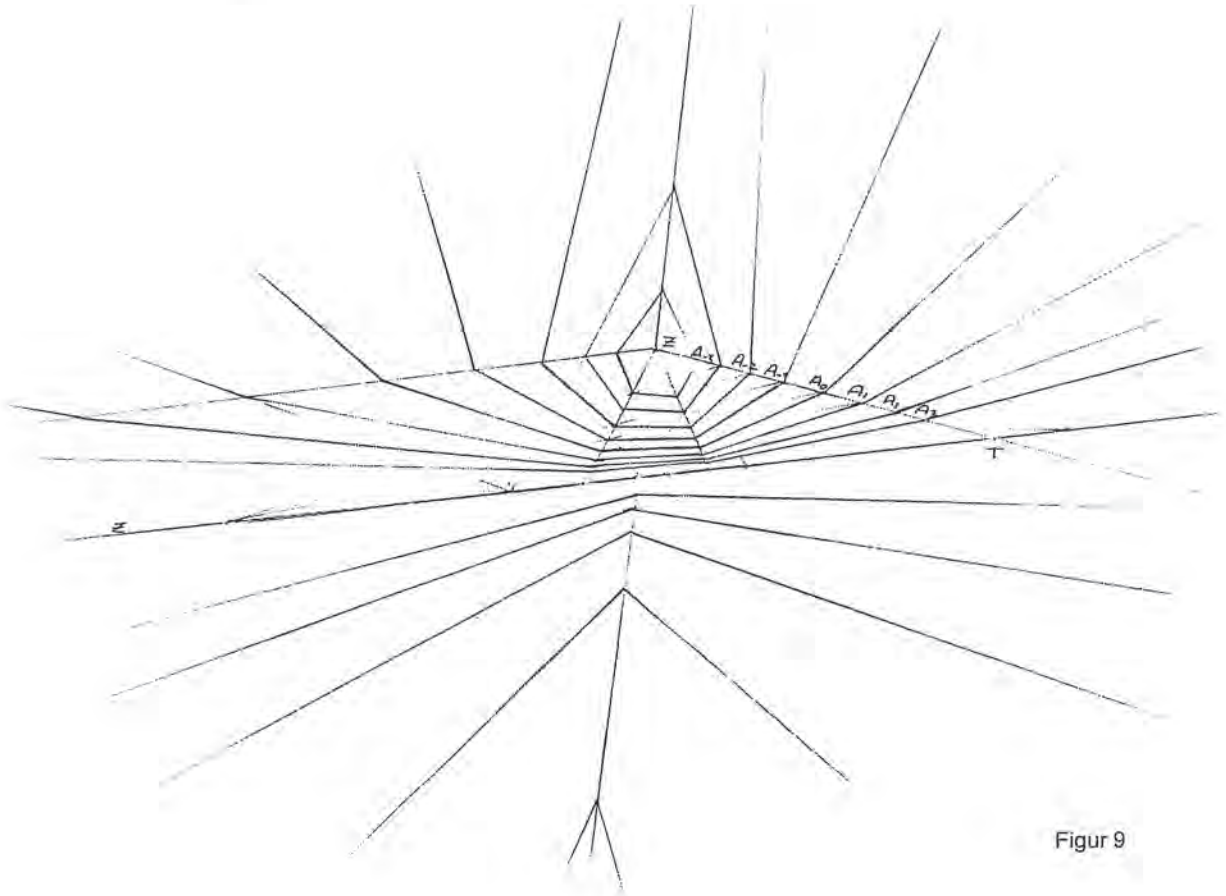
Es ist
$$\frac{ZA_n}{ZT} = \frac{2^n}{2^n + 1} \quad (\text{die Strecken } ZR_0 \text{ und } WT \text{ haben die gleiche Länge.})$$

$$\frac{ZA_n}{A_nT} = 2^n \text{ so dass } \frac{ZA_{n+1}}{A_{n+1}T} : \frac{ZA_n}{A_nT} = 2 \text{ ist.}$$

Verhältnisse können wir verstehen, da unser Gefühl mitschwingt, z.B. wenn wir zwei Streckenlängen vergleichen. Ein Doppelverhältnis zu erfassen, erfordert aber ein noch stärkeres Eingreifen des Willens.

Die Figur 9 zeigt eine Fünfecksmetamorphose, die durch das Doppelverhältnis $8 : 5$ gekennzeichnet ist. Dieses Doppelverhältnis tritt bei allen Punktfolgen auf, die auf den von Z ausgehenden Geraden liegen.

So gilt z.B. $\frac{ZA_{n+1}}{A_{n+1}T} : \frac{ZA_n}{A_nT} = 8 : 5$



Figur 9

Es ist naheliegend, diese Fünfecksmetamorphose vom Zentrum Z aus zu denken, wobei sich dann die Entfernungen vom Zentrum zu den 5 Eckpunkten vergrößern bzw. verkleinern. Kennzeichnend für die projektive Geometrie ist es, diesen Vorgang auch polar, d.h. von der Geraden z aus zu denken. Dabei drehen sich die 5 Fünfecksseiten in ihren 5 Schnittpunkten mit der Geraden z. Die Drehwinkel entsprechen den Streckenlängen, z.B. ZA_n . Das Fünfeck wird also von außen eingehüllt, eingeengt oder wieder geweitet.

Dieses Erfassen der Formen von außen kommt sicher der Forderung unserer Zeit entgegen, das Einzelne mehr aus dem großen Zusammenhang zu erfassen, vom Ganzen aus zu denken.

Es hängt dies auch zusammen mit der Forderung R. Steiners, das Ätherische zu erfassen durch ein Koordinatensystem, das als Bezugsfläche die unendlich ferne Ebene des Raumes hat und nicht einen im Zentrum liegenden Punkt.

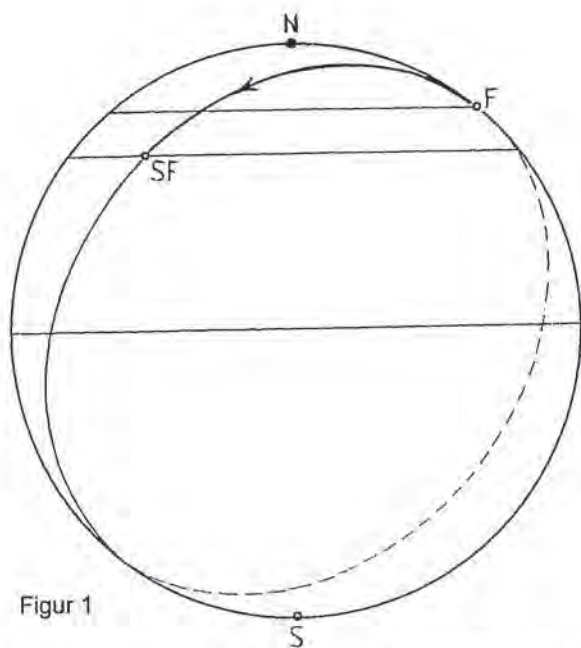
Kugelgeometrie

Klaus Labudde

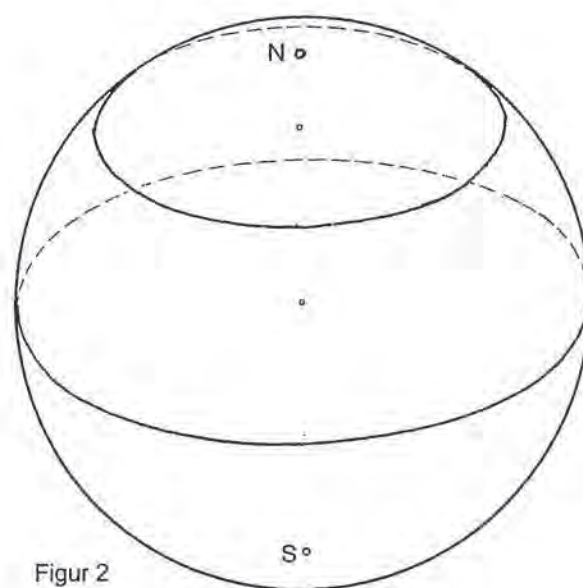
In der Beschäftigung mit der Kugelgeometrie betreten die Schüler in einer besonderen Weise geometrisches Neuland. Die Ebene oder der Raum waren bisher „der Ort der Handlung“. Dies war so selbstverständlich, dass man sich dessen in der Regel gar nicht bewusst wurde. Nun soll dieser „Ort“ etwas ganz anderes sein, nämlich die Oberfläche einer Kugel. Dies gibt Anlass zu ganz elementaren Fragen. Schon die gerade Linie, neben dem Punkt das einfachste Grundelement der den Schülern bis jetzt bekannten Geometrie, gibt es auf der Oberfläche einer Kugel nicht. Welche Bewegung eines Punktes auf einer Kugel man sich auch vorstellt, sie kann nicht geradlinig sein. Will man Geradlinigkeit erzwingen, so muss man entweder die Kugel verlassen, z. B. längs einer Tangente, oder man muss ins Innere eindringen, z. B. zum Mittelpunkt hin. Aber dies sind keine Bewegungen auf der Oberfläche. – So entsteht die Frage nach einem sinnvollen Ersatz für die Gerade.

Den Schülern ist ja bekannt, dass z. B. im Zusammenhang mit der Schifffahrt, der Luftfahrt und den künstlichen Satelliten die Mathematik eine wichtige Rolle spielt und dass dies, soweit es geometrische Fragen betrifft, etwas mit der Kugeloberfläche zu tun hat.

Was soll man auf solch einer Fläche unter einem Dreieck verstehen? Was für Linien sind die Dreiecksseiten? – Manchen Schülern ist heutzutage das Erlebnis eines Fluges an die Westküste von Nordamerika durchaus vertraut, z. B. von Frankfurt am Main nach San Francisco. Der Zielort liegt im Vergleich zum Abflughafen südlicher als dieser. Das Flugzeug hält aber



Figur 1



Figur 2

zunächst einen nördlich orientierten Kurs und überfliegt dann sogar die Südspitze von Grönland (Figur 1).

Was hat es damit auf sich? Ist es nicht ein kürzerer Weg, mit einem bestimmten und leicht südlich orientierten Kurs den Zielflughafen „direkt“ anzufliegen?

So stellt sich die Frage nach dem kürzesten Verbindungsweg zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche einer Kugel. Nehmen wir einmal an, wir stünden auf einer Kugel in einem Punkt A und wollten uns zu einem Punkt B, den wir noch erblicken können, auf dem kürzesten Weg hinbewegen. Die Kugel sei so groß, dass man auf dem Weg von A nach B (beide Punkte im hoch gelegenen Teil der Oberfläche liegend) nicht ausrutscht und in die Tiefe stürzt. Sie sei aber auch so klein, dass man sich auf einer Kugel stehend empfindet, d. h. auf einer gekrümmten Fläche. Wir können nun erfahren, dass es den gesuchten kürzesten Weg nach B tatsächlich gibt, und zwar eindeutig. Wir brauchen nur darauf zu achten, dass wir während der Bewegung den Punkt B stets genau vor uns haben. Mit anderen Worten: Wir dürfen nicht seitlich ausweichen. Solch eine Bewegung ist möglich, und sie kommt dem Geradeausgehen in der Ebene am nächsten. Insofern ist der gefundene Weg der bestmögliche Ersatz für die Gerade und mag die Rolle übernehmen, welche die Gerade in der Ebene spielt.

Setzt man diesen Weg über das Ziel hinaus in gleicher Weise fort, so gelangt man schließlich wieder zum Ausgangspunkt A zurück. Dieser vollständige Weg ist ein Kreis, dem Äquator auf der Erdkugel vergleichbar. Größere Kreise gibt es auf der Oberfläche einer Kugel nicht. Man nennt sie daher Großkreise. Sie halbieren die Oberfläche der Kugel. Alle anderen Kreise auf einer Kugel, Kleinkreise genannt, spielen in der Kugelgeometrie die gleiche Rolle wie die Kreise in einer Ebene. Beispiele hierfür sind auf der Erdkugel die Breitenkreise, mit Ausnahme des Äquators (Figur 2).

Alle Kugelkreise haben, anschaulich gesprochen, zwei Mittelpunkte. Es sind dies die Endpunkte desjenigen Kugeldurchmessers, der auf der Ebene des betreffenden Kugelkreises senkrecht steht. Zum Vergleich: Auf der Erdkugel sind Nord- und Südpol die beiden Mittelpunkte jedes Breitenkreises. Und doch besteht in dieser Hinsicht ein wesentlicher Unterschied zwischen Groß- und Kleinkreisen. Letzteren kann man einen Mittelpunkt eindeutig zuordnen. Es soll derjenige sein, von dem alle Kreispunkte die Entfernung haben, die kleiner ist als ein viertel Umfang der Kugel. Diese Unterscheidung ist bei den Großkreisen nicht möglich. Alle Großkreispunkte haben von beiden Mittelpunkten die gleiche Entfernung, nämlich genau einen viertel Kugelumfang.

Es gibt noch einen weiteren schwerwiegenden Unterschied zwischen Groß- und Kleinkreisen. Zwei Kleinkreise können sich in zwei Punkten schneiden, sie können einander berühren oder auch keine Punkte gemeinsam haben, wie man dies von den Kreisen in einer Ebene kennt. Zwei Großkreise schneiden sich stets, und zwar in zwei diametral gegenüberliegenden Kugelpunkten (Gegenpunkte, Antipoden). Ein Großkreis und ein Kleinkreis können die gleiche Lagebeziehung zueinander haben wie ein Kreis und eine Gerade in der Ebene. Was beim Großkreis Inneres und Äußeres sein soll, ist aus der Anschauung nicht zu entscheiden.

Dem entspricht in der Ebene, dass sie durch eine Gerade in zwei Halbebenen geteilt wird, die als „gleichberechtigt“ anzusehen sind.

Vorläufig zusammenfassend kann man sagen: Es gibt eine sehr weitgehende Entsprechung zwischen Punkt, Gerade und Kreis in der ebenen Geometrie sowie Punkt, Großkreis und Kleinkreis in der Kugelgeometrie. Doch ist diese Entsprechung nicht ganz perfekt. Es wird sich herausstellen, dass damit so manche überraschende Besonderheit der Kugelgeometrie zusammenhängt.

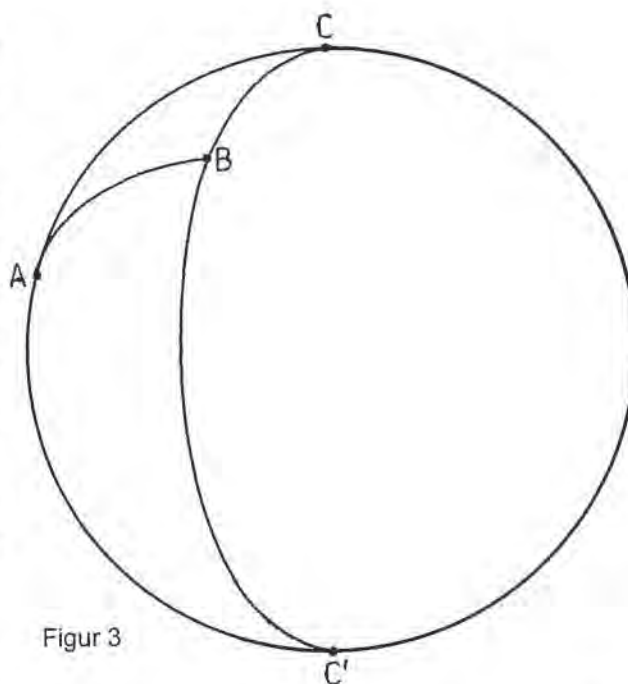
Gehen wir nun an die Untersuchung der Kugeldreiecke. Während man in der Ebene ein Dreieck durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig festlegen kann, ist dies auf der Kugel nicht ganz so einfach. Entsprechend muss man jedenfalls fordern, dass die drei Punkte nicht auf einem Großkreis liegen. (Insbesondere dürfen keine zwei von diesen Punkten Antipoden sein, weil diese Forderung bei jeder beliebigen Lage des dritten Punktes nicht mehr erfüllbar ist.) Weil es durch je zwei Punkte, die nicht Antipoden sind, stets genau einen Großkreis gibt und dieser durch diese Punkte in zwei ungleiche Bögen geteilt wird, muss man zusätzlich festlegen, welcher dieser Bögen die Dreiecksseite sein soll. Festgelegt wurde, dass dies stets der kürzere der beiden Bögen sein soll (Eulersche Dreiecke).

Nun kann man daran gehen, sphärische Dreiecke zu berechnen. Welche Aussagen lassen sich z. B. über Umfang, Flächeninhalt und Winkelsumme machen? – Ein Punkt kann sich auf einer Kugel zwar unbegrenzt bewegen, wie in einer Ebene auch; doch hat die Kugeloberfläche einen endlichen Inhalt, im Gegensatz zur Ebene. Dies muss wohl Folgen haben für Umfang und Inhalt eines Kugeldreiecks. Sie müssen offensichtlich begrenzt sein. Doch wie findet man die Grenzen?

Ein fundamentales Gesetz für ebene Dreiecke gilt auch für sphärische. Zwei Seiten

Seiten sind zusammen länger als die dritte. Die Begründung ist für beide Arten von Dreiecken gleich. Ist zum Beispiel AB eine Seite und damit kürzester Weg von A nach B , so kann man $AC + CB$ auffassen als einen anderen Weg, nämlich von A über C nach B , und somit als einen längeren Weg. Entsprechendes gilt für die Wege BC und CA und die zugehörigen Umwege.

Nun seien ABC und ABC' zwei Dreiecke mit C und C' als Antipoden (Figur 3). Zusammen bilden sie das „Zweieck“ CC' .



Figur 3

Für das Dreieck ABC' gilt nach obigen Gesetz

$$AB < AC' + C'B.$$

Weil C und C' Antipoden sind, gilt ferner

$$AC' = CC' - AC$$

und

$$BC' = CC' - BC.$$

Daraus folgt

$$AB < (CC' - AC) + (CC' - BC)$$

und somit

$$AB + BC + AC < 2 \cdot CC'.$$

Links steht der Umfang des Dreiecks, rechts der Umfang eines Großkreises. Dieser stellt also die Obergrenze für den Umfang des Dreiecks dar. – Zumindest gefühlsmäßig kann man sich dieser Gesetzmäßigkeit auch mit Hilfe der Vorstellung nähern. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man, den Erdglobus zugrundelegend, die Seite AB auf den Äquator verlegen, und die Ecke C auf die Nordhalbkugel. Will man nun ein Dreieck mit möglichst großem Umfang erhalten, so wird man C „gegenüber“ AB sehr nahe an den Äquator legen. Dann müssen die Dreiecksseiten AC und BC sehr nahe an dem Äquator verlaufen. Außerdem liegt AB exakt auf dem Äquator. Die Umfangslinie des Dreiecks kommt dem Äquator sehr nahe, und zwar umso näher, je geringer der Abstand der Ecke C vom Äquator ist. So mag einleuchten, dass der Dreiecksumfang sich dem Umfang eines Großkreises zwar beliebig annähern, ihn aber nicht erreichen kann.

Die hier entwickelte Vorstellung legt auch die Vermutung nahe, dass der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks durch den der Halbkugel ebenfalls nach oben begrenzt wird.

Schließlich müssen alle drei Winkel eines solchen Dreiecks, welches die Nordhalbkugel fast vollständig überdeckt, sehr stumpf sein¹. In Bezug auf die Winkelsumme muss also mit einem Gesetz gerechnet werden, das von demjenigen für ebene Dreiecke weit abweicht. Entdeckt man nun auch noch, dass es auf einer Kugel höchst merkwürdige Dreiecke gibt, dann wird das Problem der Winkelsumme noch spannender. Liegen nämlich z. B. A und B auf dem Äquator und C im Nordpol, so sind α und β rechte Winkel, während γ beliebig ist, unter Umständen sogar auch ein rechter. – Lauter Beispiele mit unterschiedlichen Winkelsummen, und alle größer als 180° !

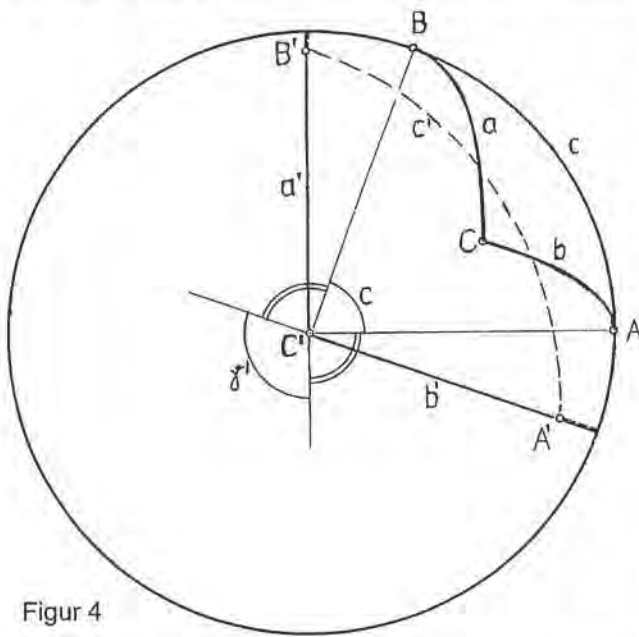
Wie aber kommt man zu einem zahlenmäßig fassbaren Gesetz? Um hier voran zu kommen, kann man zunächst den Begriff des Polardreiecks $A'B'C'$ eines Dreiecks ABC herausarbeiten und zeigen, dass das Polardreieck von $A'B'C'$ wieder das ursprüngliche Dreieck ABC ist. Davon sei einiges angedeutet.

Jeder Großkreis, in einem bestimmten Sinn durchlaufen, besitzt einen Links- und einen Rechtspol. Am Beispiel des Äquator verdeutlicht: Wird er in östlicher Richtung durchlaufen, so ist der Nordpol der Linkspol und der Südpol der Rechtspol. Bei entgegengesetztem Um-

¹ Unter dem Maß für den Winkel zwischen zwei Großkreisen versteht man das Maß desjenigen Winkels, den die beiden Kreistangenten im Scheitel bilden.

laufsinn ist es umgekehrt. Durchläuft nun ein Punkt das Dreieck ABC in der Reihenfolge A B C A, so gibt es zu jeder so durchlaufenen Seite einen eindeutig bestimmten Linkspol. Dann legen diese drei Pole A', B', C' ein neues Dreieck fest. (Man könnte natürlich auch die drei Rechtspole wählen.) A'B'C' ist das Polardreieck von ABC. Es lässt sich auch zeigen, dass ABC wieder das Polardreieck von A'B'C' ist. Ferner lässt sich, z. B. mit Hilfe der darstellenden Geometrie, zeigen, dass sich die Seiten eines Dreiecks und die entsprechenden Winkel des Polardreiecks zu 180° ergänzen.

Spätestens hier ist darauf hinzuweisen, dass es zweckmäßig ist, als Maß für die Seite eines sphärischen Dreiecks einen Winkel zu wählen, und zwar denjenigen, der entsteht, wenn man die Endpunkte der Seiten mit dem Kugelmittelpunkt verbindet.



Figur 4

Bildet man nun das Dreieck ABC mit der Seite $c = AB$ auf dem Äquator und der Ecke C auf der Nordhalbkugel o. B. d. A. durch senkrechte Parallelprojektion auf die Äquatorebene ab, so kommt dabei der Pol C' der Seite $c = AB$ in den Mittelpunkt des Äquators zu liegen (Figur 4). Dort erscheint dann der Winkel als Maß für die Seite c in wahrer Größe, ebenso der Winkel γ' des Polardreiecks A'B'C'. Dessen Ecken A' und B' müssen in der Projektion nicht exakt ermittelt werden. Es genügt festzustellen, dass A' auf

auf einem Radius rechtwinklig zu dem zu B gehörigen Durchmesser liegen muss und B' entsprechend auf dem Radius senkrecht zu dem zu A gehörigen Durchmesser. So ergeben c, γ' und zwei rechte Winkel zusammen den Vollwinkel 360° . Damit haben wir, entsprechend verallgemeinert, das bereits erwähnte Gesetz, jetzt in Form von Gleichungen:

$$a + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma' = a' + \alpha = b' + \beta = c' + \gamma = 180^\circ$$

Wendet man nun das Gesetz über die Seitensumme sphärischer Dreiecke auf das Dreieck A'B'C' an, das heißt $0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ$, führt man dann die eben gefundene Beziehung zwischen den Winkeln von ABC und den Seiten von A'B'C' ein, so ergibt sich einerseits:

$$0^\circ < (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma < 540^\circ} \quad \text{und andererseits}$$

$$360^\circ > (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ}.$$

Die geometrischen Vorbereitungen zum Beweis dieses Winkelsummengesetzes sind nicht gerade anspruchslos, aber für die Schüler doch Schritt für Schritt nachvollziehbar, wenn – z. B. im 10. Schuljahr – durch eine entsprechende Behandlung der darstellenden Geometrie die erforderlichen Grundlagen geschaffen wurden. Der weitere Fortgang des Beweises mit Gleichungen und Ungleichungen und deren Umformungen ist von ganz anderer Qualität. So kommen die mehr auf die Anschauung angewiesenen und die mehr zu den Zahlen und dem Rechnen bzw. der Algebra tendierenden Schüler in unterschiedlicher Weise auf ihre Kosten. Dass die Winkelsumme nach oben durch $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ begrenzt ist, darauf deuten bereits die rein geometrischen Betrachtungen auf der Erdkugel hin. Dass sie auch stets $> 180^\circ$ sein muss, lassen die angeführten Beispiele vermuten. Außerdem kann man das Gefühl haben, dass ein Teil einer Kugeloberfläche umso „ebener“ ist, je kleiner er im Verhältnis zur Gesamtoberfläche ist. Dies Gefühl wird gestützt durch eine Erfahrung, die man in einer ebenen Landschaft oder am Meeresstrand machen kann. Die Fläche in der überschaubaren Umgebung erlebt man als eben, obwohl man weiß, dass sie Teil einer überall gleich gekrümmten Kugeloberfläche ist. (Von der Abweichung des Geoids von der Kugelgestalt kann hier abgesehen werden.) So kann sich die (ja auch berechtigte) Meinung einstellen, die Verhältnisse auf einer sphärischen Dreiecksfläche kämen denen auf einem ebenen Dreieck umso näher, je „ebener“ die sphärische Fläche im Verhältnis zur gesamten Kugeloberfläche ist. Die Konsequenz daraus ist, dass die Winkelsumme dem Wert 180° immer näher kommt.

Eine solche Betrachtungs- bzw. Vorgehensweise ist nicht im strengen Sinne exakt. Dafür kann sie leichter erlebnismäßig gesättigt gestaltet werden. Darauf sind nach meiner Erfahrung recht viele Schüler und Schülerinnen angewiesen. Gegenüber der mehr auf Rechnen, Algebra und logische Gedankenführung gestützten Beweisführung empfindet man zurecht, dass sie streng und exakt ist, aber auch schwerer zugänglich, vor allem für die auf die Anschauung stark angewiesenen Schülerinnen und Schüler.

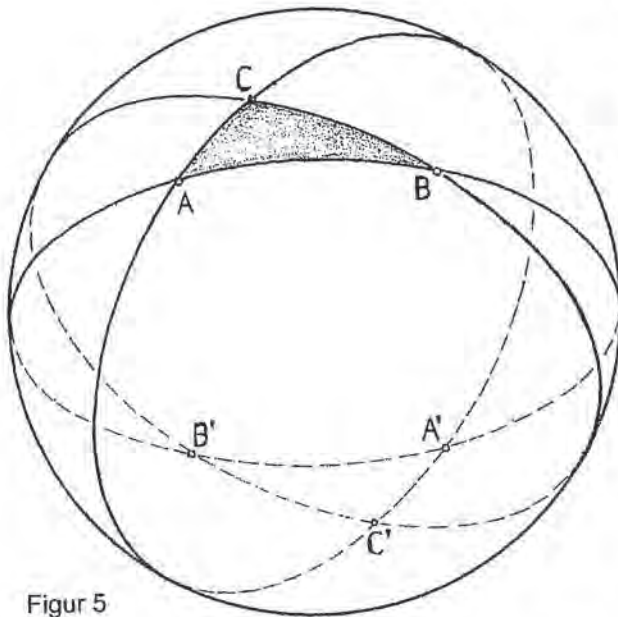
Auch die Berechnung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks fördert Staunenswertes zutage. Es sei ABC ein beliebiges sphärisches Dreieck mit dem Flächeninhalt F . Die Antipoden seiner Eckpunkte bilden sein Gegendreieck $A'B'C'$, welches zu ABC gegensinnig kongruent ist. Durch die drei Großkreise durch A , B und C werden sechs weitere Dreiecke gebildet:

Die drei Nebendreiecke ABC' , BCA' und CAB' von ABC ,

die an dieses Dreieck längst dessen Seiten angrenzen, und

die drei Scheiteldreiecke $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ von ABC ,

die an die Ecken dieses Dreiecks anstoßen.



Figur 5

Die ersteren sind zugleich Scheiteldreiecke von $A'B'C'$, die letzteren sind Nebendreiecke von $A'B'C'$.

Schließlich sind ABC' und $CA'B'$, BCA' und $AB'C'$, CAB' und $BC'A'$ Paare von Gegendreiecken, also ebenfalls jeweils gegenseitig kongruent.

Betrachtet man nun das Gebilde, welches sich zusammensetzt aus ABC und seinen drei Nebendreiecken (Figur 5), so geht aus dem Dargestellten hervor, dass es die Hälfte der Kugeloberfläche einnimmt. Außerdem kann man es sich entstanden

denken durch Zusammenfügung von 3 „Kugelzweiecken“ mit den Zweieckswinkeln α , β , und γ , die sich im Dreieck ABC dreifach überlappen.

Deren Flächeninhalte $4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$, $4\pi R^2 \cdot \frac{\beta}{360^\circ}$ und $4\pi R^2 \cdot \frac{\gamma}{360^\circ}$ sind also zusammen um das Doppelte von F größer als die halbe Kugeloberfläche mit dem Inhalt $2\pi R^2$ (R ist der Kugelradius). So ergibt sich die Gleichung

$$2\pi R^2 = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360^\circ} - 2F, \text{ und daraus folgt:}$$

$$F = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ}{180^\circ}$$

Im Zähler des Bruches steht derjenige Winkel, um den die Winkelsumme des betreffenden sphärischen Dreiecks größer ist als die eines ebenen Dreiecks. Man nennt ihn den sphärischen Exzess des Dreiecks ABC .

Was lässt sich nun aus diesem Ergebnis ablesen?

- Es bestätigt sich, dass die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ sein muss. Die gefundene Formel ergäbe sonst kein positives Ergebnis für F .
- Es bestätigt sich auch, dass wegen $\alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$ F kleiner sein muss als der halbe Inhalt der Kugeloberfläche.
- Zur Berechnung des Dreiecksinhalts bedarf es nicht der Kenntnis einer Dreiecksseite. Außer von der Größe der Kugel, die durch R vorgegeben ist, hängt der Inhalt allein vom sphärischen Exzess ab. Dies bedeutet auch, dass man die drei Winkel nicht einmal einzeln kennen muss. Es genügt die Kenntnis ihrer Summe.

- Stimmen zwei Dreiecke in den Winkeln überein, so sind sie auch gleich groß. Bei ebenen Dreiecken ist dies im allgemeinen nicht der Fall, d. h. sie haben nur gleiche Gestalt, aber nicht gleiche Größe. Man kann also vermuten, dass es ähnliche sphärischen Dreiecke gar nicht gibt (auf derselben Kugel liegend!); mit anderen Worten: dass Dreiecke, die in den Winkeln übereinstimmen, kongruent sein müssen.

Deutlich wird, dass sich die Geometrie auf der Oberfläche einer Kugel grundlegend unterscheidet von der ebenen Geometrie. Das regt zu weiteren Fragen an, z. B. nach der konstruktiven Geometrie. Was entspricht der Konstruktion mit Zirkel und Lineal (für die Ebene) auf der Kugel? Löst man Konstruktionsaufgaben einfach dadurch, dass man die Lösungswege für die entsprechenden Aufgaben in der Ebene denen für die Kugel in geeigneter Weise anpasst? Dies müsste bedeuten, dass die Rolle der Geraden als Konstruktionslinien von den Großkreisen übernommen wird. Schließlich ist auch die Frage, ob es Lehrsätze der ebenen Geometrie gibt, die entsprechend auf die Kugel übertragbar sind. Wie wir bereits wissen, trifft dies für den Satz von der Winkelsumme im Dreieck nicht zu. – Gehen wir nun diesen Fragen anhand einiger Beispiele nach!

Als Zeichengerät dient uns der sphärische Zirkel, ein Gerät, mit dem man Groß- und Kleinkreise auf die Kugel zeichnen kann.

Das Problem beginnt bereits mit dem Verbinden zweier Punkte durch den eindeutig bestimmten Großkreis. Während man bei der entsprechenden Aufgabe in der Ebene einfach die Linealkante an die Punkte anlegt und dann die Linie zieht, ist dies eine regelrechte Konstruktionsaufgabe auf der Kugel. Man schlägt um beide Punkte A und B Großkreise. Deren Schnittpunkte haben von A und B das Entfernungsmaß 90° , einem viertel Großkreis entsprechend. Schlägt man um einen der Schnittpunkte den Großkreis, so muss dieser durch A und B gehen. Er ist also der gesuchte Verbindungsgroßkreis. In der Ebene würde man bei solchem Vorgehen von einer Konstruktion mit dem Lineal allein sprechen.

Läuft die bekannte Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke AB (in der Ebene) auf der Kugel ganz entsprechend? Es wären dann zwei gleich große und einander schneidende Kleinkreise um A und B zu zeichnen und die beiden Schnittpunkte nach dem oben angegebenen Verfahren durch einen Großkreis zu verbinden. Dieser ist durch die Konstruktion eindeutig bestimmt und stellt die gesuchte „Mittelsenkrechte“ dar. Die Frage ist allenfalls, ob die beiden Kleinkreise durch Großkreise ersetzt werden können. Deren Schnittpunkte sind Antipoden, und dies verhindert den eindeutigen Fortgang der Konstruktion.

Auch das Fällen des Lots von einem Punkt P auf einen Großkreis g gelingt analog zu der bekannten, entsprechenden Konstruktion in der Ebene. Hier geht es aber auch anders! Zieht man nämlich um P den Großkreis, so schneidet dieser g in zwei Antipoden. Zieht man dann um einen dieser beiden Punkte einen weiteren Großkreis, so ist dieser bereits der gesuchte. Er muss nämlich durch den gegebenen Punkt gehen und den gegebenen Großkreis recht-

winklig schneiden, weil sein Mittelpunkt auf diesem liegt. Es geht also, im übertragenen Sinne gesprochen, auch „mit dem Lineal allein“.

Man versuche einmal, einen Winkel zwischen zwei Großkreisen durch einen dritten zu halbieren. Insbesondere prüfe man, ob die bei der Konstruktion eingesetzten Kleinkreise durch Großkreise ersetzt werden können.

Nun zu einigen Lehrsätzen aus der klassischen Schulgeometrie!

Bekanntlich gibt es zu jedem ebenen Dreieck die vier besonderen Punkte: den Umkreismittelpunkt U , den Inkreismittelpunkt I , den Höhenschnittpunkt H und den Schwerpunkt S . Gemeinsam ist ihnen, dass sie die Schnittpunkte von je drei Dreieckstransversalen sind. Die Frage ist nun, ob sich die entsprechenden Transversalen eines sphärischen Dreiecks auch jeweils in einem Punkt schneiden.

Zwei der vier Fragestellungen seien herausgegriffen und möglichst weit bearbeitet. Das Übrige sei dem Leser als Anregung zum eigenen Studium überlassen. – Befassen wir uns zunächst mit den Halbierenden der Innenwinkel eines sphärischen Dreiecks. Es handelt sich um Großkreise, die man eindeutig konstruieren kann. (Oben angedeutet, ohne nähere Begründung.) Jeder Punkt eines solchen Großkreises hat von den Schenkeln² des Winkels, den er halbiert, gleiche Abstände. Man kann also um ihn einen Kleinkreis ziehen, der beide Schenkel berührt. Greifen wir nun zwei der drei winkelhalbierenden Großkreise heraus. Sie haben zwei Schnittpunkte, von denen einer im Innern des Dreiecks liegt, der andere im Innern von dessen Gegendreieck. Ersterer hat von den Schenkeln zweier Winkel unseres Dreiecks gleiche Abstände, d. h. insbesondere auch von den Schenkeln des dritten Winkels. Er muss also auch auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels liegen. Er ist der (einzig mögliche) Punkt als Mittelpunkt eines Kleinkreises, der alle Seiten des Dreiecks berührt. –

Auch der Satz vom Umkreismittelpunkt eines ebenen Dreiecks gilt entsprechend auf der Kugel. Die Beweisführung verläuft entsprechend.

Wenden wir uns nun der Frage zu, ob sich die drei Höhen eines sphärischen Dreiecks in einem Punkt schneiden. Zunächst ist festzustellen, dass diese Höhen als Lote von einer Ecke auf die gegenüberliegenden Seite eindeutig konstruiert werden können. Ein häufig verwendeter Beweis des Satzes vom Höhenschnittpunkt in der ebenen Geometrie bedient sich der Tatsache, dass sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt treffen. Das Problem der Höhen wird dann zurückgeführt auf das gelöste Problem der Mittelsenkrechten. Nun lässt sich zeigen (worauf wir hier verzichten), dass sich auch beim sphärischen Dreieck die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden. Aber es gelingt nicht, auf der Kugel den Zusammenhang zwischen Höhen und Mittelsenkrechten in gleicher Weise herzustellen wie in der Ebene. Man müsste durch jede Ecke des Dreiecks den zur gegenüberliegenden Seite

² Unter den Schenkeln sind hier nicht die Kugeltangenten im Scheitel zu verstehen, sondern die Dreiecksseiten

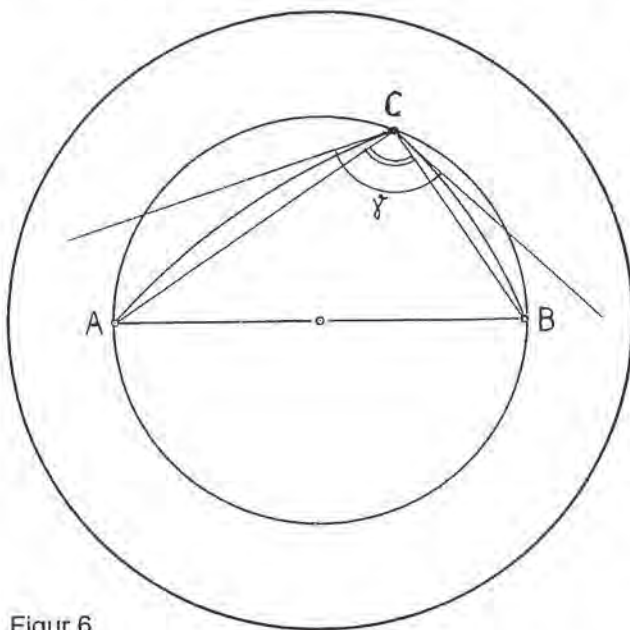
parallelen Großkreis legen. Weil es parallele Großkreise auf einer Kugel gar nicht gibt, ist dies prinzipiell unmöglich. Nun ist zweierlei denkbar: Entweder führt ein anderer Beweis, der noch zu finden wäre, zum Ziel, und die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt; oder das Gegenteil ist der Fall, und jeder Beweisversuch muss scheitern. –

Wie steht es mit dem Satz des Thales? Wenn er auf die Kugel übertragbar ist, muss das Folgende gelten: Es sei AB ein Großkreisbogen, der zugleich Durchmesser eines Kleinkreises ist (kleinstmöglicher Kleinkreis durch A und B). C sei ein von A und B verschiedener Punkt auf dem Kleinkreis. Das sphärische Dreieck ABC wird nun dadurch vervollständigt, dass man C mit A und mit B durch die eindeutig bestimmten Großkreisbögen verbindet. Zu untersuchen ist, ob sich die Großkreisbögen AC und BC unter einem rechten Winkel in C treffen.

Mit Hilfe der darstellenden Geometrie soll ein Versuch unternommen werden. Zur Durchführung

der Konstruktion bedienen wir uns des Erdglobus als einer leicht überschaubaren Kugel und legen den Bogen AB so auf einen Längenkreis, dass der Mittelpunkt der Bogenstrecke auf den Nordpol zu liegen kommt (Figur 6). Der Kleinkreis, der AB als Durchmesser hat, ist dann der gemeinsame Breitenkreis von A und B, auf dem auch C liegt. Nun bilden wir das sphärische Dreieck ABC und den Breitenkreis durch senkrechte Parallelprojektion auf eine zur Breitenkreisebene parallele Ebene ab.

In der Projektion erscheint das Bild des



Figur 6

sphärischen Dreiecks ABC als ein Gebilde, begrenzt von einer geradlinigen Seite AB und zwei Ellipsenbögen AC und BC. Diese treffen sich in C unter einem stumpfen Winkel. Warum? Verbindet man nämlich A und B in der Projektion zusätzlich mit C geradlinig, so ist das ebene Dreieck ABC rechtwinklig, mit dem rechten Winkel bei C, weil der Breitenkreis – in wahrer Gestalt abgebildet – Thaleskreis dieses ebenen Dreiecks ist. Natürlich ist hier auch AB als geradlinige Strecke gemeint. Das Winkelfeld des rechten Winkels liegt vollständig innerhalb des Winkelfeldes, welches von den beiden Ellipsentangenten in C aufgespannt wird. Diese schließen also einen stumpfen Winkel ein. Dieser Winkel ist die Projektion des eigentlichen Winkels γ unseres sphärischen Dreiecks ABC, gebildet aus den Tangenten an die Großkreise durch A und C bzw. B und C. Die Tangentialebene an die Kugel in C, in der die beiden Tangenten liegen, ist gegen die Projektionsebene geneigt. Deshalb muss der

wahre Winkel γ kleiner sein als seine stumpfwinklige Projektion. Ob er allerdings ein rechter Winkel ist, das bleibt weiterhin die Frage.

Durch eine tiefer gehende Untersuchung mit den Mitteln der darstellenden Geometrie (Bestimmung der wahren Größe des sphärischen Winkels γ , einschließlich Klärung der Frage, ob es ein rechter Winkel sein muss oder nicht sein kann) oder im Rahmen der vektoriellen analytischen Geometrie kann man diese Frage weiter verfolgen und dann endgültig beantworten. Legt man das Koordinatensystem entsprechend unserer geometrischen Betrachtung günstig, dann ist die Rechnung weder allzu lang noch besonders schwierig.

Nun soll noch der Frage nachgegangen werden, ob sich der Satz des Pythagoras auf die Kugel übertragen lässt. Um es vorweg zu nehmen: Es ist nicht möglich. Aber nicht deswegen, weil die bekannte Beziehung zwischen den drei Quadraten am ebenen rechtwinkligen Dreieck auf die Kugel nicht zutrifft. Der Grund liegt tiefer und ist sehr elementar. Es gibt nämlich auf einer Kugel keine Quadrate!

Die Erfahrung hat immer wieder gezeigt, dass die Schüler an die Frage der Quadrate meistens konstruktiv herangehen, mit der unbewussten Annahme, es gebe Quadrate. Eine Vorstellung, die sie z. B. gerne bilden, geht vom Erdglobus von zwei Längengraden aus, die nach Norden und Süden von zwei Breitenkreisen begrenzt werden, welche vom Äquator gleichen Abstand haben. So entsteht ein Viereck mit vier rechten Winkeln. Außerdem ist es möglich, es so einzurichten, dass die beiden Breitenkreisbögen so lang sind wie die beiden Längengradbögen. Diese haben ein Minimum mit dem Maß 0° und ein Maximum mit dem Maß 180° , mit zunehmender geographischer Breite der Breitenkreisbögen stetig wachsend. Gleichzeitig nimmt die Länge der Breitenkreisbögen, ausgehend von einem Maximum, wenn sie in einem Extremfall auf dem Äquator liegen, stetig ab gegen das Minimum 0° , wenn sie an den Polen angekommen und zum Punkt geschrumpft sind. So muss es für die Breitenkreise eine bestimmte Position geben, wo alle vier Vierecksseiten gleich lang sind.

So weit, so gut. Aber leider sind zwei der Vierecksseiten keine Großkreisbögen. Das wird im Eifer der konstruktiven Überlegungen leicht übersehen, wie auch die Tatsache, dass zwei Großkreisbögen – genügend verlängert – sich stets schneiden, und zwar gleich zweimal.

Es ist auch möglich, ein von vier Großkreisbögen begrenztes Viereck zu bilden, welches vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel hat. Aber auch hier sind gegenüberliegende Seiten nicht parallel, und die vier gleichen Winkel müssen stumpf sein. Wären es rechte Winkel, so würde ein diagonal verlaufender Großkreisbogen das Viereck in zwei gleichschenkelig rechtwinklige Dreiecke mit der Winkelsumme 180° aufteilen, was im Widerspruch zur Winkelsumme sphärischer Dreiecke steht.

Schließlich spricht auch das Formgefühl dafür, dass ein Viereck der beschriebenen Art aufgrund seiner Flächenwölbung nach außen gebogene Seiten hat, die in den Ecken stumpfe Winkel bedingen.

Die Reihe der Beispiele sei mit dieser Betrachtung zum Satz des Pythagoras abgeschlossen. Festzuhalten ist, dass nicht alle Gesetze der ebenen Geometrie bei entsprechender Übertragung auf die Kugel ihre Gültigkeit behalten. Außerdem musste manche Frage ungeklärt bleiben.

Beschäftigt man sich mit der sphärischen Geometrie in der beschriebenen Weise, dann kann man feststellen, dass hier sehr verschiedene Formen des Geometrisierens zum Zuge kommen können. Im Bereich des Zeichnens kommt die freie Skizze als ein Mittel zum Veranschaulichen in Betracht; zwar im strengen Sinne nicht exakt, aber durchaus dazu geeignet, Wesentliches hervorzuheben. Die darstellende Geometrie kommt dann zur Anwendung, wenn ein exaktes Bild, z. B. mittels senkrechter Parallelprojektion entstehen soll. Auch können konstruktive Überlegungen, die sich der Gesetze der verwendeten Projektion bedienen, zum Zwecke einer Beweisführung herangezogen werden. Auch die elementare konstruktive Geometrie, welche die Schüler in der Mittelstufe kennen gelernt haben, kommt beim Vergleich der sphärischen mit der ebenen euklidischen Geometrie als Wiederholung zum Zuge.

Das räumliche Vorstellungsvermögen, welches vor allem im 9. und 10. Schuljahr in der darstellenden Geometrie geschult wird, kann anhand ungewohnter Fragestellungen eine gründliche Vertiefung erfahren.

Die sphärische Geometrie darf man wohl mit Recht zu den mathematischen Gebieten zählen, welche die Schüler im Vergleich mit dem, was sie bisher gelernt haben, als etwas ganz ungewöhnlich Neues empfinden. Weil dies so ist, kann das Unterrichtsgespräch auch zu einer Besinnung auf die Grundlagen führen, z. B. auf den Unterschied zwischen Axiom, Postulat und Lehrsatz (im Sinne Euklids), aber auch auf die Notwendigkeit, Fragen überhaupt richtig zu stellen. Wenn es zum Beispiel um die Frage nach der Gültigkeit des Satzes des Pythagoras auf einer Kugel geht, besteht das Problem nicht darin, wie man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Quadrate findet, um dann den Größenvergleich anzustellen, sondern ob es auf einer Kugel überhaupt Quadrate gibt. – Damit sei angedeutet, dass die Behandlung der sphärischen Geometrie auch die Möglichkeit bietet, an Beispielen aus der Mathematik etwas zu lernen, was nicht nur für das mathematische Denken bedeutsam ist, sondern auch für das Denken in anderen Bereichen. Ich halte dies für eine Fächer übergreifende pädagogische Aufgabe im Unterricht der obersten Klassen. –

Die Vielfalt der geometrischen Tätigkeiten, die in einer solchen Epoche zum Zuge kommen können, erlaubt es auch, die Epoche sehr unterschiedlich zu gestalten; je nachdem, welche Stärken und Schwächen die Schüler mitbringen und welche Akzente man im Blick auf die jeweilige Klasse setzen will. Jedenfalls sollte man mit solchen Fragestellungen beginnen, mit denen man mehr auf den praktischen Verstand der Schüler rechnet. Die Behandlung der Grundlagenfragen sehe ich als Ziel an, nicht als Ausgangspunkt. Gelangt man bis dahin, dann kann sich noch die Schilderung eines bedeutsamen Gebiets der neueren Geometrie

anschließen: einige Grundgedanken der nichteuklidischen Geometrie, und darin vor allem die dramatische Geschichte der Lösung des Parallelenproblems.³

Zweierlei halte ich in diesem Zusammenhang für wichtig:

1. Wir erfahren, dass die Gewinnung mathematischer Erkenntnisse keineswegs allein eine Angelegenheit des an der Logik geschulten, nüchternen Verstandes sein muss, sondern die innere Beweglichkeit und Phantasie des mathematisch Forschenden herausfordern, ihn sogar seelisch durch Höhen und Tiefen führen kann, bis hin zu Lebenskrisen.
2. Gelingt es darüber hinaus, das Wesentliche einer Idee zur Lösung des Parallelenproblems elementar und einleuchtend darzustellen, dann hat man die Schüler an eine wichtige Erfahrung vielleicht erstmalig herangeführt: Der Mensch kann die Fähigkeit erwerben, ein Denken unabhängig von der Welt des durch die Sinne Erfahrbaren zu entwickeln.

Diesem pädagogischen Ziel möglichst nahe zukommen, wurde für mich zu einem wesentlichen Motiv, eine Epoche über sphärische Geometrie im Mathematikunterricht der 11. Klasse wenn irgend möglich unterzubringen. Bei konzentriertem Vorgehen kann man mit zwei Wochen auskommen.

³ Siehe „Die beiden Bolyai“ in: Beihefte zur Zeitschrift 'Elemente der Mathematik', Beiheft Nr. 11 - Mai 1951; Verlag Birkhäuser, Basel (vergriffen)

Von der inneren Symmetrie der Kugelgeometrie

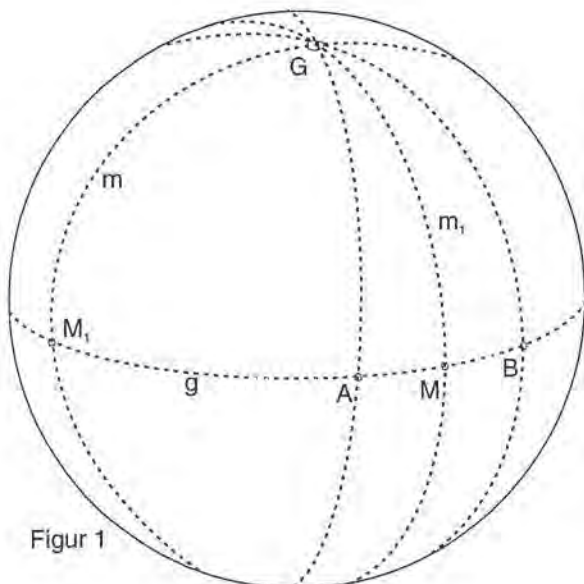
Uwe Hansen

Die innere Symmetrie der Kugelgeometrie beruht darauf, dass sich in natürlicher Weise der Zusammenhang von Pol und Polare ergibt:

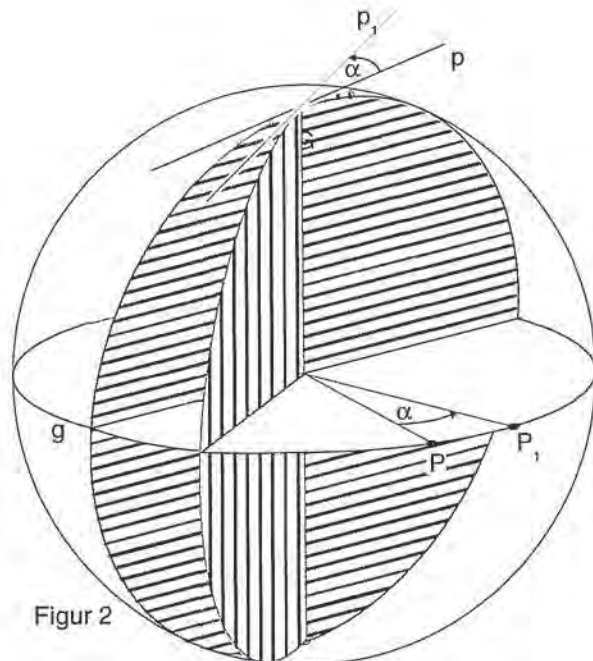
Der Kreis mit den Radius $p = 90^\circ$ um den Punkt P – dieser Kreis ist also ein Großkreis, d. h. eine Kugelgerade – ist die Polare p von P . Da jede Kugelgerade als Kreis mit dem Radius 90° angesehen werden kann, wobei zwei Gegenpunkte Kreismittelpunkt sein können, gibt es zu jeder Polare zwei Pole, die Gegenpunkte sind, d. h. identifiziert werden können.

Zwei Kugelpunkte A und B bestimmen eine Strecke AB . Die Polare m des Mittelpunktes M dieser Strecke (Figur 1) schneidet die Gerade $g = AB$ in einem weiteren Punkt M_1 , der von M 90° entfernt liegt. Dieser Punkt M_1 soll konjugierter Mittelpunkt der Strecke AB genannt werden. Die Polare m_1 zu M_1 geht dann durch M . m und m_1 schneiden sich im Pol G der Geraden g . Sie stehen daher senkrecht auf g , sie sind die beiden konjugierten Mittelsenkrechten von AB .

Diese beiden Mittelsenkrechten halbieren den Winkel zwischen den Geraden AG und BG . Sie sind also gleichzeitig Winkelhalbierende. Dass dies gilt, zeigt die folgende Überlegung (Figur 2):



Figur 1



Figur 2

Bewegt sich ein Punkt P auf einer Geraden g um den Winkel α zu P_1 , so dreht sich die Polare p von P im Pol G von g um denselben Winkel α zu p_1 . Es steht nämlich die Strecke $M_0P - M_0$ sei der Kugelmittelpunkt – stets senkrecht auf der Großkreisebene von p . Durchläuft P

den Winkel α nur zur Hälfte, so dreht sich auch die Polare im Pol G um den halben Winkel; d. h.: die Polaren der Mittelpunkte sind Winkelhalbierende.

Die Tatsache, dass eine Mittelsenkrechte einer Strecke gleichzeitig eine Winkelhalbierende im Pol der Strecke ist, zeigt einen erstaunlichen Zusammenhang eines Kugeldreiecks mit seinem Polardreieck. Wenn ABC ein beliebiges Kugeldreiecks ist, so bilden die Polaren der Dreiecksseiten die Seiten des Polardreiecks, dessen Ecken $A_1B_1C_1$ dann die Pole der Seiten von ABC sind.

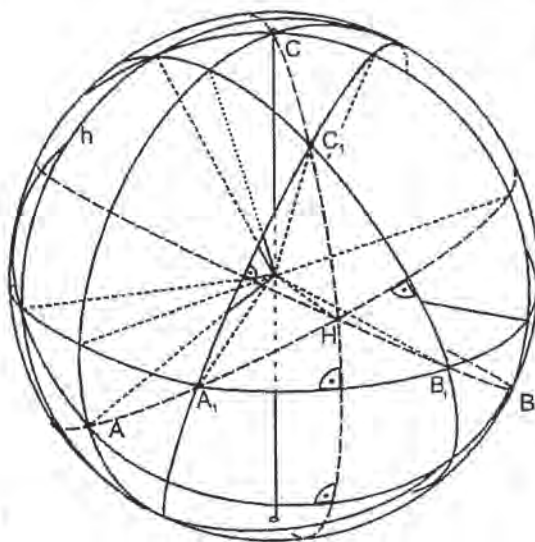
Da eine Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC gleichzeitig eine Winkelhalbierende des Polardreiecks $A_1B_1C_1$ ist, folgt, dass der Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck ABC gleichzeitig Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck $A_1B_1C_1$ ist.

Da ein Kugeldreieck einen Inkreis und drei Ankreise hat – die Inkreise der Nebendreiecke sind – gibt es zu jedem Dreieck auch vier Umkreise. Diese gehen durch die Ecken A B C bzw. $\bar{A}$ B C, A $\bar{B}$ C, A B $\bar{C}$, wobei $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ die Gegenecken von A, B, C sind.

Dieses Auftreten der Zahl vier beim Dreieck zeigt den Zusammenhang zur projektiven Geometrie - vgl. z. B. das Nebendreieck im vollständigen Viereck. So hat z. B. ein Kugeldreieck auch vier Schwerpunkte und polar dazu vier Leichtgeraden.

Die Kugelgerade, die durch eine Dreiecksseite und durch die entsprechende Ecke des Polardreiecks geht, muss dann die polaren

Dreiecksseiten senkrecht schneiden; z. B. steht die Gerade CC_1 senkrecht auf den Seiten AB und A_1B_1 (Figur 3). D. h.: die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ haben dieselben Höhen. Dreieck und Polardreieck sind perspektiv in Bezug auf den gemeinsamen Höhenschnittpunkt H und dessen Polare h.



Figur 3

Projiziert man die Kugeloberfläche von einem Kugelpunkt N aus auf die Tangentialebene des Gegenpunktes $\bar{N}$, so erhält man ein kreis- und winkeltreues Bild der Kugeloberfläche (stereographische Projektion). Großkreise sind dann die Kreise, die den Grundkreis in zwei Gegenpunkten schneiden, wobei der Grundkreis das Bild der Polaren von N (und von $\bar{N}$) ist.

Figur 4 auf der nächsten Seite zeigt die Gesetzmäßigkeit von Figur 3 als stereographische Projektion. Es ist zu erkennen, dass die Polare h von H die drei Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten enthält (ausgefüllte Punkte).

An einigen Beispielen soll gezeigt werden, wie konsequent sich das Gesetz der Polarität in der Kugelgeometrie anwenden lässt.

1. Beispiel: Die Verbindungsgerade von Dreiecksecke und Mittelpunkt der Gegenseite geht durch den Schwerpunkt des Dreiecks.

Polar: Die Schnittpunkte von Dreiecksseite und Winkelhalbierende der Gegenecke liegen auf einer Geraden, die man die "Leichtgerade" des Polardreiecks nennen kann.

2. Beispiel: Ein Punkt P durchläuft den Umkreis eines Dreiecks.

Polar: Eine Gerade p umläuft als Tangente den Inkreis des Polardreiecks.

3. Beispiel: Alle Punkte des Umkreises eines Dreiecks haben die selbe Entfernung zum Umkreismittelpunkt M.

Polar: Alle Tangenten des Inkreises des Polardreiecks schneiden die Polare von M unter dem gleichen Winkel. Diese Polare ist die Mittengerade des Inkreises - gegenräumlich betrachtet.

4. Beispiel: Eine Mittelsenkrechte einer Strecke halbiert diese Strecke im Mittelpunkt M und bildet mit ihr einen rechten Winkel.

Polar: Der konjugierte Mittelpunkt M_1 der Strecke bildet mit dem Pol G der Geraden AB eine "rechte Strecke" – d. h. $M_1G = 90^\circ$ –, außerdem halbiert M_1G den rechten Winkel zwischen AG und BG.

5. Beispiel: Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

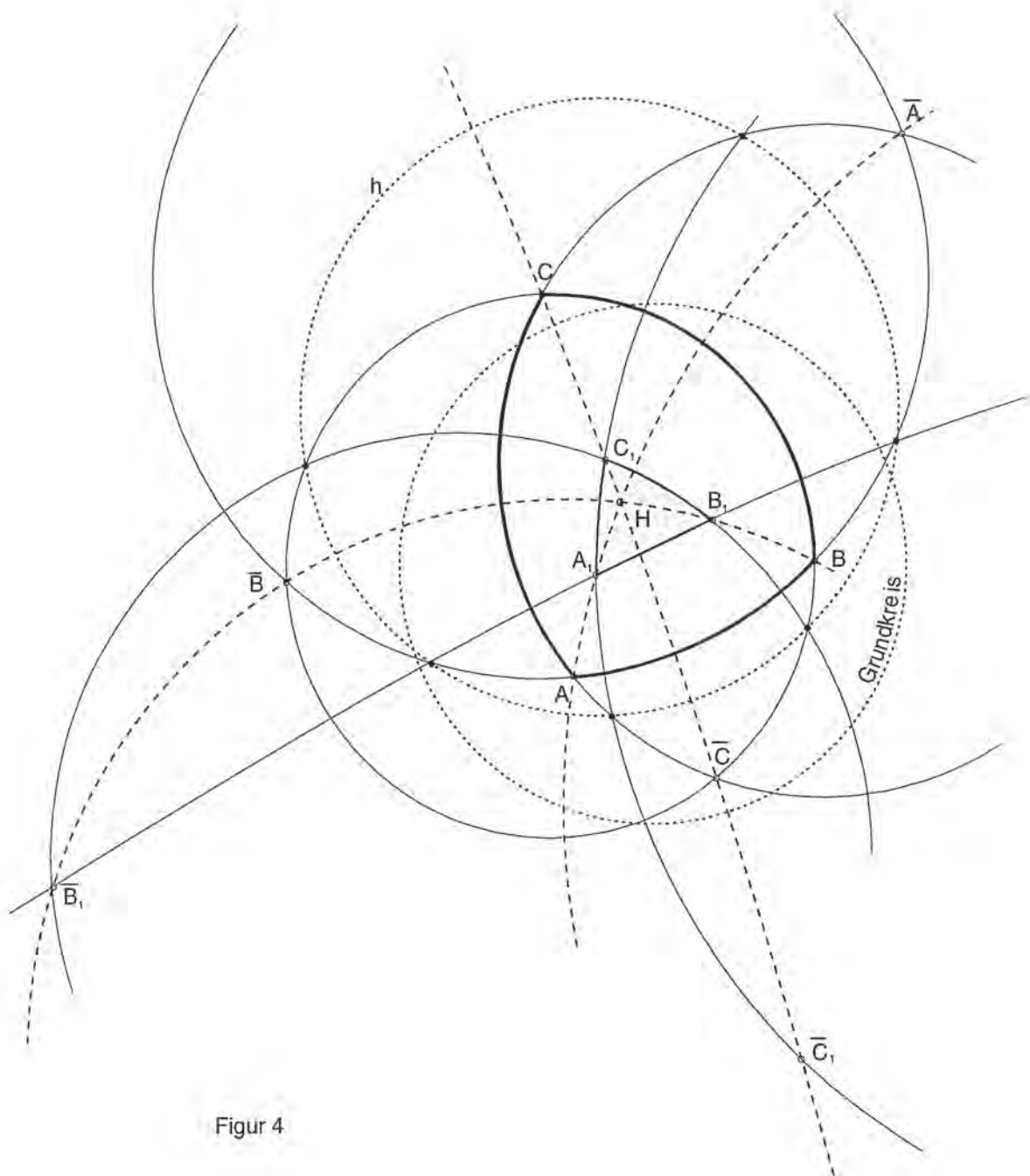
Polar: Die drei konjugierten Mittelpunkte der Dreiecksseiten liegen auf einer Geraden.

6. Beispiel: Fällt vom Punkt P das Lot auf die Gerade g, d. h.: Bestimme die Gerade l, die auf g senkrecht steht und durch P geht, bestimme also die Verbindungsgerade von P und dem Pol von g.

Polar: Gegeben ist eine Gerade p und ein Punkt G. Welcher Punkt von p bildet mit G eine rechte Strecke? Bestimme den Schnittpunkt von p mit der Polare von G.

7. Beispiel: Errichte in einem Punkt P einer Geraden g die Senkrechte, d. h. verbinde P mit dem Pol G der Geraden g.

Polar: Betrachte eine Gerade p eines Strahlenbüschels G. Schneide p mit der Polaren g von G; es entsteht eine rechte Strecke.



Figur 4

In der Kugelgeometrie gibt es keine Eulersche Gerade. D. h.: Bei einem Kugeldreieck liegen Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt nicht auf einem Großkreis.

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

Peter Baum

Im folgenden werden die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie mit Hilfe der Vektorrechnung hergeleitet.

Es seien A, B, C drei Punkte auf der Kugel mit dem Mittelpunkt $O(0/0/0)$ und dem Radius

$r = 1$, ihre Ortsvektoren werden mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ bezeichnet und haben den

Betrag 1. Die drei Winkel $a = (\vec{b}\vec{c}), b = (\vec{c}\vec{a}), c = (\vec{a}\vec{b})$ zwischen den Ortsvektoren sind dann die Seiten des Kugeldreiecks, sie sind größer als 0° und kleiner als 180° (Eulersches Dreieck).

Die Winkel des Kugeldreiecks sind die Winkel zwischen den Ebenen des Kugeldreiecks:

$$\alpha = (\text{OAB})(\text{OCA}), \beta = (\text{OBC})(\text{OAB}), \gamma = (\text{OCA})(\text{OBC}).$$

Es sind auch die Winkel zwischen den Normalenvektoren dieser Ebenen. Die Normalenvektoren der Ebenen erhalten wir durch die drei Vektorprodukte der Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{n}_a = \vec{b} \times \vec{c}, \vec{n}_b = \vec{c} \times \vec{a}, \vec{n}_c = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Für die Beträge der Normalenvektoren erhält man $|\vec{n}_a| = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin(\vec{b}\vec{c}) = \sin a$

und entsprechend $|\vec{n}_b| = \sin b, |\vec{n}_c| = \sin c$. Dann ist einerseits

$$\vec{n}_b \cdot \vec{n}_c = \cos \alpha \cdot |\vec{n}_b| \cdot |\vec{n}_c| = \cos \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c \quad \text{und andererseits}$$

$$\vec{n}_b \cdot \vec{n}_c = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c}\vec{a}) \cdot (\vec{a}\vec{b}) - (\vec{c}\vec{b}) \cdot (\vec{a}\vec{a}) = \cos b \cdot \cos c - \cos a$$

$$\text{also} \quad \cos \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c = \cos b \cdot \cos c - \cos a$$

Durch Auflösung nach $\cos a$ erhalten wir den Seitencosinussatz:

$$\boxed{\cos a = \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha}$$

Ferner ist einerseits $|\vec{n}_b \times \vec{n}_c| = \sin \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c$ und andererseits

$$\begin{aligned} |\vec{n}_b \times \vec{n}_c| &= |(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})| = |((\vec{c} \times \vec{a})\vec{b})\vec{a} - ((\vec{c} \times \vec{a})\vec{a})\vec{b}| \\ &= |((\vec{c} \times \vec{a})\vec{b})\vec{a}| = |((\vec{c} \times \vec{a})\vec{b})| = |\vec{n}_b \vec{b}| = \sin b \cdot \cos(\vec{n}_b \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \cos(\vec{n}_b \vec{b}) = \sin \alpha \cdot \sin c$$

Ebenso folgt einerseits $|\vec{n}_b \times \vec{n}_a| = \sin \gamma \cdot \sin b \cdot \sin a$ und andererseits

$$\begin{aligned} |\vec{n}_b \times \vec{n}_a| &= |(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{b} \times \vec{c})| = |((\vec{c} \times \vec{a}) \vec{c}) \vec{b} - ((\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b}) \vec{c}| \\ &= |((\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b}) \vec{c}| = |((\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b})| = |\vec{n}_b \vec{b}| = \sin b \cdot \cos(\vec{n}_b \vec{b}) \end{aligned}$$

also $\cos(\vec{n}_b \vec{b}) = \sin \gamma \cdot \sin a$

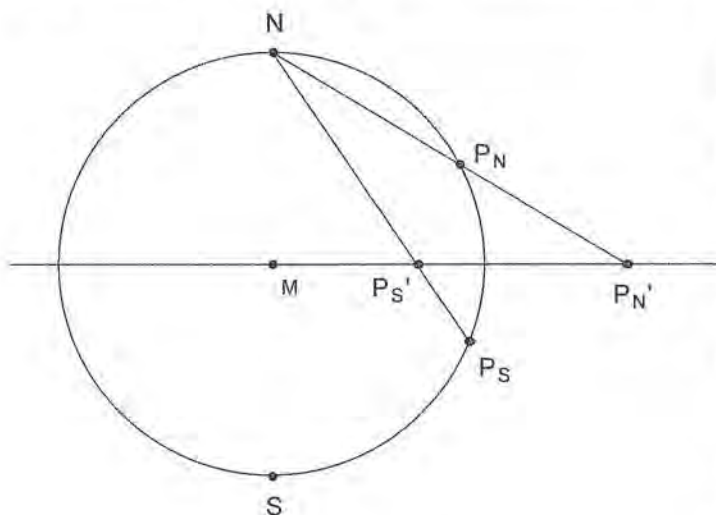
und somit folgt der Sinussatz: $\boxed{\sin \alpha \cdot \sin c = \sin \gamma \cdot \sin a}$

Der Winkelkosinussatz der sphärischen Trigonometrie

hergeleitet durch stereographische Projektion

Peter Baum

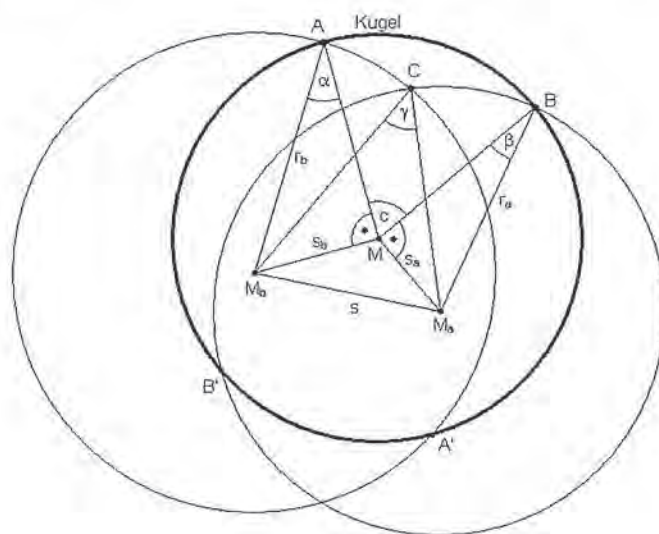
Auf einer Kugel sei ein Kugeldreieck A, B, C mit den Winkeln α, β, γ und den Seiten a, b, c gegeben. Die Seiten liegen auf Großkreisen. Wir nennen den Großkreis durch A, B Äquator



und die Halbkugel, auf der C liegt, südliche Halbkugel. Dann projizieren wir die Kugel aus dem Nordpol als Projektionszentrum auf die Äquatorebene durch Zentralprojektion. Man nennt diese Abbildung stereographische Projektion. Die Meridiane werden in Zentralen abgebildet, während alle anderen Kugelkreise in Kreise abgebildet werden. Der Äquator ist mit seinem Bild identisch, seine Punkte sind Fixpunkte. Daher sind

auch die Kugelpunkte A und B mit ihren Bildpunkten identisch. Alle Punkte der südlichen Halbkugel werden in das Innere des Äquators abgebildet, alle Punkte der nördlichen Halbkugel haben ihre Bildpunkte außerhalb des Äquators.

Die folgende Zeichnung stellt eine Draufsicht auf die Kugel und die Äquatorebene dar. Der Kugelumriss fällt mit dem Äquator zusammen, auf ihm liegen A und B sowie deren Gegenpunkte A' und B' .



In der Zeichnung ist C das durch stereographische Projektion erzeugte Bild des dritten Kugelpunktes im Inneren des Äquators. Die Seite a des Kugeldreiecks liegt auf dem Großkreis, der durch B, C und dem Diametralpunkt B' von B geht. Ihr Bild muss daher auf dem Umkreis des Dreiecks B, C, B' liegen. Ebenso liegt das Bild der Seite b auf dem Umkreis des Dreiecks A, C, A' .

Da die stereographische Projektion winkeltreu ist, erscheinen die Winkel α, β, γ auch in der Projektionsebene zwischen den Tangenten an die Bilder der Großkreise in den Punkten A, B, C , also auch zwischen den Radien der Kreise. Daher ist $\angle MAM_b = \alpha$, $\angle MBM_a = \beta$ und $\angle M_aCM_b = \gamma' = 180^\circ - \gamma$. Die Seite c erscheint ebenfalls in wahrer Größe, daher ist $\angle M_aMM_b = c' = 180^\circ - c$.

Setzen wir den Kugelradius = 1, so ist

$$r_a = \frac{1}{\cos \beta}, \quad r_b = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad s_a = \tan \beta, \quad s_b = \tan \alpha$$

Für den Kosinussatz im Dreieck M_aCM_b erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{\cos \beta} \right)^2 - 2 \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \beta} \cos(180^\circ - \gamma) \\ s^2 &= \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{\cos \beta} \right)^2 + 2 \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \beta} \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta \cdot s^2 &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 2 \cos \gamma \end{aligned}$$

Für den Kosinussatz im Dreieck M_aMM_b erhalten wir:

$$\begin{aligned} s^2 &= (\tan \alpha)^2 + (\tan \beta)^2 - 2 \tan \alpha \tan \beta \cos(180^\circ - c) \\ s^2 &= (\tan \alpha)^2 + (\tan \beta)^2 + 2 \tan \alpha \tan \beta \cos c \\ \cos \alpha \cos \beta \cdot s^2 &= (\sin \alpha)^2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + (\sin \beta)^2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Gleichsetzen der beiden rechten Seiten

$$\begin{aligned} 2 \cos \gamma &= (\sin^2 \alpha - 1) \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + (\sin^2 \beta - 1) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos c \\ 2 \cos \gamma &= -2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}$$

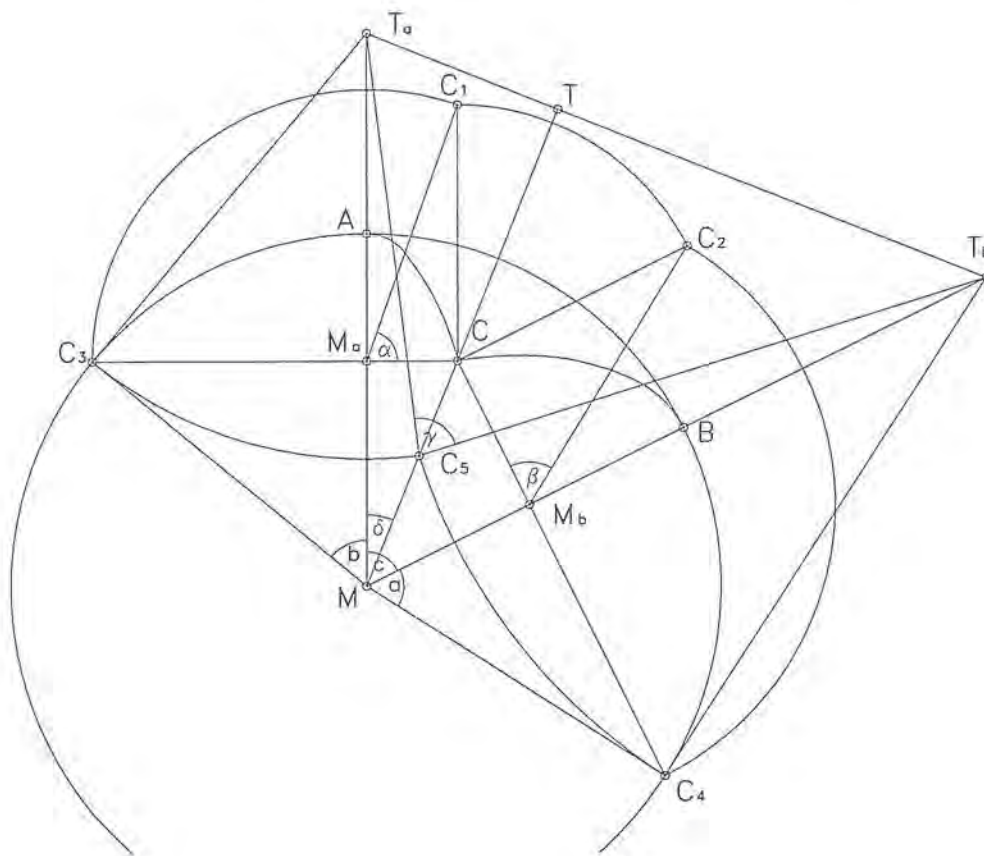
und schließlich

$$\boxed{\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c}$$

Die Konstruktion und Berechnung des Kugeldreiecks

Peter Baum

Die sphärische Trigonometrie ist aus den staatlichen Lehrplänen weitgehend verschwunden. Angesichts des Rechenaufwandes mit Logarithmen war das verständlich. Im Zeitalter des Taschenrechners aber ist der Rechenaufwand gering. Wenn man schon Kugelgeometrie in der Schule treibt, Kugeldreiecke konstruiert und die gängigen Aufgaben aus der mathematischen Erdkunde und der Astronomie zeichnerisch löst, ist es nur ein kleiner Schritt zur Berechnung derselben. Wie er gemacht werden kann, soll im Folgenden dargestellt werden.



Gegeben ist die Projektion eines Kugeldreiecks ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ . Die Länge des Kugelradius sei 1 L.E.

Durch Klappen der Großkreise ACA' und BCB' um die Achsen AM bzw. BM in die Zeichenebene erhält man die Seiten $a = BC_4$ und $b = AC_3$ in wahrer Größe.

Durch Klappen derjenigen Kleinkreisebenen in die Zeichenebene, die durch C gehen und auf AM bzw. BM senkrecht stehen, erhält man die Winkel α und β in wahrer Größe. Das Lot des Kugelpunktes C auf die Zeichenebene klappt dann auf CC_1 bzw. CC_2 . Daher

ist $CC_1 = CC_2$ und aus den elementaren Winkelfunktionen in den rechtwinkligen Dreiecken MM_aC_3 , M_aCC_1 , MM_bC_4 , M_bCC_2 folgt mit $M_aC_3 = M_aC_1$ und $M_bC_4 = M_bC_2$... der **Sinussatz**:

$$\sin b \cdot \sin \alpha = \sin a \cdot \sin \beta, \quad \text{also} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (1)$$

Aus den elementaren Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck folgt mit $MC = d$

$$\begin{aligned} \Delta M_aCC_1 : \overline{CM_a} &= \sin b \cdot \cos \alpha \\ \Delta CMM_a : \overline{CM_a} &= d \cdot \sin \delta \\ \cos b &= d \cdot \cos \delta \\ \Delta CMM_b : \cos a &= d \cdot \cos(c - \delta) \end{aligned}$$

Mit dem Additionstheorem für den Cosinus: $\cos(c - \delta) = \cos c \cdot \cos \delta + \sin c \cdot \sin \delta$

erhält man

$$\cos a = d \cdot \cos(c - \delta) = \cos c \cdot d \cdot \cos \delta + \sin c \cdot d \cdot \sin \delta$$

und schließlich den **Seitenkosinussatz**:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (2_a)$$

Durch Substitution von

$$a = 180^\circ - \alpha \quad b = 180^\circ - \beta \quad c = 180^\circ - \gamma \quad \alpha = 180^\circ - a$$

erhält man aus dem Seitenkosinussatz den **Winkelkosinussatz**:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \quad (3_a)$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man die restlichen Gleichungen (2_b), (2_c), (3_b), (3_c).

Setzt man für $\cos \alpha$ den Term aus dem Winkelkosinussatz in den Seitenkosinussatz ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot (-\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a) \\ \cos a &= \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin b \cdot \sin c \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \\ \cos a \cdot (1 - \sin b \cdot \sin c \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma) &= \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

und wegen $\sin c \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \gamma$ folgt

$$\cos a = \frac{\cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{1 - \sin^2 b \cdot \sin^2 \gamma} \quad (4)$$

Diese Formel hat Helmut Rixecker (MU Heft 3 / 1984) den **Seiten-cos-cos Satz** genannt. Den entsprechenden **Winkel-cos-cos-Satz** erhält man, wenn man in den Winkelkosinussatz für $\cos a$ den Term aus dem Seitenkosinussatz einsetzt:

$$\cos \alpha = \frac{-\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos b \cdot \cos c}{1 - \sin^2 \beta \cdot \sin^2 c} \quad (5)$$

Mit diesen fünf Sätzen lassen sich alle Kugeldreiecke berechnen, wenn drei Größen gegeben sind.

Man kann den Seitencosinussatz auch über den Winkel γ herleiten. Dieser ist in der vorangehenden Zeichnung konstruiert. Die Tangenten, welche die Großkreise AC und BC im Punkt C berühren, schneiden die Zeichenebene in den Punkten T_a und T_b , die auf den Geraden MA und MB liegen. Die in die Zeichenebene geklappten Tangenten berühren den Großkreis AB in den Punkten C_3 bzw. C_4 . Somit sind alle Seiten des Dreiecks CT_aT_b in wahrer Länge vorhanden, dieses kann konstruiert werden und liefert den Winkel γ im Punkt C_5 .

Die Seite $T_aT_b = x$ kann mit dem Cosinussatz sowohl aus dem Dreieck T_aT_bM als auch aus dem Dreieck $T_aT_bC_5$ berechnet werden. Es ist also

$$x^2 = (MT_a)^2 + (MT_b)^2 - 2 (MT_a) (MT_b) \cos c = (C_5T_a)^2 + (C_5T_b)^2 - 2 (C_5T_a) (C_5T_b) \cos \gamma$$

Mit $\overline{MT_a} = \frac{1}{\cos b}$ $\overline{MT_b} = \frac{1}{\cos a}$ $\overline{C_5T_a} = \tan b$ $\overline{C_5T_b} = \tan a$ erhält man

$$\frac{1}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 a} - 2 \cdot \frac{\cos c}{\cos a \cdot \cos b} = \left(\frac{\sin b}{\cos b} \right)^2 + \left(\frac{\sin a}{\cos a} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \cos \gamma$$

$$2 - 2 \cdot \frac{\cos c}{\cos a \cdot \cos b} = -2 \cdot \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \cos \gamma$$

$$\cos a \cdot \cos b - \cos c = -\sin b \cdot \sin a \cdot \cos \gamma$$

und schließlich $\cos a \cdot \cos b + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos \gamma = \cos c$

Wir untersuchen nun, wie aus drei gegebenen Größen eines Kugeldreiecks die restlichen drei Größen berechnet werden können. Wir setzen dabei voraus, dass alle gegebenen Größen $< 180^\circ$ sind (Bedingung für ein Eulersches Kugeldreieck. Ein solches liegt ganz auf einer Halbkugel.) Ferner bemerken wir, dass bei einem Kugeldreieck aus $a > b > c$ auch $\alpha > \beta > \gamma$ folgt und umgekehrt.

1. (SSS) und (WWW)

Gegeben sind die drei Seiten a, b, c . Ein Dreieck existiert nur dann, wenn

$$a + b + c < 360^\circ \text{ und } a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$$

Alle drei Winkel lassen sich durch (2) eindeutig berechnen. Dasselbe gilt entsprechend für das Polardreieck (Fall WWW, Berechnung durch (3)).

2. (SWS) und (WSW)

Gegeben sind zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α . Die dritte Seite a lässt sich mit (2) immer eindeutig berechnen. Weiter siehe 1.(SSS). Dasselbe gilt entsprechend für das Polardreieck (Fall WSW, Berechnung des dritten Winkels mit (3)).

3. (SSW)

Gegeben sind zwei Seiten a, b und ein gegenüberliegender Winkel α . In diesem Fall gibt es entweder zwei Lösungen oder genau eine Lösung oder keine Lösung. Zunächst wird der zweite Winkel β mit dem Sinussatz (1) berechnet. Wir untersuchen folgende Fälle:

$$1. \quad \sin a < \sin b \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a} > 1, \quad \text{d.h. es gibt keine Lösung.}$$

$$2. \quad \sin a = \sin b \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a} = 1, \quad \text{d.h. es ist } \beta = 90^\circ.$$

$$\text{Aus (2}_b\text{) folgt} \quad \cos c = \frac{\cos b}{\cos a}$$

$$\text{und aus (3}_c\text{) folgt} \quad \cos \gamma = \sin \alpha \cdot \cos c = \sin \alpha \cdot \frac{\cos b}{\cos a}.$$

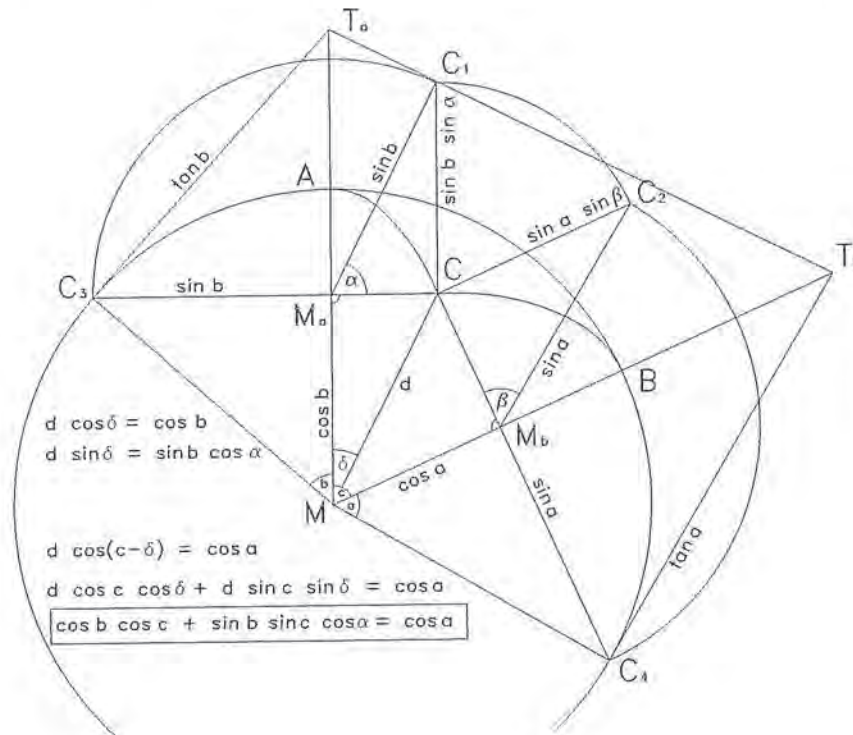
$$\text{Da} \quad \sin a = \sin b \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin a \leq \sin b \quad \text{und} \quad a \leq b, \quad \text{also ist}$$

$$|\cos b| \leq |\cos a| \quad \text{und} \quad |\cos c| = \left| \frac{\cos b}{\cos a} \right| \leq 1 \quad \text{und es gibt genau eine Lösung.}$$

$$3. \quad \sin a > \sin b \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin a} < 1, \quad \text{d.h. es gibt zunächst zwei Lösungen}$$

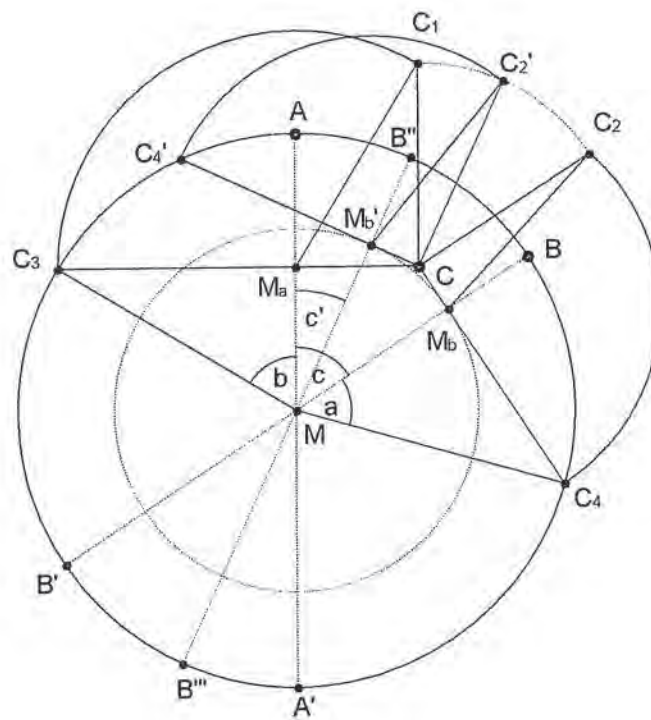
für den Winkel β . Einsetzen in (4c) und (5c) liefert c und γ , eventuell für beide Lösungen von β .

Eine Übersicht über die möglichen Lösungen im Fall SSW gewinnen wir aus der ersten Zeichnung:



Sind a , b und α gegeben, so kann die Konstruktion über M , A , C_3 , M_a , C_1 , C aufgebaut werden. Nun liefert ein an beliebiger Stelle gezeichneter Winkel a mit dem Scheitelpunkt M den Radius $r = \cos a$ eines Kreises um M , an den von C aus Tangenten konstruiert werden. Dies ist nur dann möglich, wenn $\cos a < MC$, also wenn $\sin a > CC_1 = CC_2$. Die Berührungspunkte der beiden Tangenten mit dem Kreis sind M_b und M_b' . Die Gerade MM_b schneidet den Kugelumkreis auf der Seite von M_b in B und auf der anderen Seite im Gegenpunkt B' . Entsprechend schneidet die Gerade $MM_{b'}$ (vgl. Fig. 3) den Kugelumkreis in den Gegenpunkten B'' und B''' . Ist $\cos a > \cos b$ (Fig. 3), so liegen B und B'' auf dem rechten Halbkreis AA' und liefern eine Seite $c < 90^\circ$, und B' und B''' liegen auf dem linken Halbkreis und liefern eine Seite $c > 90^\circ$. Dann sind B und B'' zwei Lösungen, falls α und a spitze Winkel sind, und B' und B''' sind zwei Lösungen, falls α und a stumpfe Winkel sind. Ist α spitz und a stumpf oder umgekehrt, gibt es im Fall $\cos a > \cos b$ keine Lösung der Aufgabe.

Fig. 3 :

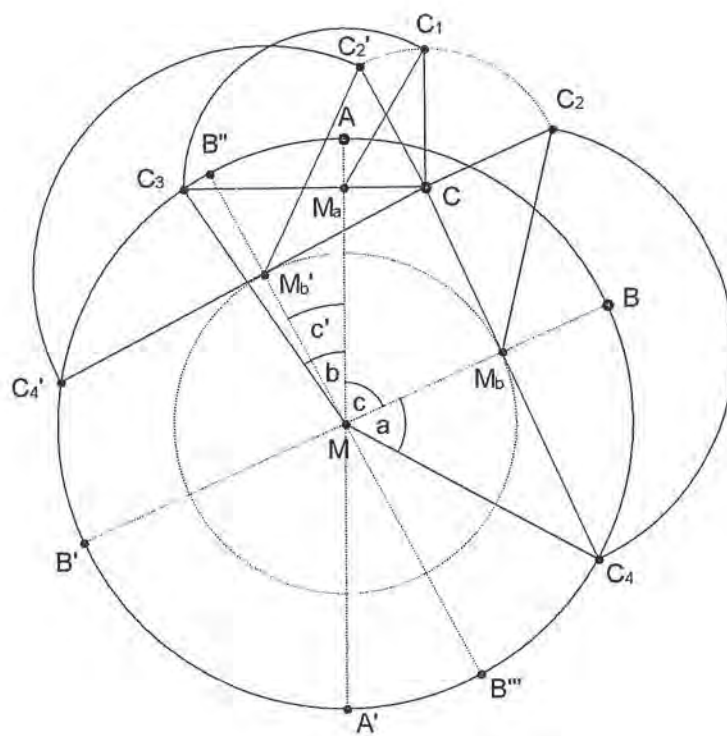


Ist $\cos a < \cos b$ (Fig. 4), so gibt es folgende Lösungen:

B	falls	α	spitz	und	a	spitz
B''	falls	α	stumpf	und	a	spitz
B'	falls	α	stumpf	und	a	stumpf
B'''	falls	α	spitz	und	a	stumpf.

Für $\cos a = 0$ ist $M_b = M_{b'} = M$, $a = 90^\circ$ und $B = B'''$ Lösung falls α spitz, $B' = B''$ Lösung falls α stumpf.

Fig. 4 :



Die Formelübersicht

$$1. \text{ Sinussatz} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (1)$$

$$2. \text{ Seitencosinussatz} \quad \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (2_a)$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta \quad (2_b)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \quad (2_c)$$

$$3. \text{ Winkelkosinussatz} \quad \cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \quad (3_a)$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos b \quad (3_b)$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c \quad (3_c)$$

4. Seiten-cos-cos-Satz

$$\cos a = \frac{\cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{1 - \sin^2 b \cdot \sin^2 \gamma} \quad (4_a)$$

$$\cos b = \frac{\cos c \cdot \cos a - \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha}{1 - \sin^2 c \cdot \sin^2 \alpha} \quad (4_b)$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}{1 - \sin^2 a \cdot \sin^2 \beta} \quad (4_c)$$

5. Winkel-cos-cos-Satz

$$\cos \alpha = \frac{-\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos b \cdot \cos c}{1 - \sin^2 \beta \cdot \sin^2 c} \quad (5_a)$$

$$\cos \beta = \frac{-\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos c \cdot \cos a}{1 - \sin^2 \gamma \cdot \sin^2 a} \quad (5_b)$$

$$\cos \gamma = \frac{-\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos a \cdot \cos b}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 b} \quad (5_c)$$

Das Nautische Dreieck

Ist $A = HN$ der Himmelsnordpol, $B = Z$ der Zenith des Beobachters und C ein Gestirn, so nennt man das Dreieck ABC mit den Seiten a' , b' , c' an der Himmelskugel ein nautisches Dreieck. Mit der Höhe h des Gestirns, dem Südazimut $a = \beta$, der Deklination δ , dem Stundenwinkel τ und der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes ist dann $a' = BC = 90^\circ - h$ (Zenitdistanz), $b' = AC = 90^\circ - \delta$, $c' = AB = 90^\circ - \varphi$, $\alpha = \tau$ und $\beta = 180^\circ - a$.

Einsetzen in (1) $\frac{\sin \alpha}{\sin a'} = \frac{\sin \beta}{\sin b'} = \frac{\sin \gamma}{\sin c'}$ ergibt dann

$$\sin \tau \cdot \cos \delta = \sin a \cdot \cos h$$

Einsetzen in (2) $\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos \alpha$
 $\cos b' = \cos c' \cdot \cos a' + \sin c' \cdot \sin a' \cdot \cos \beta$ ergibt dann

$$\begin{aligned} \sin(h) &= \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \tau \\ \sin \delta &= \sin \varphi \cdot \sin(h) - \cos \varphi \cdot \cos(h) \cdot \cos a \end{aligned}$$

Einsetzen in (4) $\cos c' = \frac{\cos a' \cdot \cos b' - \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}{1 - \sin^2 a' \cdot \sin^2 \beta}$ ergibt

$$\sin \varphi = \frac{\sin(h) \cdot \sin \delta + \cos(h) \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau \cdot \cos a}{1 - \cos^2 h \cdot \sin^2 a}$$

Die Kegelschnitte

Peter Baum

Die üblichen Konstruktionen der Kegelschnitte als Ortslinien gleichen Abstandes von einem Punkt und einer Leitgeraden bzw. einem Leitkreis lassen keinen unmittelbaren Zusammenhang mit einem Kegel erkennen. Für die Gärtnerkonstruktion der Ellipse zeigt man üblicherweise mit Hilfe der Dandelin'schen Kugeln, dass es sich um einen Kegelschnitt handelt.

Im Folgenden wird eine einheitliche Konstruktion von Ellipse, Parabel und Hyperbel aus dem Schnitt einer Ebene mit einem Kegel abgeleitet, die auch im Unterricht behandelt wurde. Für die Schülerinnen und Schüler ist es befriedigend, den Zusammenhang einer Konstruktion mit dem Kegel nachzuvollziehen. Die Konstruktion gestattet auch eine einfache Herleitung der Kegelschnittsgleichung in Polarkoordinaten.

Ein Kegel hat die Spitze $S(0/0/1)$ und die z -Achse als Mantellinie, ferner den halben Öffnungswinkel α .

Er wird von der x/y -Ebene in einer Kurve geschnitten. Sie ist bekanntlich eine Ellipse für $\alpha < 90^\circ$, eine Parabel für $\alpha = 90^\circ$ und eine Hyperbel für $\alpha > 90^\circ$. Die folgende Figur 1 ist ein Schnitt durch den Kegel in der x/z -Ebene.

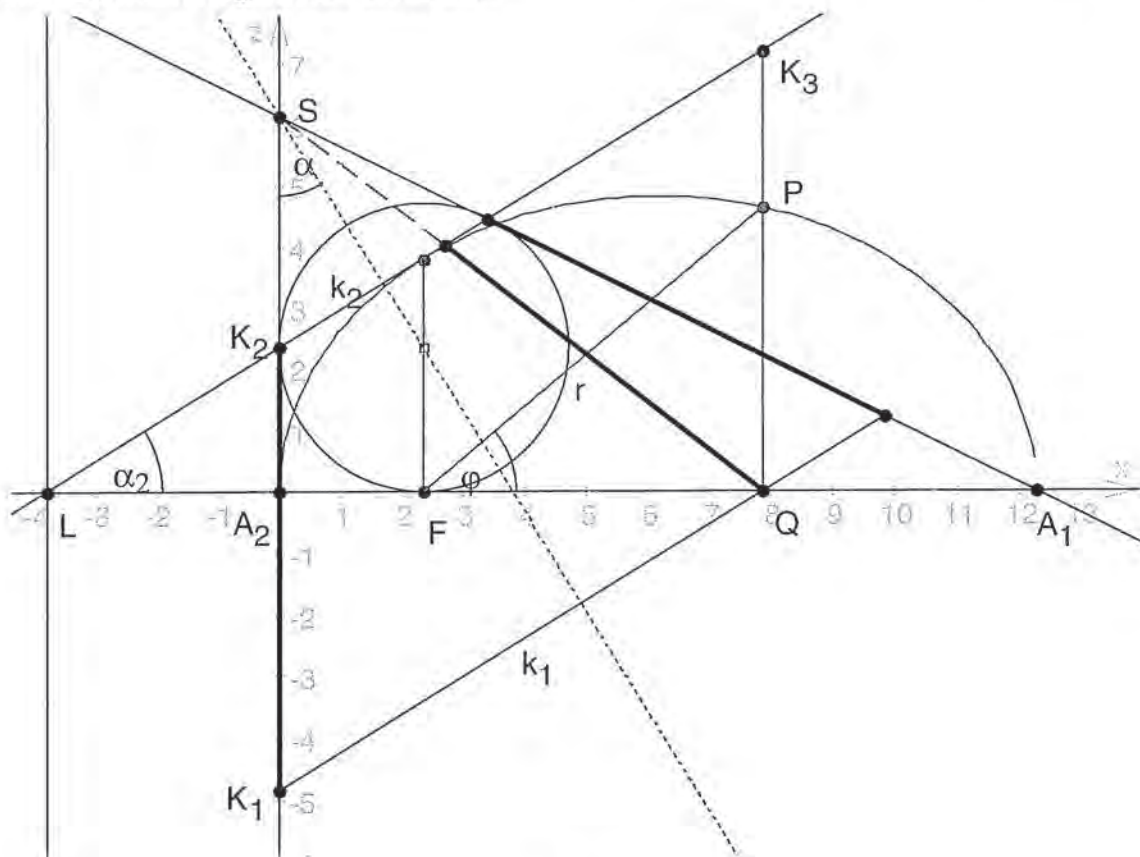


Fig. 1

Es sei Q' ein beliebiger Punkt auf der Schnittpunktlinie der x/y -Ebene mit dem Kegel und Q seine Projektion in die x/z -Ebene. Die durch Q gehende und auf der Kegellachse senkrecht stehende Ebene schneidet den Kegel in einem Kreis k_1 , der die z -Achse in K_1 berührt. Die zwischen dem Kegel und der x/y -Ebene liegende Inkugel berührt den Kegel in einem zu k_1 parallel liegenden Kreis k_2 , die x/y -Ebene in F und die z -Achse in K_2 . Die Ebene von k_2 schneidet die x/y -Ebene in der Leitgeraden und die x -Achse in L .

Alle Mantellinien, insbesondere die durch Q' gehende, berühren die beiden Kreise k_1 und k_2 in zwei Punkten, die gleichen Abstand haben. Dieser Abstand hat die Länge K_1K_2 und ist ebenso groß wie alle von Q' ausgehenden Tangentenabschnitte an die Inkugel, insbesondere so groß wie der Kugeltangentenabschnitt $Q'F$. Daher ist $Q'F = K_1K_2$. Wir ergänzen das Dreieck QK_1K_2 zu einem Parallelogramm und erhalten K_3 . Dann ist $Q'F = QK_3$. Drehen wir die x/y -Ebene um die x -Achse in die Zeichenebene (x/z -Ebene), so wandert Q' auf einem Viertelkreis in den Kegelschnittpunkt P . Somit ergibt sich folgende Konstruktion: die durch einen beliebigen Punkt Q der x -Achse gehende Parallele zur y -Achse schneidet die Projektion der Ebene von k_2 in K_3 . Der Kreis um F mit dem Radius $r = QK_3$ schneidet diese Parallele in zwei Kegelschnittpunkten P und P' .

Für die Herleitung der Gleichung in Polarkoordinaten setzen wir (vgl. Figur 1):

$\tan \alpha = \varepsilon$, $p = \varepsilon \cdot LF$, und $FP = r$. Dann ist

$$r = QK_3 = \varepsilon \cdot LQ = \varepsilon (LF + FQ).$$

Wegen $FQ = r \cdot \cos \varphi$ ergibt sich $r = p + \varepsilon \cdot r \cdot \cos \varphi$

Hieraus folgt

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi}.$$

Dies ist die Gleichung der Kegelschnittslinie in Polarkoordinaten mit dem linken Brennpunkt F als Pol. Sie ist für

$\varepsilon < 1$ eine Ellipse,

$\varepsilon = 1$ eine Parabel,

$\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

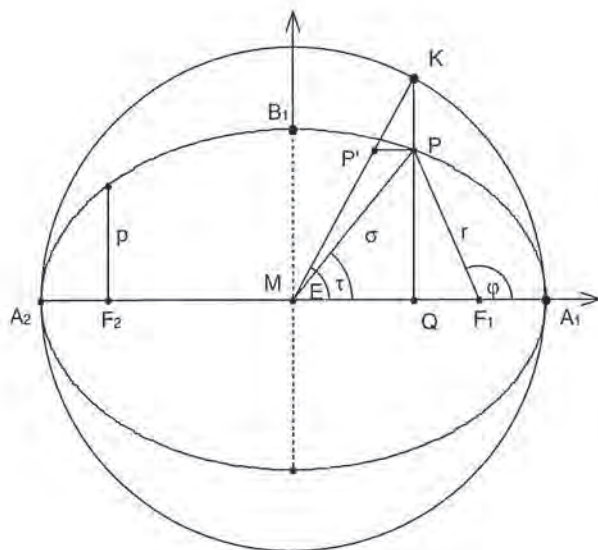
Dreht man den Kegelschnitt um F um 180° , wird F zum rechten Brennpunkt und wegen $\cos(\varphi + 180^\circ) = -\cos \varphi$ erhält man

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} \quad (1)$$

Für $\varphi = 90^\circ$ erhält man die Ordinate $y = p$ des senkrecht über dem Brennpunkt liegenden Kurvenpunktes, den Parameter p des Kegelschnitts.

Ist der Kegelschnitt die Bahnellipse eines Planeten mit dem Perihel A_1 , dem Aphel A_2 und dem Mittelpunkt M , dann nennt man den Winkel $E = \angle A_1MK$ die exzentrische Anomalie

und den Winkel $\varphi = \angle A_1FP$ die wahre Anomalie. Die Gleichung des Kegelschnitts lässt sich auch durch diese Größen ausdrücken.



Zwischen den Konstanten

$MA = a$, $MB = b$, $MF = e$, dem Parameter p und der numerischen Exzentrizität ε bestehen folgende Gleichungen:

$$a^2 = b^2 + e^2 \quad e = \varepsilon \cdot a$$

$$b^2 = a \cdot p$$

$$a^2 = a \cdot p + e \cdot \varepsilon \cdot a$$

$$a = p + e \cdot \varepsilon$$

Wegen $FQ = r \cdot \cos \varphi$ und

$$MQ = a \cdot \cos E = MF + FQ \text{ ist}$$

$$a \cdot \cos E = e + r \cdot \cos \varphi.$$

Aus (1) folgt $r + \varepsilon \cdot r \cdot \cos \varphi = p$ und somit $r + \varepsilon \cdot (a \cdot \cos E - e) = p$.

Wegen $\varepsilon \cdot a = e$ und $p + \varepsilon \cdot e = a$ folgt daraus $\boxed{r = a - e \cdot \cos E}$ (2)

Um die Mittelpunktsgleichung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten herzuleiten, gehen wir so vor:

Ist $\sigma = MP$, so ist $e \cdot \cos E = \varepsilon \cdot a \cdot \cos E = \varepsilon \cdot \sigma \cdot \cos \tau$ und $\boxed{r = a - \varepsilon \cdot \sigma \cdot \cos \tau}$ (3)

Aus $F_1Q = r \cdot \cos \varphi = \sigma \cdot \cos \tau - e$ (4) und

$QP = r \cdot \sin \varphi = \sigma \cdot \sin \tau$ (5)

folgt durch quadrieren und addieren:

$$r^2 = \sigma^2 + e^2 - 2 \cdot e \cdot \sigma \cdot \cos \tau \quad (6). \quad \text{Aus (3) folgt}$$

$$r^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \cos \tau + \varepsilon^2 \cdot \sigma^2 \cdot \cos^2 \tau.$$

$$r^2 = a^2 - 2 \cdot e \cdot \sigma \cdot \cos \tau + \varepsilon^2 \cdot \sigma^2 \cdot \cos^2 \tau \quad (7).$$

Gleichsetzen von (6) und (7) ergibt schließlich

$$\sigma^2 \cdot (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \tau) = a^2 - e^2 = b^2$$

und damit die Mittelpunktsgleichung

$$\boxed{\sigma = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2 \tau}}}$$

Die Projektive Erzeugung der Kegelschnitte

Peter Baum

Der Philosoph und Mathematiker Blaise Pascal (1623 - 1662) hat bekanntlich im Alter von 16 Jahren folgenden Satz entdeckt:

Werden 6 Punkte beliebig auf einem Kreis verteilt und dann in beliebiger Reihenfolge mit 1,2,3,4,5,6 nummeriert, so liegen die drei Schnittpunkte $X = (12)(45)$, $Y = (23)(56)$, $Z = (34)(61)$ sich jeweils gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

Diese nennt man seither die Pascalgerade. Zu einer bestimmten Punkteverteilung (einem bestimmten Sechseck) gibt es maximal 60 verschiedene Pascalgeraden, die durch Umnummerierung gewonnen werden. Von den insgesamt $6! = 720$ verschiedenen Permutationen der Ziffern führen die jeweils 6 zyklischen Vertauschungen $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ zu denselben Punkten X, Y, Z , wie die folgende Tabelle zeigt:

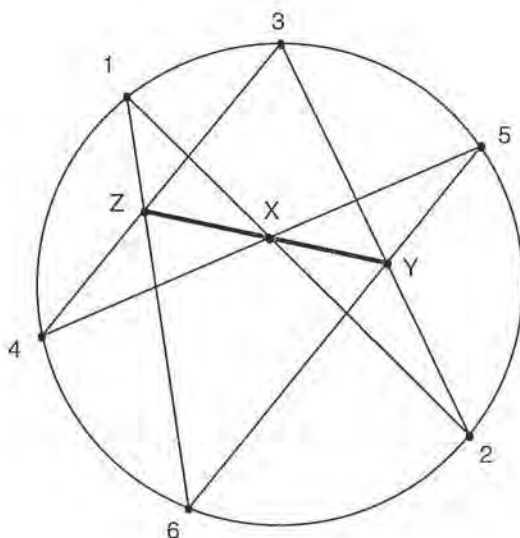
123456	(12)(45)	(23)(56)	(34)(61)
234561	(23)(56)	(34)(61)	(45)(12)
345612	(34)(61)	(45)(12)	(56)(23)
456123	(45)(12)	(56)(23)	(61)(34)
561234	(56)(23)	(61)(34)	(12)(45)
612345	(61)(34)	(12)(45)	(23)(56)

Dadurch wird die Anzahl verschiedener Pascalgeraden auf $720:6 = 120$ reduziert. Dieselben Punkte entstehen aber auch dann, wenn man folgende (nicht zyklische) Vertauschung vornimmt:

$$1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 6, 4 \leftrightarrow 5$$

$$X = (12)(45) = (21)(54),$$

$$Y = (23)(56) \leftrightarrow Z = (16)(43)$$



Figur 1

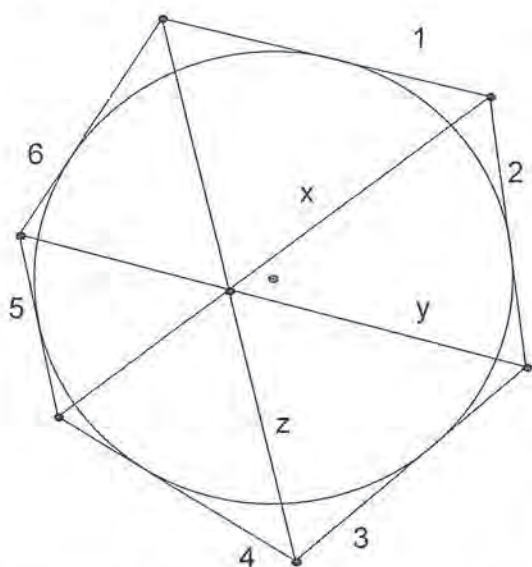
Dadurch reduziert sich die Anzahl verschiedener Pascalgeraden eines bestimmten Sechsecks weiter auf $120:2 = 60$.

Bei einem regelmäßigen Sechseck fallen jeweils fünf der 60 Pascalgeraden aus Symmetriegründen zusammen, so dass noch 12 verschiedene Pascalgeraden übrig bleiben.

Pascal hat erkannt, dass diese Eigenschaft des Kreises auf alle Kegelschnitte zutrifft. Sein diesbezügliches Oeuvre ist verlorengegangen, aber Leibniz hatte es noch in Händen und gibt in einem Brief an den Neffen von Pascal 1676 die Titel der sechs Abteilungen an, aus denen es bestand.¹ Aus diesen Titeln geht hervor, dass Pascal den Kreis als ebenen Schnitt durch einen Kegel mit der Spitze S begriffen hat. Durch jede Seite des Sechsecks und die Kegelspitze S geht dann genau eine Ebene. Die Sechs Ebenen schneiden sich in den sechs Mantellinien, die durch die sechs Kreispunkte und die Kegelspitze erzeugt werden, sie schneiden sich auch in den drei Geraden XS, YS, ZS, welche offenbar in einer Ebene liegen, die durch die Pascalgerade und S geht. Wird diese räumliche Figur durch irgendeine nicht durch S gehende Ebene geschnitten, so entsteht ein auf dem Kegelschnitt liegendes Sechseck, welches ebenfalls zu drei auf einer Geraden liegenden Schnittpunkten X,Y,Z gegenüberliegender Seiten führt.

Das Dualitätsprinzip in der Ebene besagt, dass ein geometrischer Satz gültig bleibt, wenn man die Begriffe Punkt und Gerade vertauscht. Dies hat Brianchon 1810 benutzt und durch Dualisierung des Satzes von Pascal folgenden Satz gefunden:

Figur 2



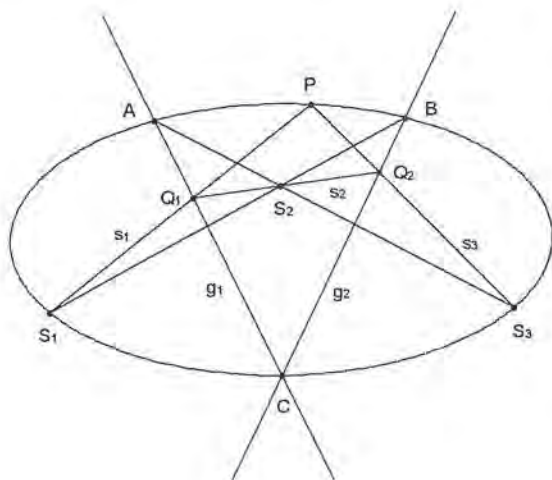
Werden sechs Tangenten 1,2,3,4,5,6 beliebig auf einem Kreis verteilt, so gehen die drei Verbindungsgeraden $x = (12)(45)$, $y = (23)(56)$, $z = (34)(61)$ sich jeweils gegenüberliegender Schnittpunkte durch einen Punkt.

Zur Projektiven Erzeugung der Kegelschnitte kommt man nun folgendermaßen. Wir halten in der Pascalfigur den Kreis mit den ersten fünf Punkten fest und bewegen Punkt 6 auf dem Kreis. Dann bleibt auch der Punkt $X = (12)(45)$ fest, aber die Seite (16) dreht sich um

Punkt 1, die Seite (56) dreht sich um Punkt 5, der Punkt Y wandert auf der Seite (23), der Punkt Z wandert auf der Seite (34) und die Pascalgerade dreht sich um X. Durchläuft der

¹ vgl. Geschichte der Geometrie von M.Chasles, übersetzt von L.A.Sohncke 1839, Reprint Wiesbaden 1968, S.67 ff, oder Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1913, Bd II, S.680 ff

Punkt 6 so den ganzen Kreis (Kegelschnitt), so durchläuft die Seite (16) das Strahlenbündel von Punkt 1, Z durchläuft die Punktreihe (34), die Pascalgerade durchläuft das Strahlenbündel X, der Punkt Y durchläuft die Punktreihe (23) und die Seite (56) durchläuft das Strahlenbündel von Punkt 5. Zu jedem Strahl von Punkt 1 kann der entsprechende Strahl von Punkt 5 und damit der Schnittpunkt 6 konstruiert werden.



Figur 3

Wir bezeichnen künftig die Träger der drei Strahlenbündel mit S_1 , S_2 , und S_3 , die Träger der beiden Punktreihen mit g_1 und g_2 . Sie können beliebig gewählt werden. Die Zuordnung der Strahlen von S_1 mit den Strahlen von S_3 funktioniert dann folgendermaßen: s_1 schneidet g_1 in Q_1 , die Verbindungsgerade Q_1S_2 schneidet g_2 in Q_2 , die Verbindungsgerade Q_2S_3 ist der zugeordnete Strahl s_3 und schneidet s_1 im Kurvenpunkt P.

Aus der Konstruktion ergibt sich, dass auch die Punkte S_1 und S_3 sowie der Schnittpunkt $C = g_1g_2$ Kurvenpunkte sind. Zwei weitere Kurvenpunkte sind $A = (S_3S_2)g_1$ und $B = (S_1S_2)g_2$. Legt man diese fünf Kurvenpunkte fest, so entstehen die beiden Punktreihen $g_1 = AC$ und $g_2 = BC$ und der Schnittpunkt $S_2 = (AS_3)(BS_1)$. Für die weiteren Überlegungen ist die Kenntnis dieser Konstruktion aus fünf Elementen (3 Strahlenbündel und 2 Punktreihen oder fünf Kurvenpunkte) mit diesen Bezeichnungen Voraussetzung.

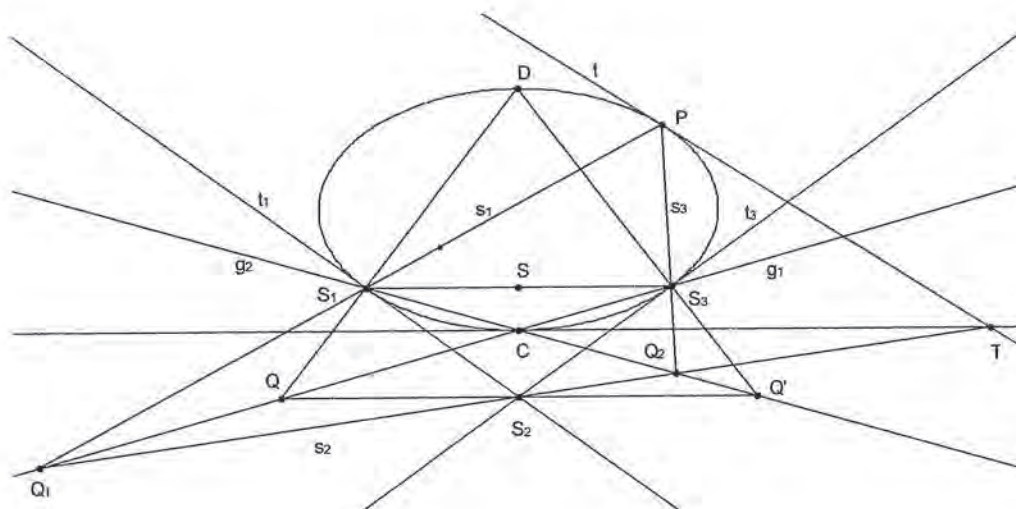
Es entsteht nun die Frage: Wie kann man an der Lage der fünf erzeugenden Grundgebilde (drei Strahlenbündel und zwei Punktreihen) erkennen, ob die entstehende Kurve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, die „Entartungen“ Punkt, Gerade, Doppelgerade eingeschlossen?

Bevor wir uns dieser Frage zuwenden, betrachten wir mögliche Spezialisierungen der Figur 3.

I. Man kann A mit S_3 und B mit S_1 zusammenfallen lassen (Figur 4).

Die Geraden AS_3 und BS_1 werden dann zu Tangenten, und die Punktreihen g_1 und g_2 gehen durch S_3 bzw. S_1 . Der Kegelschnitt ist dann durch zwei Punkte mit ihren Tangenten und einem weiteren Punkt C eindeutig bestimmt. Eine weitere Spezialisierung besteht in der symmetrischen Anordnung der drei Punkte und der beiden Tangenten. Die Mittelsenkrechte der Strecke S_1S_3 geht dann durch C und S_2 und den Mittelpunkt S. Der Punkt C ist ein

Scheitelpunkt. Den anderen Scheitelpunkt D erhält man durch die Parallele zur Geraden S_1S_3 , die durch S_2 geht. Sie schneidet g_1 und g_2 in den symmetrischen Punkten Q und Q' , durch die die zugeordneten Strahlen s_1 und s_3 gehen, welche sich in D schneiden.

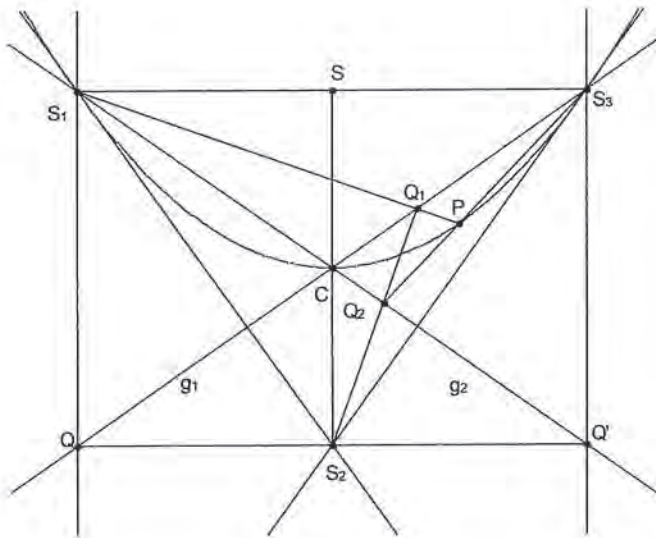


Figur 4

Der Schnittpunkt T von Q_1Q_2 mit der Tangente in C liefert die Tangente in P . Der Beweis folgt aus dem Satz des Pascal für das Sechseck $P = 1$ und 2 , $S_1 = 3$, $C = 4$ und 5 , $S_3 = 6$ mit den Schnittpunkten $(12)(45) = T$, $(23)(56) = Q_1$, $(34)(61) = Q_2$ und mit der Pascalgeraden TQ_1Q_2 .

Von dieser symmetrischen Lage ausgehend variieren wir nur das Büschelzentrum S_2 in vertikaler Richtung und beobachten dabei die Veränderung der Kurve und der Strecke QQ' . Es ergeben sich folgende Fälle:

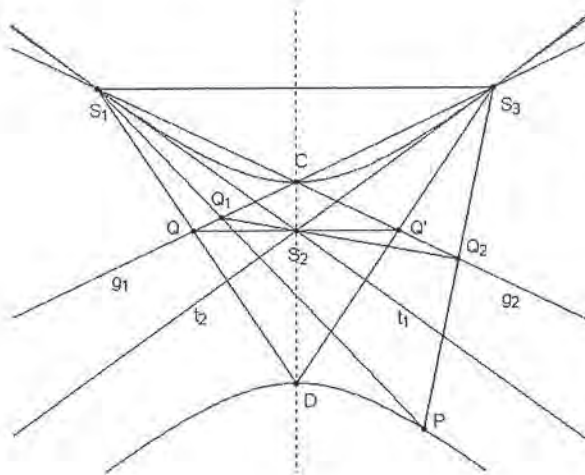
1. $\overline{S_1S_3} < \overline{QQ'}$. Dann ist $\overline{SC} < \overline{CS_2}$ und die Kurve ist eine Ellipse (s. Figur 4. Beweis?)



$$2. \overline{S_1 S_3} = \overline{QQ'}.$$

Dann ist $\overline{SC} = \overline{CS_2}$ und QS_1 parallel zu $Q'S_3$, D ist also Fernpunkt und die Kurve ist eine Parabel (Figur 5). Warum gibt es keinen zweiten Fernpunkt?

Figur 5

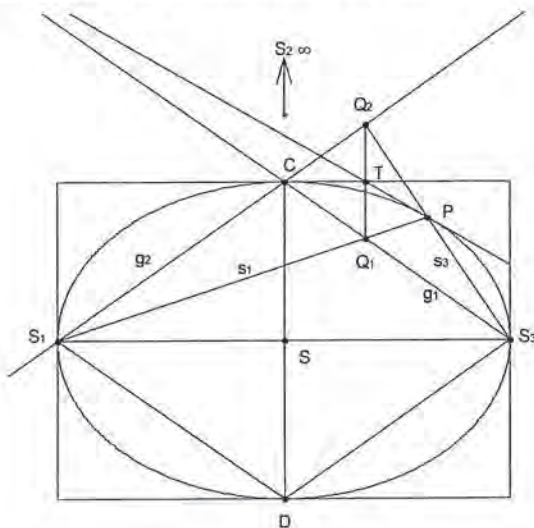


$$3. \overline{S_1 S_3} > \overline{QQ'}.$$

Dann ist $\overline{SC} > \overline{CS_2}$ und die Kurve ist eine Hyperbel mit den Scheitelpunkten C und D (Figur 6).

Figur 6

II. Eine noch weitergehende Spezialisierung in der Wahl der fünf Grundgebilde kann folgendermaßen vorgenommen werden.



1. Ellipse

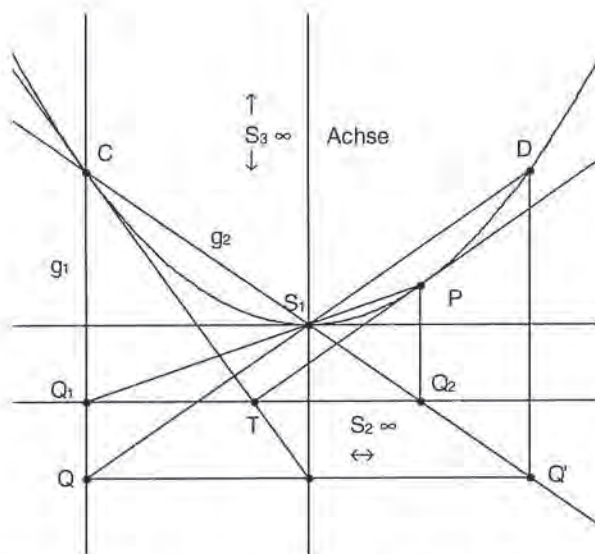
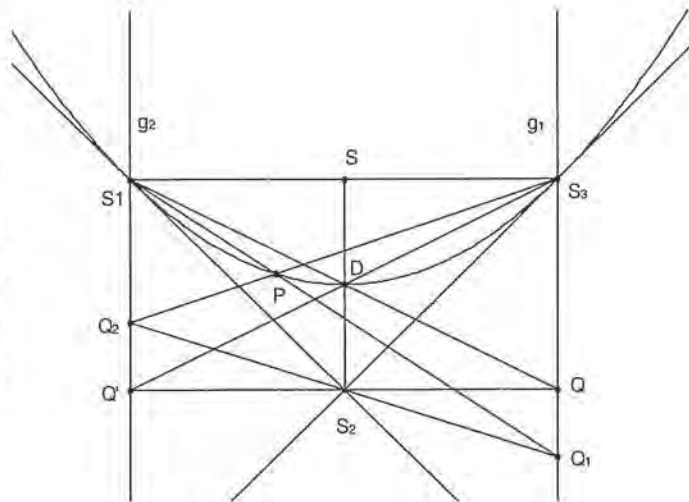
Wir wählen für S_1 und S_3 die Scheitelpunkte. Dann sind die Tangenten parallel und S_2 ist Fernpunkt. Wir erhalten die Konstruktion in Figur 7.

Figur 7

2. Parabel

Die Parabel ist ein Kegelschnitt mit genau einem Fernpunkt. Einer der vier Punkte S_1, S_3, C, D kann dieser Fernpunkt sein. In Figur 5 ist es der Punkt D . Wählt man C als Fernpunkt, so sind die Punktreihen g_1 und g_2 parallel und es ergibt sich die Konstruktion in Figur 8.

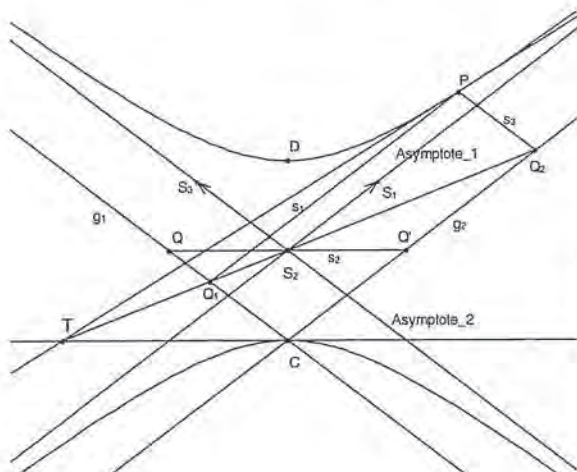
Figur 8



Figur 9

Wählt man S_1 als Scheitelpunkt und S_3 als Fernpunkt, so sind C und D symmetrische Parabelpunkte und wir erhalten Figur 9. Einen weiteren Fernpunkt kann es nicht geben, da die durch den Fernpunkt S_3 gehenden Strahlen nur eine Richtung annehmen können.

Der Schnittpunkt T der Tangente in C mit $s_2 = Q_1Q_2$ ist gleichzeitig Mittelpunkt der Strecke Q_1Q_2 , weil er der vierte harmonische Punkt zu Q_1Q_2 mit dem äußeren Teilpunkt S_2 als Fernpunkt ist. Das Pascalsechseck $P = 1$ und $2, C = 4$ und $5, S_1 = 3$ und $S_3 = 6$ führt zu der Pascalgeraden $T = (12)(45), Q_1 = (23)(56), Q_2 = (34)(61)$, also liefert T die Tangente in P .

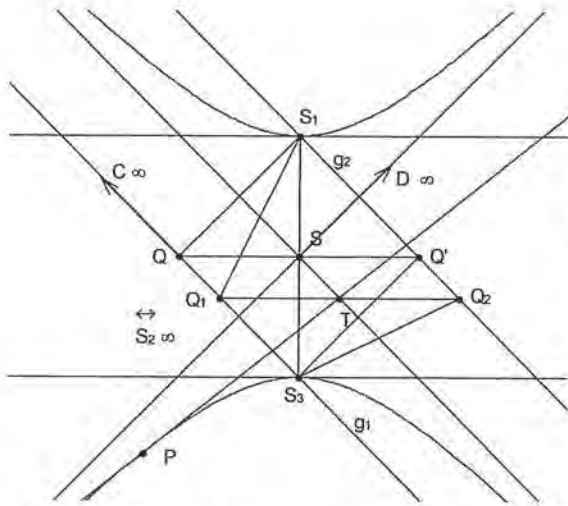


Figur 10

3. Hyperbel

Die Hyperbel hat zwei Fernpunkte. In Figur 6 war keiner der fünf gewählten Punkte ein Fernpunkt.

Es liegt nahe, S_1 und S_3 als Fernpunkte zu wählen. Ihre Tangenten sind dann die Asymptoten der Hyperbel. Der Punkt C ist zweckmäßigerweise ein Scheitelpunkt (Figur 10).



Figur 11

Man kann auch C als Fernpunkt wählen und S_1 und S_3 als Scheitelpunkte. Dann ist D der andere Fernpunkt der Hyperbel, und S_2 ist der Fernpunkt der beiden Scheiteltangenten. Die beiden Punktreihen g_1 und g_2 gehen durch S_3 und S_1 und geben die Richtung der ersten Asymptote an. Diese geht durch den Mittelpunkt S der Strecke S_1S_2 . Die Verbindungs-

gerade SS_2 schneidet die Punktreihen g_1 und g_2 in Q und Q' und liefert damit die Richtung D_∞ der zweiten Asymptote (Figur 11).

III. Die Gleichungen von Ellipse, Parabel und Hyperbel

III.1 Ellipse

Sind die Scheitelpunkte $S_1(-a/0)$, $S_3(a/0)$, $C(0/b)$ gegeben mit dem Fernpunkt S_2 der y -Achse (Figur 7), so ist s_2 parallel zur y -Achse: $Q_1(x_1/y_1)$, $Q_2(x_2/y_2)$ mit $x_2 = x_1$.

$$Q_1 \text{ liegt auf } g_1: \quad y_1 = -\frac{b}{a}(x_1 - a) \quad (1)$$

$$Q_2 \text{ liegt auf } g_2: \quad y_2 = \frac{b}{a}(x_1 + a) \quad (2)$$

$$P(x/y) \text{ liegt auf } S_1Q_1: \quad \frac{y}{x+a} = \frac{y_1}{x_1+a} \quad \text{und auf } S_3Q_2: \quad \frac{y}{x-a} = \frac{y_2}{x_1-a}$$

$$\text{Multiplikation liefert} \quad \frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{y_1 \cdot y_2}{x_1^2 - a^2} \quad \text{und} \quad \frac{y_1 \cdot y_2}{x_1^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Hieraus folgt die Ellipsengleichung

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

III. 2 Parabel

Bei der Konstruktion in Figur 8 sei D der Ursprung des Koordinatensystems und es sei $S_1(-a/b)$, $S_3(a/b)$, $S_2(0/-b)$. Ferner ist $Q_1(a/y_1)$, $Q_2(-a/y_2)$ und S_2 ist der Mittelpunkt der Strecke Q_1Q_2 , also ist $y_1 + y_2 = -2b$.

$$P(x/y) \text{ liegt auf } S_1Q_1: \frac{y-b}{x+a} = \frac{y_1-b}{a+a} = \frac{y_1-b}{2a} \quad (\text{Zweipunkte-Form})$$

und auf S_3Q_2 :

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{y_2-b}{-a-a} = -\frac{y_2-b}{2a}, \quad \text{Sub-}$$

traktion ergibt

$$\begin{aligned} \frac{y-b}{x+a} - \frac{y-b}{x-a} &= \frac{y_1+y_2-2b}{2a} = -2\frac{b}{a} \\ \frac{y-b}{x^2-a^2} \cdot (-2a) &= -2\frac{b}{a} \\ y-b &= \frac{b}{a^2}(x^2-a^2) = \frac{b}{a^2}x^2 - b \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \frac{b}{a^2}x^2}$$

Bei der Konstruktion in Figur 9 ist $S_1(0/0)$, $C(-a/b)$, $Q_1(-a/y_1)$, $Q_2(x/y_1)$ liegt auf CS_1 :

$$\frac{y_1}{x} = \frac{b}{-a}$$

$$P(x/y) \text{ liegt auf } S_1Q_1: \frac{y}{x} = \frac{y_1}{-a}. \quad \text{Hieraus folgt} \quad y = y_1 \cdot \frac{x}{-a} = \frac{b}{-a} \cdot x \cdot \frac{x}{-a} = \frac{b}{a^2}x^2$$

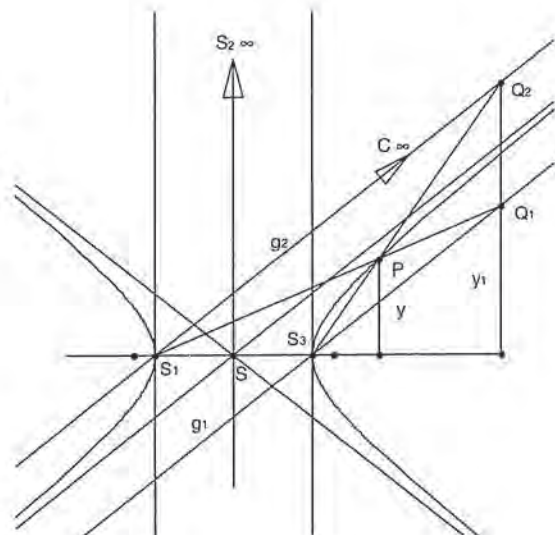
$$\text{also} \quad \boxed{y = \frac{b}{a^2}x^2}.$$

III. 3 Hyperbel

Die Herleitung der Hyperbelgleichung aus Figur 12 ist sehr einfach. Mit den üblichen Bezeichnungen erhält man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgende Verhältnissgleichungen:

$$\frac{y}{x+a} = \frac{y_1}{x_1+a} \quad \frac{y}{x-a} = \frac{y_1+2b}{x_1-a}$$

$$\frac{y_1}{x_1-a} = \frac{y_1+2b}{x_1+a} = \frac{b}{a}$$



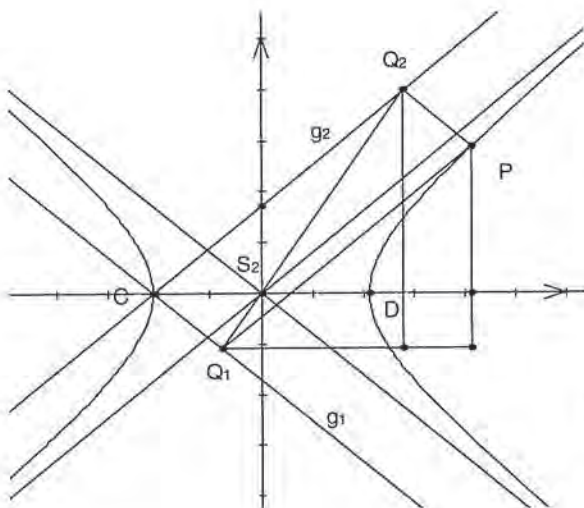
Multiplizieren der beiden ersten Gleichungen liefert

Figur 12

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{y_1}{x_1 + a} \cdot \frac{y_1 + 2b}{x_1 - a} = \frac{y_1}{x_1 - a} \cdot \frac{y_1 + 2b}{x_1 + a} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



Figur 13

Bei der Konstruktion in Figur 13 gewinnt man die Hyperbelgleichung folgendermaßen:

die Gerade PQ_1 hat die Steigung b/a , also ist

$$y - \frac{b}{a}x = y_1 - \frac{b}{a}x_1 \quad (1)$$

Die Gerade PQ_2 hat die Steigung $-b/a$, also

$$\text{ist } y + \frac{b}{a}x = y_2 + \frac{b}{a}x_2 \quad (2)$$

$$Q_1 \text{ liegt auf } g_1, \text{ also ist } \frac{x_1}{-a} + \frac{y_1}{-b} = 1 \quad (3) \text{ (Achsenabschnittsform)}$$

$$Q_2 \text{ liegt auf } g_2, \text{ also ist } \frac{x_2}{-a} + \frac{y_2}{b} = 1 \quad (4) \text{ (Achsenabschnittsform)}$$

Die Gerade Q_1Q_2 geht durch den Ursprung, daher ist $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$ oder $y_1x_2 - y_2x_1 = 0$.

$$\text{Multiplikation von (1) und (2) ergibt } y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = y_1y_2 + \frac{b}{a}(y_1x_2 - y_2x_1) - \frac{b^2}{a^2}x_1x_2$$

$$\text{also } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y_1y_2}{b^2} - \frac{x_1x_2}{a^2}$$

$$\text{Multiplikation von (3) und (4) ergibt } \frac{y_1y_2}{b^2} - \frac{x_1x_2}{a^2} = -1$$

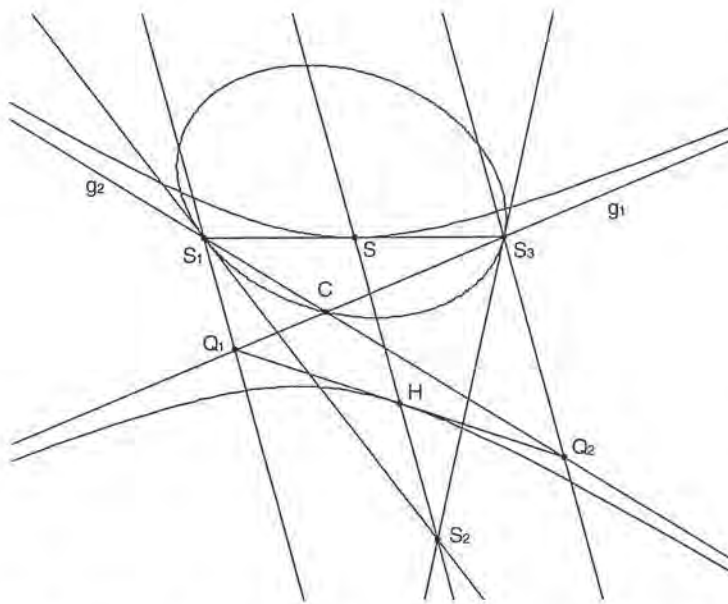
Einsetzen in die vorige Gleichung ergibt die Hyperbelgleichung

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

IV. Die Grenz-Hyperbel

Von einem Kegelschnitt seien die drei Punkte S_1, S_3 und C in beliebiger Lage gegeben, also auch die Punktreihen $g_1 = CS_3$ und $g_2 = CS_1$. Das Büschelzentrum S_2 sei variabel, es liefert die Tangenten $t_1 = S_1S_2$, $t_3 = S_3S_2$ und bestimmt somit eindeutig den Kegelschnitt.

Wir untersuchen nun die Punktgebiete, in denen S_2 liegen muss, damit eine Ellipse bzw. Parabel bzw. Hyperbel entsteht.



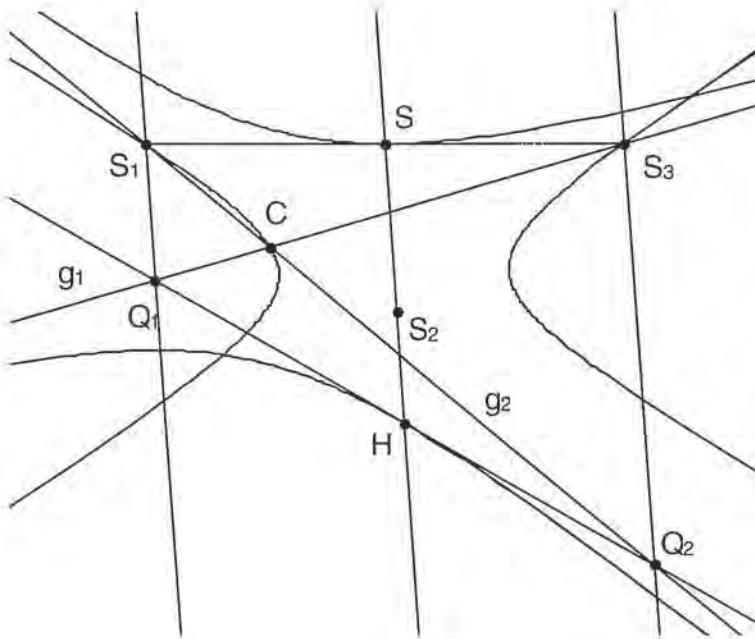
Figur 14

Bei zunächst beliebiger Lage von S_2 betrachten wir den Durchmesser $d = SS_2$. Wir halten ihn fest und fragen: auf welchem Punkt H dieses Durchmessers d muss S_2 liegen, damit eine Parabel entsteht?

Der Fernpunkt von d muss dann ein Kurvenpunkt sein. Wir verbinden ihn durch die Paralle-

len zu d mit S_1 und S_3 und erhalten die Punkte Q_1 und Q_2 auf g_1 und g_2 . Der Schnittpunkt von Q_1Q_2 mit d ist der gesuchte Punkt H .

H ist offenbar der Mittelpunkt von Q_1Q_2 . Dreht sich d um S , so wandert Q_1 auf g_1 , Q_2 auf g_2 und H auf einer Hyperbel, der Grenz-Hyperbel. Ihre Asymptoten sind g_1 und g_2 und sie geht durch S .



Liegt das Büschelzentrum S_2 im inneren Punktgebiet der Hyperbel (Punkte, durch die keine Hyperbeltangente geht) so erzeugt es eine Ellipse (Figur 14). Liegt das Büschelzentrum S_2 im äußeren Punktgebiet der Hyperbel, so erzeugt es eine Hyperbel (Figur 15).

Figur 15

Orthogonale Kreisbündel

Involutionen und imaginäre Schnittpunkte

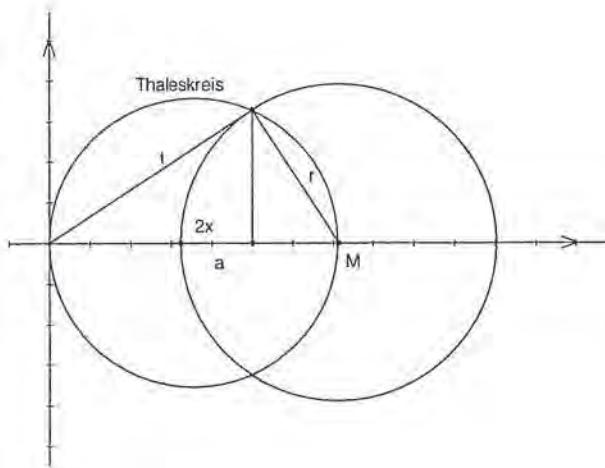
Peter Baum

Die folgende Betrachtung beschreibt einen Sachverhalt, der ab Klasse 11 thematisiert werden kann. Dort werden in der analytischen Geometrie Schnittpunkte von zwei Kreisen berechnet. Dabei erhält man zunächst durch Subtraktion der Kreisgleichungen die Gleichung der gemeinsamen Sekante, die durch die beiden Schnittpunkte geht. Man erhält aber durch Subtraktion zweier Kreisgleichungen immer eine Geradengleichung, auch wenn sich die Kreise nicht schneiden oder berühren. In diesem Fall führt die weitere Berechnung der Schnittpunkte dieser Geraden (Chordale oder Potenzlinie der beiden Kreise) mit einem der Kreise bekanntlich zu negativen Radikanden einer Gleichung zweiten Grades, also zu komplexen Lösungen. Am Ende dieser Betrachtung wird gezeigt, wie diese komplexen Zahlen direkt mit der Lage von Kreis und Gerade zusammenhängen.

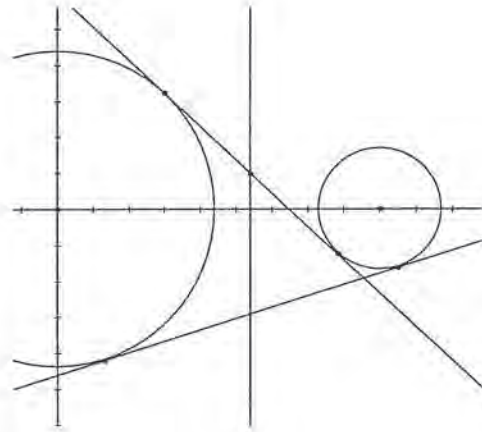
Der Versuch, das Imaginäre geometrisch zu deuten, hat viele Mathematiker seit dem 16. Jahrhundert beschäftigt. Bekannt ist die komplexe Zahlenebene von C.F. Gauß, weniger bekannt ist die Imaginärtheorie von C. v. Staudt, in der imaginäre Elemente durch geometrische Bewegungen dargestellt werden. Felix Klein widmet ihr ein Kapitel in seinen Vorlesungen „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ (Bd. II S.126, Berlin 1925). L. Locher-Ernst hat sie in seinem Buch „Geometrische Metamorphosen“ (Dornach 1970) im Kapitel „Das Imaginäre in der Geometrie“ beschrieben und die Pfeildarstellung erläutert. Im 27. Kapitel „Der Kreis als Stauprodukt einer Bewegungsgestalt“ des Buches „Projektive Geometrie“ (Stuttgart 1984) beschreibt Arnold Bernhard die Involution auf einer Geraden und macht im Anhang einige Bemerkungen über die zu imaginären Zahlen führenden analytischen Rechnungen. Ich habe hier versucht, denselben Sachverhalt als Unterrichtssequenz darzustellen.

1 . Die Chordale oder Potenzlinie zweier Kreise

Ausgehend von zwei auseinanderliegenden Kreisen kann man die Chordale von den Schülern berechnen und an Hand der Gleichung zeichnen lassen. *Wie lässt sie sich aber konstruieren ?*



Figur 1



Figur 2

Diese Frage versuchen die Schüler an Hand mehrerer gezeichneter Beispiele zu beantworten. Erste Eigenschaften der Chordale werden schnell entdeckt:

- sie steht senkrecht auf der Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte
- sie halbiert diese Strecke, falls die Kreisradien gleich groß sind
- sie liegt näher am größeren Kreis (Fig. 2).

Der Lehrer unterliegt nun leicht der Versuchung, zu schnell weitere Hilfen zu geben. Es schadet aber nichts, ein Problem ein oder zwei Tage stehen zu lassen, falls niemand eine Lösung findet. Wie man, wenn keiner fündig geworden ist, behutsam weiter vorgeht, hängt sehr von der Klasse und dem bislang behandelten Stoff ab. Verschiedenes ist denkbar:

- Extremfälle werden untersucht: ein Kreis wird zum Punkt
- die gemeinsamen Tangenten werden gezeichnet
- die Rechnung wird allgemein durchgeführt.

Letzteres sei kurz erläutert.:

Gegeben seien die Kreisgleichungen $x^2 + y^2 = s^2$ und $(x - a)^2 + y^2 = r^2$.

Subtraktion führt zur Geradengleichung $2ax - a^2 = s^2 - r^2$,

also $2ax = s^2 + a^2 - r^2$.

Im Extremfall ist $s = 0$ und wir erhalten $2ax = a^2 - r^2$. Hier entsteht nun die Aufgabe, die Größen einer Gleichung geometrisch zu interpretieren; ein oft fruchtbares Verfahren zum Entdecken von Konstruktionen.

Die Differenz zweier Quadrate lässt sich als ein Kathetenquadrat deuten. So kommt man zum Thaleskreis über der Hypotenuse a und zur Tangente vom Ursprung an den Kreis mit dem Tangentenabschnitt t (Kathete): $t^2 = a^2 - r^2$. Die Gleichung $2ax = t^2$ stellt dann den Kathetensatz dar und die Strecke $2x$ ist die Subtangente (Fig. 1).

Somit halbiert die Chordale die Subtangente und den Tangentenabschnitt t . Ist $s > 0$, so halbiert die Chordale die Abschnitte auf den vier gemeinsamen Kreistangenten.

Dies sehen die Schüler nun an ihren Zeichnungen. Zum Beweis benötigt man den Begriff der *Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis*, den man bei dieser Gelegenheit einführen kann:

P sei ein Punkt außerhalb eines Kreises k . Eine beliebige durch P gehende Kreissekante schneidet k in A und B , eine zweite solche Sekante schneidet k in C und D . Dann ist nach dem Sekantensatz das Produkt der gerichteten Abschnitte auf den Sekanten gleich

groß: $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PC} \cdot \vec{PD} = p(P)$ und hängt lediglich von k und der Lage von P zu k ab.

Man nennt dieses Produkt $p(P)$ die *Potenz von P in bezug auf k* . Im Grenzfall $C = D = T$ ist die Sekante eine durch P gehende Tangente mit dem Berührungspunkt T und es ist

$$p(P) = \vec{PT}^2 = t^2$$

Die Potenz ist positiv, da jeweils beide Strecken von P aus gesehen gleiche Richtung haben. Liegt P auf dem Kreis, ist $p(P) = 0$. Liegt P im Innern des Kreises, haben die beiden Sekantenabschnitte verschiedene Richtung und die Potenz $p(P)$ ist negativ.

Die Bezeichnung Potenz stammt von Jakob Steiner¹, der ihn in Anlehnung an die „Potenz der Hyperbel“ (konstanter Inhalt des zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten eingeschlossenen Parallelogramms) verwendet. Der Sekantensatz steht bei Euklid (Elemente, 3. Buch, Satz 36).

2. Orthogonale Kreisbüschel

Gegeben sind zwei feste Punkte A und B auf der x -Achse (Fig. 3). Die Mittelsenkrechte von AB sei die y -Achse. Alle Kreise, die durch A und B gehen, bilden ein Kreisbüschel. Ihre Mittelpunkte liegen auf der y -Achse. Die Gerade AB ist gemeinsame Sekante aller Kreise; sie heißt Chordale oder Potenzlinie dieser Kreise, da ein Punkt P auf AB in bezug auf jeden Kreis des Büschels dieselbe Potenz $p(P)$ besitzt: $p(P) = PA \cdot PB = t^2$

Ist T der Berührungspunkt irgendeiner durch P gehenden Tangente an irgendeinen Büschelkreis, so ist $PT = t$.

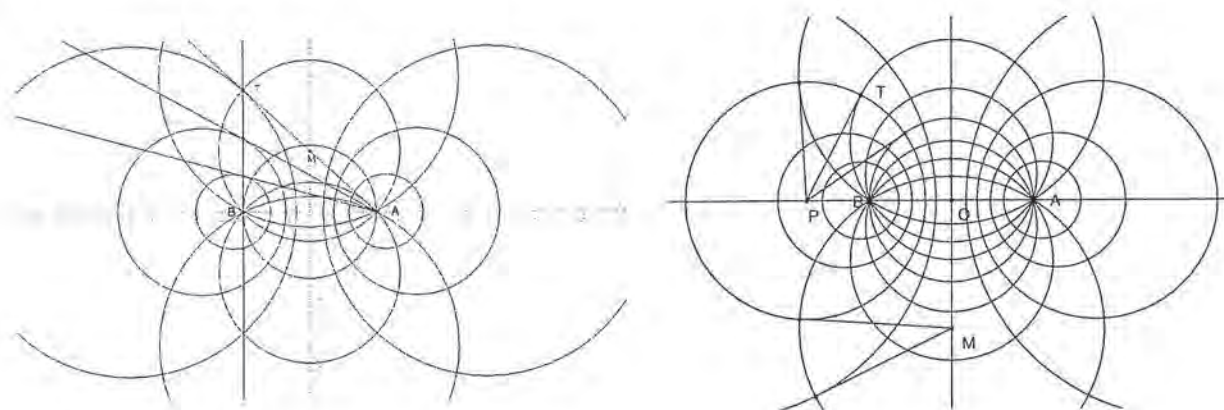
Hieraus folgt, dass der Kreis mit dem Mittelpunkt P und dem Radius $t = \sqrt{p(P)}$ alle Büschelkreise rechtwinklig (orthogonal) schneidet. Wandert P mit diesem Kreis auf der Potenzgeraden AB , so entsteht ein zweites Kreisbüschel mit der Eigenschaft, dass jeder Kreis des zweiten Büschels zu jedem Kreis des ersten Büschels orthogonal ist.

Hieraus folgt, dass jeder Kreismittelpunkt M des ersten Kreisbüschels in bezug auf alle Kreise des orthogonalen Kreisbüschels dieselbe Potenz besitzt, weil jeder zu M gehörende Radius auch ein Tangentenabschnitt für einen Kreis des zweiten Büschels ist. Daher ist die

Mittelsenkrechte von AB (y -Achse) Potenzlinie des zweiten Kreisbüschels. Während sich alle Kreise des ersten Büschels in den beiden Punkten A und B schneiden, haben je zwei Kreise des zweiten orthogonalen Büschels keinen gemeinsamen Punkt.

Ferner kann man bemerken, dass beide Büschel durch irgend zwei Kreise eines Büschels bestimmt werden. Denn zwei Kreise bestimmen genau eine Potenzlinie und damit alle anderen Kreise, welche mit diesen Kreisen dieselbe Potenzlinie besitzen.

Die beiden Potenzlinien können als Grenzkreise, die den Fernpunkt der jeweils anderen Potenzlinie zum Mittelpunkt haben, aufgefasst werden. Während jeder Punkt der Mittelsenkrechten von AB Kreismittelpunkt ist, liegen innerhalb der Strecke AB keine Kreismittelpunkte des zweiten Büschels.



Figur 3

Man kann nun eine weitere Eigenschaft des zweiten Kreisbüschels bemerken. Es sei a die durch B gehende Parallele zur y -Achse und b die durch A gehende Parallele. Dann sind (A,a) und (B,b) Pol und Polare in bezug auf jeden Kreis des zweiten Büschels. Dies folgt so: sei k ein beliebiger Kreis des zweiten Büschels, so dass A außerhalb von k liegt. Die durch A gehende Tangente an k berührt k in T und schneidet die y -Achse in M . Der Kreis des ersten Büschels mit dem Mittelpunkt M hat dann diese Tangente zur Zentralen und geht durch die Punkte A, B, T , die ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Durchmesser AT als Hypotenuse bilden (Thales). Folglich steht die Gerade BT auf AB senkrecht und ist daher die Polare a von A . (Fig. 3)

¹ Jakob Steiner: Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln. Zürich 1931

3 . Involution auf einer Geraden

Für das Folgende muss kurz der Begriff der *Involution auf einer Geraden* g erklärt werden. Es sei k ein Kreis und g eine Gerade. Jedem Punkt P der Geraden g kann dann folgendermaßen ein bestimmter auf g liegender Punkt P' zugeordnet werden: die Polare p von P in bezug auf den Kreis k schneidet die Gerade g in P' . Man nennt diese Zuordnung eine Involution auf der Geraden g . Dem Punkt P' kann nun ebenso ein Punkt P'' zugeordnet werden. Nach dem Hauptsatz der Polarentheorie geht aber die Polare von P' durch P , weil P' auf der Polaren von P liegt. Also ist $P'' = P$. Die gegenseitig einander zugeordneten Punkte P und P' nennt man konjugiert.

Man bemerkt sofort: ist die Gerade g eine Sekante, so sind die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 von g mit dem Kreis k zu sich selbst konjugiert: $S_1 = S_1'$ und $S_2 = S_2'$.

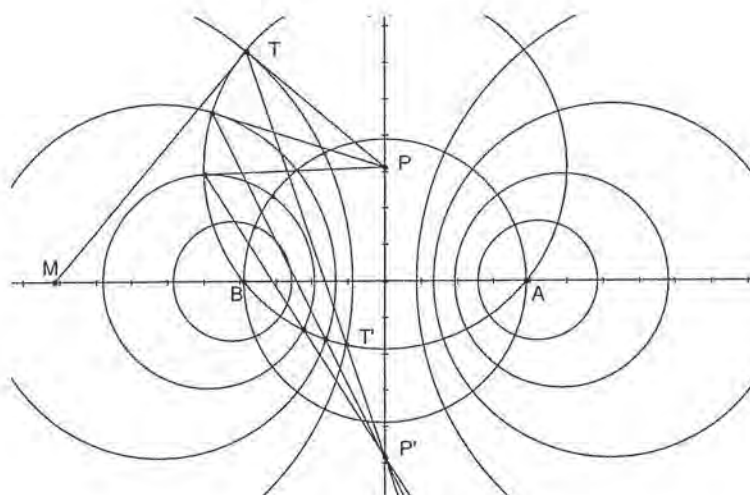
Man nennt sie die Doppelpunkte der Involution. Wandert P auf der Sekante g , so wandert sein konjugierter Punkt P' auf g in entgegengesetzter Richtung. Diese Involutionen heißen gegenläufig oder hyperbolisch. Die auf einer Passanten induzierte Involution ist dagegen gleichläufig, die konjugierten Punkte wandern in derselben Richtung hintereinander her, es gibt keine reellen Doppelpunkte (elliptische Involution). Ist g eine Tangente, so ist die Involution ausgeartet, da der Berührungspunkt zu jedem Punkt der Tangente konjugiert ist (parabolische Involution).

Für die beiden orthogonalen Kreisbündel gilt nun folgender Sachverhalt:

Jeder Kreis k' des zweiten Bündels erzeugt auf der y -Achse *dieselbe* elliptische Involution, und jeder Kreis k des ersten Bündels erzeugt auf der x -Achse *dieselbe* hyperbolische Involution. Die Schnittpunkte von k mit der y -Achse und die Schnittpunkte von k' mit der x -Achse bilden jeweils ein Paar konjugierter Punkte der betreffenden Involution.

Wir müssen zeigen: ist P ein beliebiger Punkt der y -Achse, so schneiden sich alle Polaren

Figur 4



von P bezüglich der Kreise k' in einem Punkt P' auf der y -Achse, und P' liegt auf dem Umkreis k^* von ABP (Fig. 4).

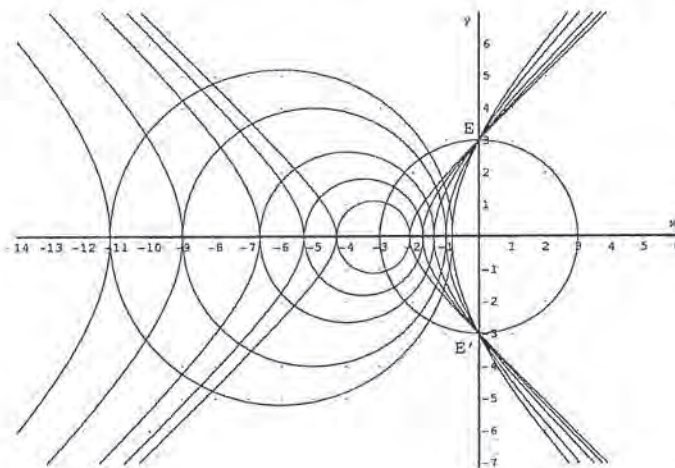
Sei k ein beliebiger Kreis des ersten Büschels, er geht dann durch A und B . Der Mittelpunkt von k sei M . Ist nun k' ein beliebiger Kreis des zweiten Büschels mit dem Mittelpunkt M' und sind T und T' die Schnittpunkte von k und k' , so ist wegen der Orthogonalität der Kreise k und k' die gemeinsame Sekante TT' die Polare von P in bezug auf k' und die Polare von M in bezug auf k . Sie schneidet die y -Achse in einem Punkt P' . Da M auf der Geraden AB liegt, muss nach dem Hauptsatz der Polarentheorie die Polare TT' von M durch den Pol P^* von AB in bezug auf k gehen. Dieser Pol P^* liegt aber auf der y -Achse, also ist $P' = P^*$. Die Geraden $P'A$ und $P'B$ sind dann Tangenten an k und stehen senkrecht auf den Kreisradien PA und PB . Folglich liegen die Punkte P, A, P', B auf einem Thaleskreis, der auch dem ersten Kreisbüschel angehört, und sind unabhängig von der Wahl von k' .

P und P' sind somit konjugierte Punkte einer Involution auf der y -Achse. Jeder Kreis k' des zweiten Büschels induziert also *dieselbe* Involution auf der y -Achse. Jeder Kreis k des ersten Büschels schneidet die y -Achse in konjugierten Punkten der Involution.

Genau so kann man zeigen, dass jeder Kreis des ersten Büschels auf der x -Achse *dieselbe* Involution erzeugt. Jeder Kreis k' des zweiten Büschels schneidet die x -Achse in konjugierten Punkten der Involution. Die Involution auf der x -Achse ist gegenläufig (hyperbolisch), mit den reellen Doppelpunkten A und B , während auf der y -Achse eine gleichläufige (elliptische) Involution induziert wird.

Diese besitzt zwei imaginäre Doppelpunkte, die durch die Enge EE' , die Schnittpunkte des kleinsten Kreises k_0 des ersten Büschels mit der y -Achse, charakterisiert sind, wie wir noch sehen werden.

Ohne Beweis sei angefügt:



Zu jedem Kreis k' des zweiten Büschels gehört eine gleichseitige Hyperbel, die in ihren Scheitelpunkten den Kreis k' auf der x -Achse berührt. Somit induziert das zweite Kreisbüschel eine gleichseitige Hyperbelschar. Es stellt sich nun heraus, dass sich alle Hyperbeln in den beiden Punkten E und E' auf der y -Achse schneiden (Fig. 5).

Figur 5

Es ist sinnvoll, die Schüler beschreiben zu lassen, wie sich ein Kreis beim Durchlaufen seines Bündels verändert. Interessant ist beim zweiten Bündel das Verschwinden des Kreises im Punkt A und sein Auftauchen im Punkt B. An der Figur der beiden orthogonalen Kreisbündel lassen sich noch eine Fülle von schönen Vorstellungsübungen entwickeln.

4. Eine geometrische Deutung der komplexen Lösungen

Berechnet man die Koordinaten der Schnittpunkte irgend zweier Kreise des ersten Bündels, so erhält man natürlich immer dieselben reellen Lösungspaare $A(x_A/y_A)$, $B(x_B/y_B)$.

Für $A(a/0)$ und $B(-a/0)$ lautet die Parametergleichung des ersten Bündels:

$$x^2 + (y - t)^2 = a^2 + t^2.$$

Für die Parametergleichung des zweiten Bündels erhält man:

$$(x - s)^2 + y^2 = s^2 - a^2.$$

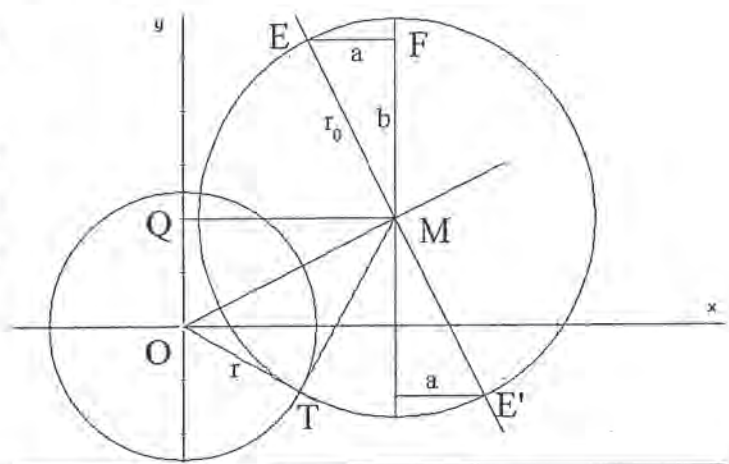
Berechnet man die Schnittpunkte irgend zweier Kreise des zweiten Bündels, so erhält man zunächst immer dieselbe Chordale $x = 0$ und dann die imaginären Lösungen $y = \pm i \cdot a$. Die Punkte $E(0/a)$ und $E'(0/-a)$ sind die Schnittpunkte der Chordalen mit dem Kreis um O mit dem Radius a , dem kleinsten Kreis des ersten Bündels. Die Strecke EE' nennt Arnold Bernhard die Enge der elliptischen Involution. Bei allgemeiner Lage der Kreisbündel im Koordinatensystem erhält man sowohl für die x -Werte als auch für die y -Werte zwei konjugiert-komplexe Lösungen. Wir vermuten: *Die komplexen Lösungen führen immer zu den charakteristischen Punkten E und E'!*

Um dies zu erkennen, beschränken wir uns bei der Rechnung auf die Potenzlinie als speziellen Bündelkreis und einen weiteren Bündelkreis und berechnen die Schnittpunkte. Ferner wählen wir für die Potenzlinie eine Passante in allgemeiner Lage und legen den Kreismittelpunkt in den Ursprung des kartesischen Koordinatensystems. Das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Gerade hat den Lotfußpunkt (x_M/y_M) , dessen Koordinaten die Lage der Passante vollständig bestimmen. Dann ergibt sich folgende Figur 6:

Der Kreis um O hat die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Das Lot vom Ursprung O auf die Passante g hat den Fußpunkt M (x_M/y_M) . Dann hat die Passante g die Gleichung

$$\frac{y - y_M}{x - x_M} = -\frac{x_M}{y_M}$$



Es seien $E(x_M - a/y_M + b)$, $E'(x_M + a/y_M - b)$ die Schnittpunkte der Passante g mit dem Kreis k_0 um $M(x_M/y_M)$, der den gegebenen Kreis um O orthogonal in T schneidet.

Dann ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MEF und OMQ (Figur 6)

$$\frac{a}{y_M} = \frac{b}{x_M}, \text{ also } a \cdot x_M = b \cdot y_M. \quad (1)$$

Der Satz des Pythagoras liefert in bezug auf die Dreiecke MEF und OMT die Gleichung

$$a^2 + b^2 = x_M^2 + y_M^2 - r^2 = r_0^2 \quad (2)$$

Wir vermuten nun, dass die gemeinsamen imaginären Punkte von Kreis und Passante folgende komplexe Koordinaten haben:

$$S_1(x_M - i \cdot a | y_M + i \cdot b) \\ S_2(x_M + i \cdot a | y_M - i \cdot b)$$

Wenn das stimmt, müssen die Koordinaten die Kreisgleichung und die Passantengleichung erfüllen. Einsetzen in die Gleichung der Passante ergibt:

$$\frac{y - y_M}{x - x_M} = \frac{i \cdot b}{-i \cdot a} = -\frac{b}{a} = -\frac{x_M}{y_M},$$

$$\text{also } a \cdot x_M = b \cdot y_M.$$

Gleichung (1) ist damit erfüllt.

Einsetzen in die Kreisgleichung ergibt

$$(x_M - i \cdot a)^2 + (y_M + i \cdot b)^2 = r^2 \\ x_M^2 - 2 \cdot x_M \cdot i \cdot a - a^2 + y_M^2 + 2 \cdot y_M \cdot i \cdot b - b^2 = r^2 \\ -2 \cdot i \cdot (a \cdot x_M - b \cdot y_M) = a^2 + b^2 + r^2 - (x_M^2 + y_M^2)$$

wegen Gleichung (1) und (2) also $0 = 0$.

Ebenso erfüllt das zweite komplexe Lösungspaar die Geraden- und Kreisgleichung.

Man darf natürlich nicht die reellen Punkte E und E' mit den imaginären Punkten S_1 und S_2 identifizieren. Aber für die Schüler ist es doch befriedigend, dass die Real- und Imaginär-

teile der komplexen Lösungen mit den reellen Koordinaten der charakteristischen Punkte E und E' identisch sind.

Man kann hier ohne weiteres die Darstellung einer komplexen x -Koordinate als Pfeil auf der x -Achse und der komplexen y -Koordinate als Pfeil auf der y -Achse einführen. Die Verschiebung der Pfeile in den Punkt M und ihre übliche Addition führt dann zu den Pfeilen $\overrightarrow{ME}$ und $\overrightarrow{ME'}$, mit denen die Involution auf g üblicherweise bezeichnet wird.

Zum Schluss noch eine Bemerkung zu den Bezeichnungen hyperbolisch und elliptisch.

Wir haben den Begriff der Involution über die Pol-Polare Beziehung am Kreis erklärt. An den orthogonalen Kreisbündeln haben wir gesehen, dass die Involution auf der Potenzlinie durch die beiden Doppelpunkte A und B festgelegt ist und dann unabhängig von der Wahl eines bestimmten Kreises ist: jeder Kreis, der durch A und B geht, erzeugt dieselbe Involution.

Man kann zeigen, dass auch jede Ellipse, Parabel oder Hyperbel, die durch A und B geht, mit der Pol-Polare Beziehung dieselbe Involution auf der Geraden AB erzeugt.

Es gibt in der projektiven Ebene eine besondere Gerade, die Ferngerade. Jeder Kegelschnitt erzeugt auch auf der Ferngeraden eine Involution. Da jede Hyperbel die Ferngerade in zwei reellen Punkten schneidet, erzeugt sie auf ihr eine gegenläufige Involution mit zwei reellen Doppelpunkten, die daher hyperbolisch genannt wird.

Jede Ellipse hat die Ferngeraden zur Passante, erzeugt also auf ihr eine gleichsinnige Involution mit zwei imaginären Doppelpunkten, die daher elliptisch genannt wird.

Erzeugung regelmäßiger Körper aus dem Tetraeder

Uwe Hansen

Vorbemerkung

Durch Gegenüberstellen zweier zueinander polarer Körper kann man dem Schüler die Möglichkeit geben, die polaren Elemente des Raumes und ihre gegenseitigen Beziehungen kennen zu lernen.

Daran anknüpfend kann der Schüler auch den Zusammenhang, das auf einander Abgestimmtsein polarer Vorgänge sich erarbeiten:

Nähert sich z.B. ein Punkt eines Körpers dem Zentrum des Körpers, so entfernt sich die zum Punkt polare Ebene des polaren Körpers im gleichen Verhältnis vom Zentrum. Durchläuft ein Punkt die Kante eines Körpers, so dreht sich die zum Punkt polare Ebene um die entsprechende Kante des polaren Körpers.

Dreht sich eine Gerade in einer Ecke eines Körpers, so bewegt sich die polare Gerade entsprechend in der zur Ecke polaren Fläche des polaren Körpers. Durchläuft eine Gerade sogar ein Strahlenbüschel, so durchläuft die polare Gerade ebenfalls ein Strahlenbüschel.

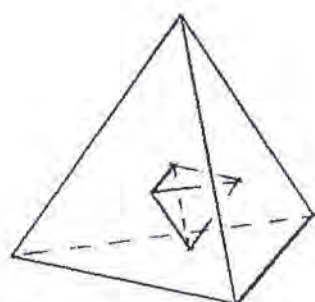
Durch solche Bewegungsvorgänge wird die Polarität von Punktreihe und Ebenenbüschel bzw. die Selbstpolarität des Strahlenbüschels besonders deutlich. Durch Übungen im räumlichen Vorstellen werden diese polaren Zusammenhänge auch stärker erlebbar, als durch entsprechende Übungen in der Geometrie der Ebene.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Erleben des Gegensatzes innen und außen, von Kern und Hülle. Durchdringen sich zwei Körper, so kann man nach den gemeinsamen Punkten fragen und kommt zum Kern des Durchdringungskörpers. Die Ebenen, die beide Körper umhüllen, bilden die Hülle des Durchdringungskörpers. Beim Kern denkt man punktuell von innen nach außen; bei der Hülle ist das Zentrum die unendlichferne Ebene des Raumes, während beim Kern vom Mittelpunkt des Körpers aus gedacht wird. Durch diese Gegenüberstellung wird ein gegenräumliches Empfinden vorbereitet.

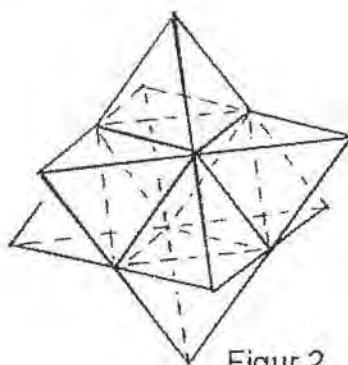
Es werden hier die Körper noch ganz im Sinne der euklidischen Geometrie betrachtet. Durch das Polaritätsgesetz werden aber wesentliche Elemente der projektiven Geometrie vorbereitet.

Das Folgende zeigt, wie sich aus dem Tetraeder weitere regelmäßige und halbberegelmäßige Körper entwickeln lassen. Diese Entwicklung kann für den Unterricht eine Orientierung geben.

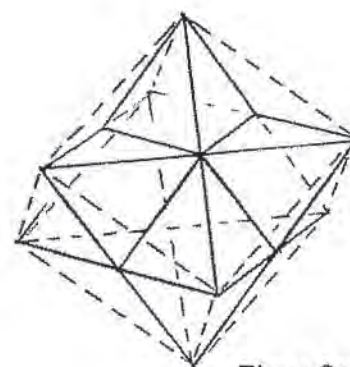
Das Tetraeder ist der einzige von den fünf platonischen Körpern, der zu sich selbst polar ist. Die Mittelpunkte der vier Tetraederflächen bilden daher wieder einen Tetraeder (Figur 1).



Figur 1



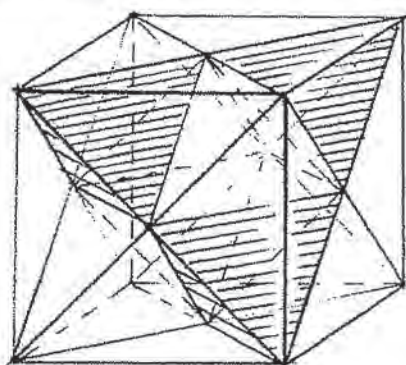
Figur 2



Figur 2a

Vergrößert man den inneren, kleineren Tetraeder vom gemeinsamen Mittelpunkt der Tetraeder durch eine zentrische Streckung, bis beide Tetraeder gleich groß sind, entsteht das Doppeltetraeder (Figur 2). Die Kanten der beiden Tetraeder halbieren sich gegenseitig, außerdem schneiden sie sich rechtwinklig.

Diese beiden gleich großen Tetraeder durchdringen sich so, dass die Punkte, die in beiden Tetraedern liegen – wobei die Randpunkte eingeschlossen sind – die inneren Punkte eines Oktaeders bilden. Der Kern des Durchdringungskörpers ist also ein Oktaeder. Gleichzeitig gilt: alle die Ebenen, die beide Tetraeder umhüllen, umhüllen den Würfel, dessen acht Ecken die acht Tetraederecken sind, wie ja die acht Oktaederflächen auch Tetraederflächen sind. Die Ebenenhülle des Doppeltetraeders ist also die Würfelhülle (Figur 2a). Dies sieht man auch in Figur 3, wo die Tetraeder auf der Kante stehen.

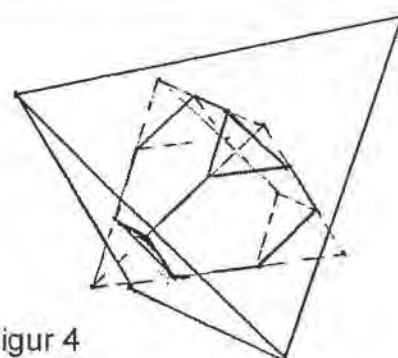


Figur 3

Würfel und Oktaeder sind zueinander polare Körper. Die Mittelpunkte der Würfelflächen bilden die Oktaederecken. Jeder dreistrahligen Würfecke steht eine dreiseitige Oktaederfläche gegenüber. Entsprechend liegt jede vierstrahlige Oktaederecke in einer vierseitigen Würfelfläche. Würfelkante und entsprechende Oktaederkante haben zueinander senkrechte Richtungen.

In Figur 1 hat der kleinere Tetraeder

eine Kantenlänge, die ein Drittel der Kantenlänge des größeren Tetraeders ist. Wird dieser kleinere Tetraeder so vergrößert, dass sich die Kantenlänge zur Kantenlänge des größeren verhält wie 3:5 so entsteht im Übergang zu Figur 2 eine wichtige Zwischenstellung: Dann schneiden die Flächen des größeren Tetraeders vom kleineren die Ecken so ab, dass die Dreiecksflächen des kleineren Tetraeders zu regelmäßigen Sechsecken werden. Es entsteht der Tetraederstumpf, ein archimedischer Körper, also ein Körper,

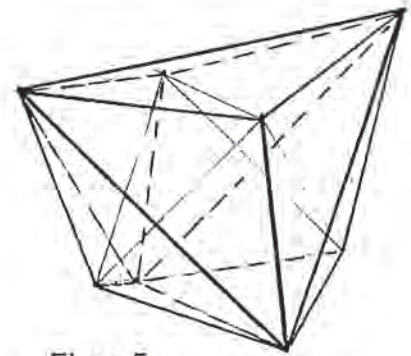


Figur 4

bei dem alle Kanten dieselbe Länge haben und dessen Flächen regelmäßige Vielecke sind (Figur 4).

Der Tetraederstumpf hat 12 Ecken, 18 Kanten und 8 Flächen und zwar 4 Dreiecke und 4 Sechsecke.

Die Ecken des Tetraederstumpfes sind die Schnittpunkte der Flächen des größeren Tetraeders mit den Kanten des kleineren Tetraeders. Gleichzeitig vollzieht sich ein polarer Prozess: Die Verbindungsebenen der Spitzen des kleinen Tetraeders mit den Kanten des größeren Tetraeders erzeugen die Flächen des Pyramidentetraeders, des zum Tetraederstumpf gehörenden polararchimedischen Körpers. Tetraederstumpf und Pyramidentetraeder entstehen gleichzeitig – sie bedingen einander. An den Ecken des größeren Tetraeders entstehen regelmäßige Sechsecke, die polar zu den Sechsecken des Tetraederstumpfes sind (Figur 5).



Figur 5

Durch das Eindringen der Spitze des kleineren Tetraeders in den Ebenenraum, der den größeren umhüllt, wird dieser Ebenenraum eingeschränkt. Entsprechend wird durch die Ebenen des größeren Tetraeders der Punktraum des kleineren verringert.

Bei einem polararchimedischen Körper schneiden sich benachbarte Flächen stets unter dem gleichen Winkel; alle Ecken sind regelmäßige Vielfache.

Der Pyramidentetraeder hat 12 Flächen, 18 Kanten und 8 Ecken, und zwar 4 dreistrahlig und 4 sechsstrahlige Ecken.

Durch Gegenüberstellen von Würfel und Oktaeder kann man in die Gesetze der Polarität des Raumes einführen; dies kann z.B. am Anfang einer Epoche geschehen.

<u>Würfel</u>		<u>Oktaeder</u>
8 Ecken	↗ ↘	6 Ecken
12 Kanten	↗ ↘	12 Kanten
6 Flächen	↗ ↘	8 Flächen

In jeder Fläche liegen 4 Ecken und 4 Kanten

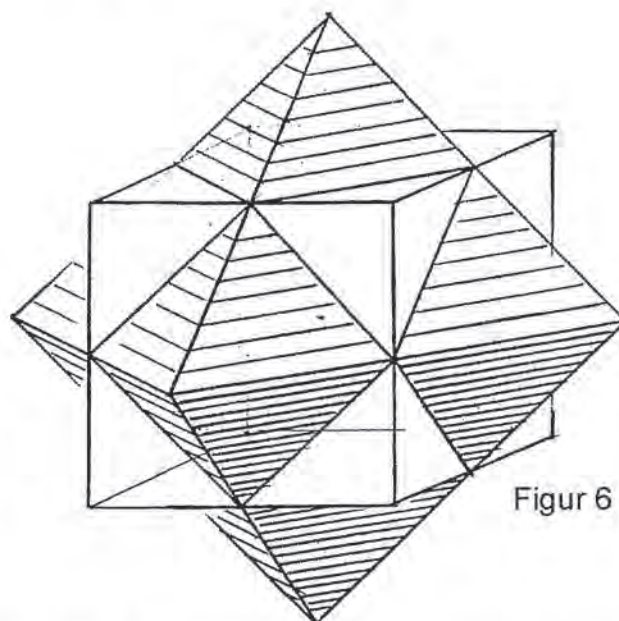
Durch jede Ecke gehen 4 Flächen und 4 Kanten

Durch jede Ecke gehen 3 Flächen und 3 Kanten

In jeder Fläche liegen 3 Ecken und 3 Kanten

Diese Gegenüberstellung zeigt: Ecke (Punkt) und Fläche (Ebene) sind polare Elemente des Raumes. Die Gerade ist zu sich selbst polar. Sie vermittelt zwischen Punkt und Ebene.

Diese Beziehungen lassen sich besonders gut am Durchdringungskörper von Würfel und Oktaeder zeigen (Figur 6).



Figur 6

Würfelkante und Oktaederkante halbieren sich gegenseitig. Sie stehen senkrecht auf einander. Jeder Ecke des einen Körpers steht eine Fläche des anderen (polaren) Körpers gegenüber:

dreistrahlig-e Ecke des Würfels	—	dreiseitige Fläche des Oktaeders
vierstrahlige Ecke des Oktaeders	—	vierseitige Fläche des Würfels

Polar zu einander sind

Vierkant	—	Vierseit
Vierflach	—	Viereck
Dreikant	—	Dreiseit
Dreiflach	—	Dreieck
Verbindungsgerade zweier Punkte	—	Schnittgerade zweier Ebenen
Ein Punkt durchläuft eine Gerade (Punktreihe)	—	Eine Ebene dreht sich in einer Geraden (Ebenenbüschel)

Ein Punkt durchläuft die drei Seiten einer Oktaederfläche.

polar: Eine Ebene dreht sich um die drei Kanten einer Würfecke. Der Drehsinn der Ebenenbewegung muss so gewählt werden, dass die Ebene nicht durch den Mittelpunkt des Würfels geht, da die Oktaederfläche ganz im Endlichen liegt.

Dreht sich eine Ebene so um eine Kante, dass sie durch den Mittelpunkt geht, so durchläuft der polare Punkt den Grenzpunkt der polaren Kante.

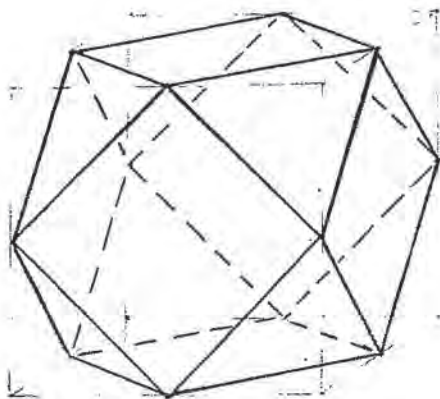
Durchläuft eine Gerade ein Strahlenbüschel, so durchläuft die polare Gerade ebenfalls ein Strahlenbüschel. Dreht sich z.B. eine Gerade in einer Oktaederecke so, dass sie eine Okta-

ederfläche überstreicht, so dreht sich die polare Gerade in eine Würfel­fläche so, dass sie durch die zur Oktaederfläche polare Würfecke geht, dabei aber die Würfel­fläche umhüllt.

Geht eine Gerade durch den Mittelpunkt, so ist die polare Gerade eine Grenzgerade.

Die Begriffe „Grenzpunkt“ und „Grenzgerade“ muss man sinnvoll vorbereiten. Dies kann auch durch die Figur 6 geschehen, indem man zunächst erkennt: Sind zwei Flächen eines Körpers parallel, so geht die Verbindungsgerade der beiden polaren Ecken durch den Mittelpunkt. Sind zwei Kanten eines Körpers parallel, so geht die Verbindungsebene der polaren Kanten durch den Mittelpunkt.

Die Figur 6 lässt auch den folgenden Zusammenhang erkennen: Der Kern dieses Durchdringungskörpers, d.h. der größte Körper, der in Würfel und Oktaeder liegt, ist das Kuboktaeder (Figur 7). Die Ecken des Kuboktaeders sind die Schnittpunkte von Würfelkante und polarer Oktaederkante. Daher wird der zum Kuboktaeder polare Körper gebildet von den Verbindungsebenen von Würfelkante und polarer Oktaederkante, sodass das Rhombendodekaeder entsteht (Figur 8).



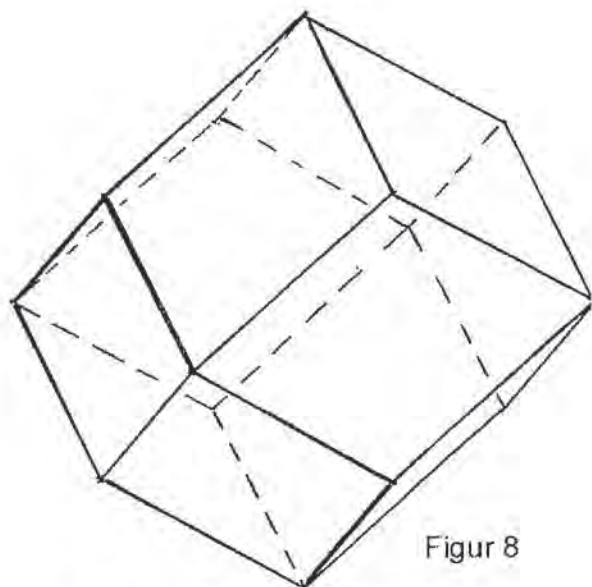
Figur 7

Das Kuboktaeder

12 Ecken

24 Kanten

14 Flächen (8 Dreiecke, 6 Quadrate)



Figur 8

Das Rhombendodekaeder

12 Flächen

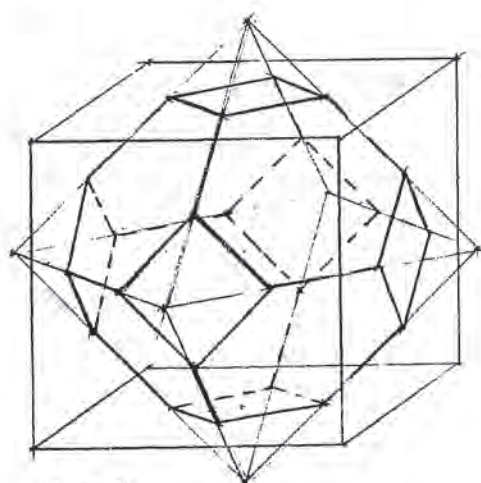
24 Kanten

14 Ecken (8 dreistrahlig, 6 vierstrahlig)

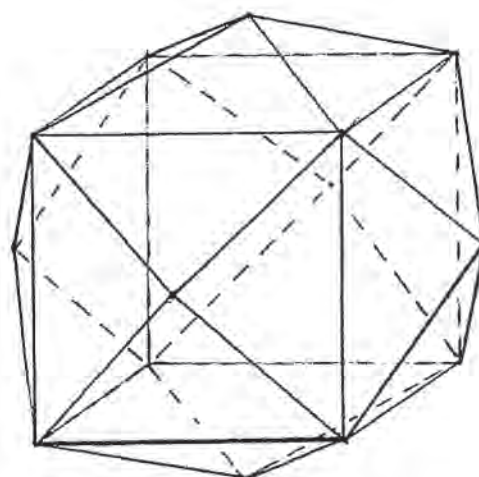
Das Kuboktaeder ist ein archimedisches Körper; das Rhombendodekaeder ist der zugehörige polar-archimedische Körper. Da das Kuboktaeder keine Inkugel besitzt – wie alle archimedischen Körper – bilden die Flächenmitten des Kuboktaeders nicht das Rhombendodekaeder.

Alle Punkte, die sowohl im Würfel als auch im Oktaeder liegen (siehe Figur 6), bilden das Kuboktaeder. Alle Ebenen, die den Würfel und das Oktaeder umhüllen, umhüllen das Rhombendodekaeder.

Aus der Durchdringung von Würfel und Oktaeder lassen sich vier weitere halbregelmäßige Körper bilden.



Figur 9



Figur 10

In Figur 9 durchdringt das Oktaeder den Würfel so, dass die Achse des Oktaeders das 1,5-fache der Würfelkante ist. Dadurch entstehen gleichzeitig der Oktaederstumpf – ein archimedischer Körper – und die Würfelpyramide – ein polar-archimedischer Körper (Figur 9 und Figur 10). Das Verhältnis ist so gewählt, dass die Oktaederflächen zu regelmäßigen Sechsecken werden, bzw. dass an den Würfecken regelmäßige Sechsecke entstehen.

Oktaederstumpf

24 Ecken

36 Kanten

14 Flächen

(6 Quadrate, 8 regelmäßige Sechsecke)

Würfelpyramide

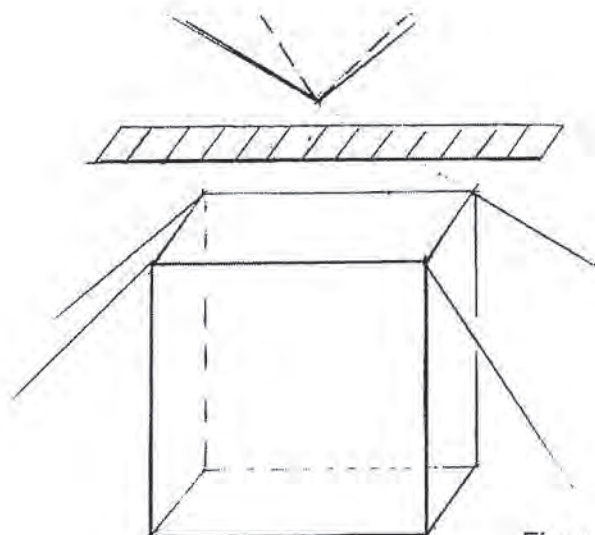
24 Flächen

36 Kanten

14 Ecken

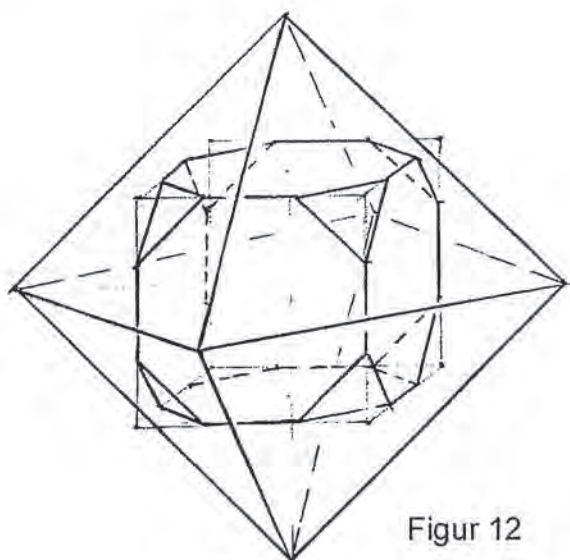
(6 vierstrahlige und 8 sechsstrahlige Ecken)

Der Oktaederstumpf entsteht aus dem Oktaeder durch Abschneiden von quadratischen Pyramiden an den 6 Ecken. Auch bei Pyramidenwürfel werden „ebenenhaft“ Pyramiden abgeschnitten. Die Ebenenhülle des Würfels wird nämlich verringert um 6 Ebenenbereiche, die jeweils begrenzt werden durch eine Oktaederecke und durch die vier Ecken der polaren Würfel Fläche (Figur 11).



Figur 11

Man erhält eine „entgegengesetzte“ Durchdringung, wenn eine Würfecke die polare Oktaederfläche durchstößt. Hierbei entstehen ebenfalls zwei halb regelmäßige Körper, wenn die halbe Würfel diagonale um den Faktor $3 : (1 + \sqrt{2}) = 1,2426\dots$ größer ist als die Entfernung Würfelmittelpunkt zu Mittelpunkt einer Oktaederfläche. Es entsteht dann der Würfelstumpf (Figur 12) – ein archimedischer Körper – und das Pyramidenoktaeder (Figur 13) – ein polar-archimedischer Körper.



Figur 12

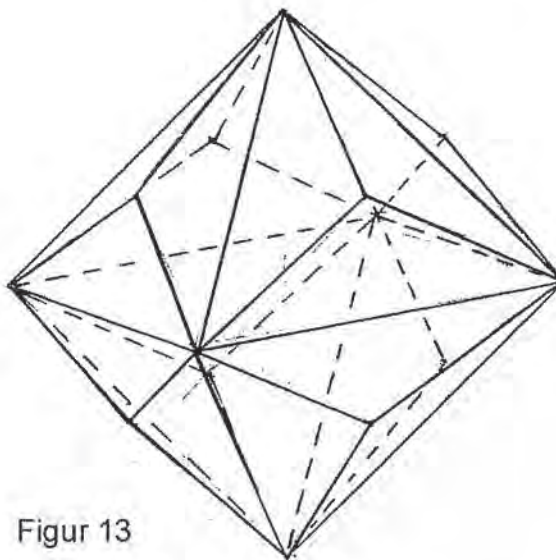
Würfelstumpf

24 Ecken

36 Kanten

14 Flächen

(6 regelmäßige Achtecke,
8 gleichseitige Dreiecke)



Figur 13

Pyramidenoktaeder

24 Flächen

36 Kanten

14 Ecken

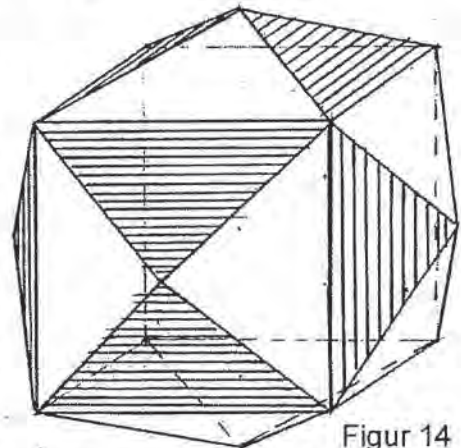
(6 achtstrahlige und
8 dreistrahlig Ecken)

Die Ecken des Würfelstumpfes sind die Schnittpunkte der Oktaederflächen mit den Würfelkanten. Die Flächen des Pyramidenoktaeders sind die Verbindungsebenen der Würfecken mit den Oktaederkanten.

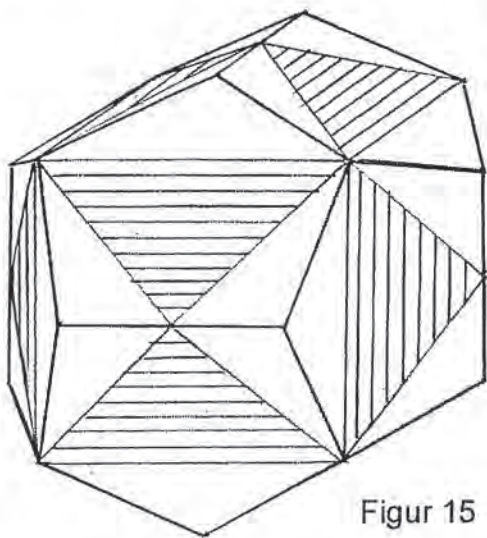
Würfel und Oktaeder sind so geschnitten, dass die Würfelflächen zu regelmäßigen Achtecken werden, bzw. dass an den Oktaederecken regelmäßige Achtfache entstehen.

Zwischen dem Würfelstumpf und dem Oktaederstumpf besteht ein interessanter Zusammenhang: Sie haben gleich viele Ecken, Kanten und Flächen. Eine oberflächliche Überlegung könnte daher zur Vermutung führen, dass der Würfelstumpf zur Würfelpyramide polar sei. Dies ist aber nicht der Fall, da der polare Körper regelmäßige Sechsecke aufweisen muss wie der Oktaederstumpf. Regelmäßige Achtecke dürfen nicht auftreten.

Der Pyramidenwürfel kann aufgefasst werden als Kern zweier sich durchdringender Dodekaeder. Nimmt man nämlich vom Pyramidenwürfel jede zweite Fläche (Figur 14) und bringt diese Flächen zum Schnitt, so entsteht ein Körper, der von zwölf symmetrischen, aber nicht gleichseitigen Fünfecken begrenzt wird (Figur 15).



Figur 14



Figur 15

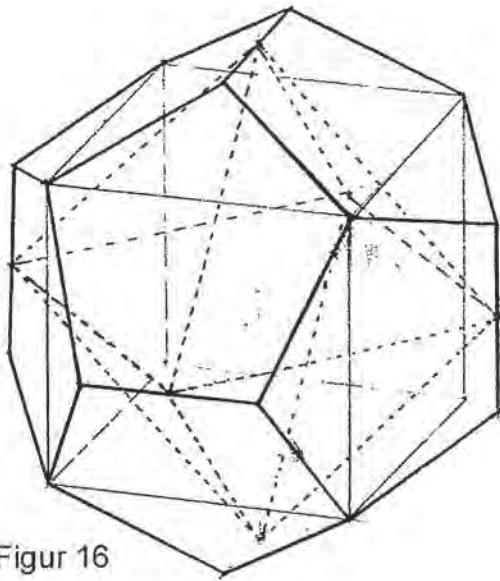
Der Pyramidenwürfel entstand aus einer Durchdringung von Würfel und Oktaeder, bei der die Oktaederachse das 1,5-fache der Würfelkante beträgt.

Wird die Oktaederachse jetzt so verlängert, dass sie das $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ -fache der Würfelkante wird

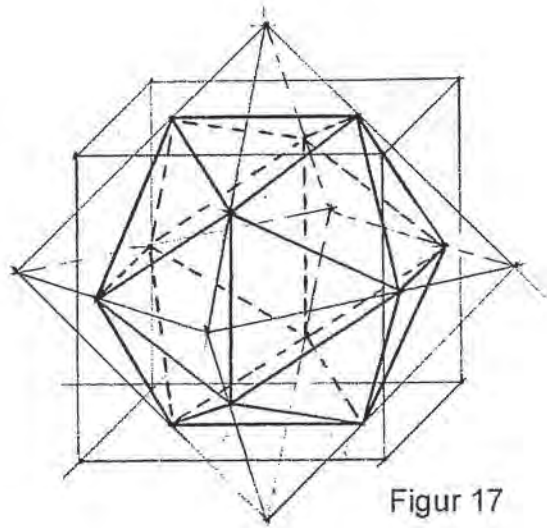
($\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1,618\dots$), so werden die Fünfecke von

Figur 15 regelmäßig, und es entsteht das Pentagondodekaeder.

Man erhält also dieses Pentagondodekaeder, indem sich Oktaeder und Würfel im Verhältnis des goldenen Schnittes durchdringen. Die Flächen des Pentagondodekaeders entstehen, wenn jede Oktaederspitze mit zwei sich gegenüberliegenden Kanten der zur Spitze polaren Würfelfläche verbunden wird (Figur 16).

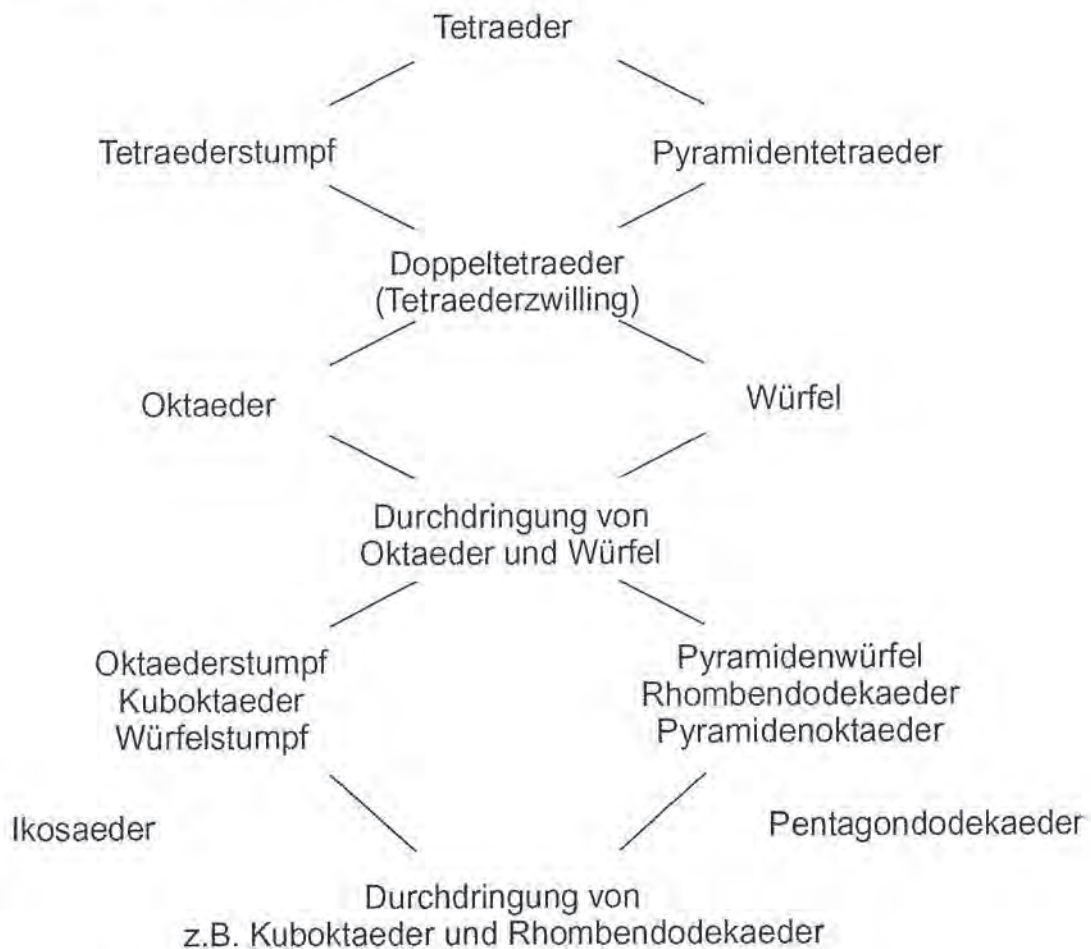


Figur 16



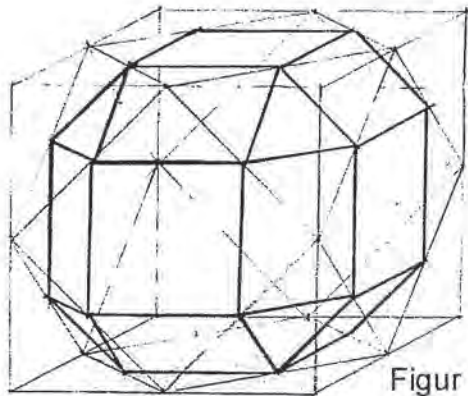
Figur 17

Der polare Prozess ist dann: die Ecken des Ikosaeders entstehen, wenn jede Würfel­fläche mit zwei sich gegenüberliegenden Kanten der zur Fläche polaren Oktaederecke geschnitten wird (Figur 17). Auch diese beiden zu einander polaren Körper entstehen gleichzeitig. Das Vorangegangene lässt sich durch folgendes Schema zusammenfassen:



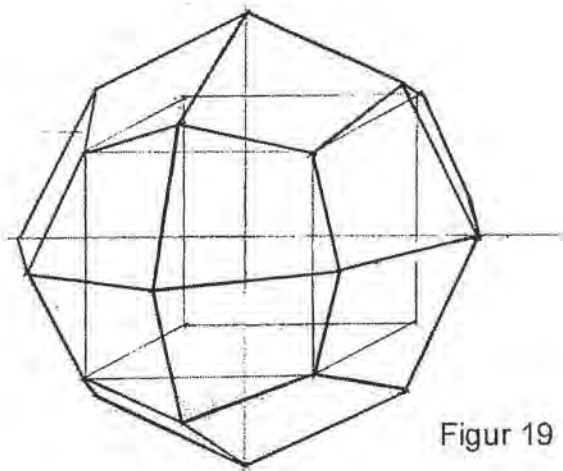
Dieses Verfahren der Erzeugung weiterer Körper durch Kern- und Hüllenbildung eines Durchdringungskörpers lässt sich fortsetzen.

Es folgen einige Beispiele, bei denen sich die durchdringenden Körper an den Kanten schneiden.



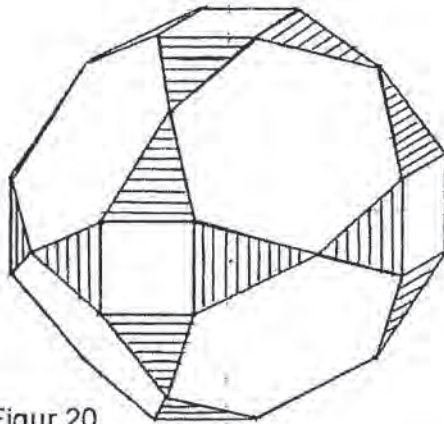
Figur 18

Figur 18 stellt den Kern dar des Durchdringungskörpers von Kuboktaeder und Rhombendodekaeder. Dieser Körper ist kein archimedischer Körper, da Rechtecke auftreten (Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}$). Dieser Körper besitzt aber noch eine Umkugel.



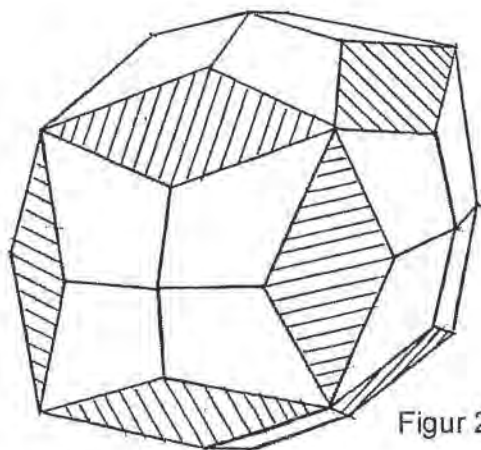
Figur 19

Figur 19 stellt den polaren Körper dar. Er ist die Hülle des Durchdringungskörpers von Kuboktaeder und Rhombendodekaeder. Er ist kein polararchimedischer Körper, hat aber eine Inkugel.



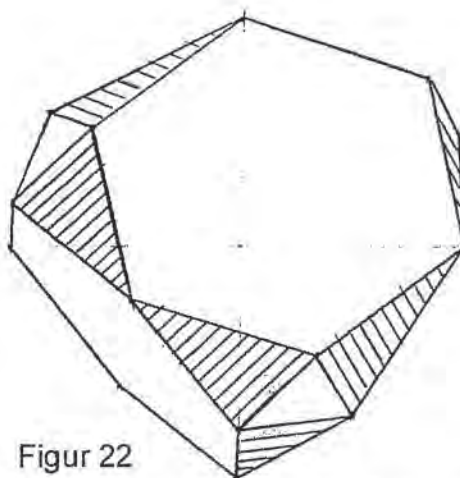
Figur 20

Figur 20 zeigt den Kern des Durchdringungskörpers von Würfelpyramide und Oktaederstumpf. Auch dieser Körper ist kein archimedischer Körper, er hat aber eine Umkugel.



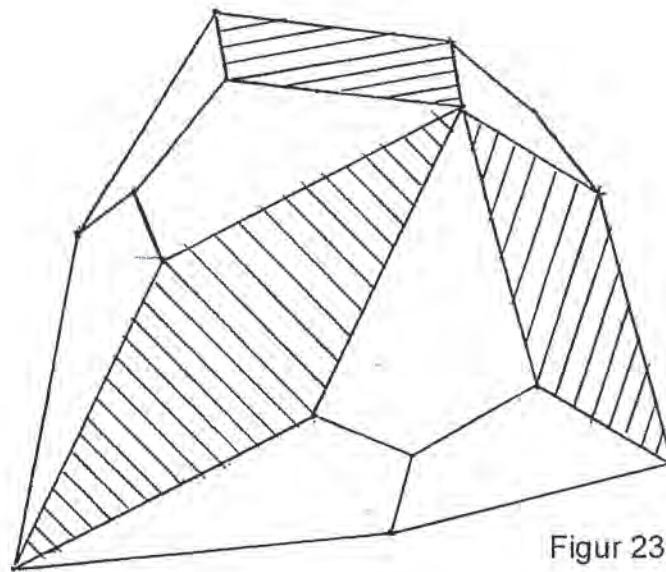
Figur 21

Figur 21 zeigt die Hülle des Durchdringungskörpers von Würfelpyramide und Oktaederstumpf. Er hat eine Inkugel, ist aber kein polararchimedischer Körper.



Figur 22

Figur 22 zeigt den Kern des Durchdringungskörpers von Tetraederstumpf und Pyramidentetraeder – ein nicht-archimedischer Körper, der eine Umkugel besitzt. Figur 23 stellt den dazu polaren Körper dar.



Figur 23

Es gibt viele Durchdringungskörper, deren Kerne und Hüllen weder Umkugeln, noch Inkugeln noch Randkugeln aufweisen, z.B. Oktaeder und Pyramidenwürfel oder Tetraeder und Pyramidentetraeder.

Eine Bemerkung zum Grenzwert

Uwe Hansen

In der 11. Klasse sind an das Denken des Schülers größere Anforderungen gestellt, da die für alles Mathematische charakteristische Durchdringung von willentlicher und vorstellender Tätigkeit nur durch besondere Aktivität aufrecht erhalten werden kann.

Der Schüler muss erleben, wie Willenstätigkeit ins Gedankliche geführt wird, zum Vorstellungsmäßigen aufgeheilt wird.

Dies ist notwendig, wenn z.B. Grenzwerte bestimmt werden oder wenn Aussagen über unendliche Mengen gemacht werden.

In dieser Entwicklungsphase des etwa Siebzehnjährigen, in der eine starke Verinnerlichung, eine Verfeinerung des Seelischen und des Gedanklichen auftritt, wird gerade durch die Behandlung von Widersprüchen und Paradoxien der Mathematik das Ich des Menschen in seiner Abgrenzung und Befreiung vom Seelischen besonders gefördert und gestärkt.

Die in der heutigen Zeit im Zusammenhang mit der Mengenlehre aufgetretenen Widersprüche sind im Ansatz bereits im griechischen Altertum aufgetreten. So versuchte der aus Elea stammende Zenon in der Mitte des 5. vorchristlichen Jahrhunderts in seinen berühmten Paradoxien zu zeigen, dass die Wahrheit nicht in der Vielheit, im Wandel der Dinge, sondern in der Einheit, im Unvergänglichen, das der Gedanke ergreift, liege: Das wahrhaft Seiende ist ein Eines. So sagt er: ein fliegender Pfeil ist in jedem Augenblick an einem bestimmten Ort, er kann sich daher nicht bewegen.

Diesen durchaus konsequenten Schluss versucht Aristoteles zu widerlegen – 6. Buch, 9. Kapitel seiner Physik – indem er sagt, dass die Zeit nicht aus unteilbaren Jetzt bestehe.

Auch bei der Grenzwertbildung – wir beschränken uns hier weitgehend auf Grenzwerte von Folgen – hat man auf der einen Seite die Vielheit der Folgenglieder und auf der anderen Seite das Gesetz – das Eine – nach dem sie bestimmt werden.

Zunächst sollen einige Beispiele betrachtet werden.

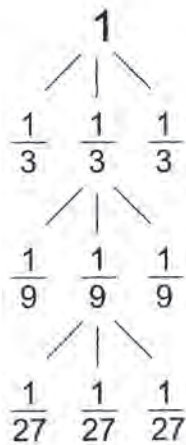
1. Beispiel

Ein Ganzes wird in drei gleiche Teile zerlegt. Das mittlere Drittel (siehe Figur 1) wird dann fortlaufend wieder in drei gleiche Teile zerlegt.

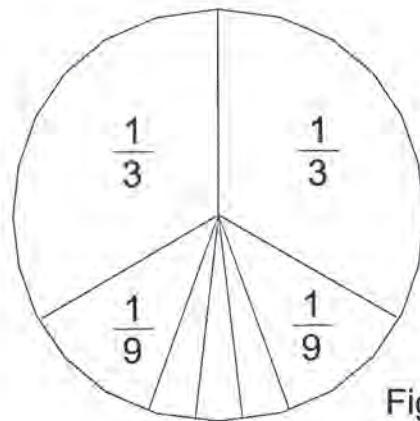
Die Folge der in der Mitte stehenden Brüche ist eine Nullfolge. Addiert man alle links bzw. alle rechts stehenden Zahlen, so nähern sich beide Summen daher dem gleichen Grenzwert

$\frac{1}{2}$; die Gesamtsumme muss nämlich 1 sein. Diese Aussage lässt sich auch durch die Figur

2 begründen ...



Figur 1



Figur 2

... oder durch die folgenden Gleichungen:

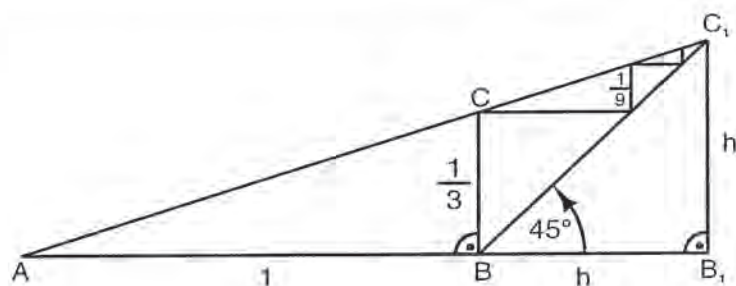
$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Aus diesen Überlegungen folgt also

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{2}$$

Wesentlich für diesen Beweis ist, dass man ein Ganzes systematisch zerlegt und dass man einen Summanden betrachtet, der zu einer Nullfolge führt.

Auch durch eine einfache geometrische Überlegung kommt man zu diesem Ergebnis (siehe Figur 3).



Figur 3

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AB₁C₁ muss 1+h das Dreifache von h sein.

Dann ist $h = \frac{1}{2}$.

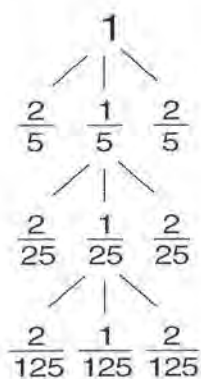
Es wird also die Höhe gesetzmäßig zerlegt:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

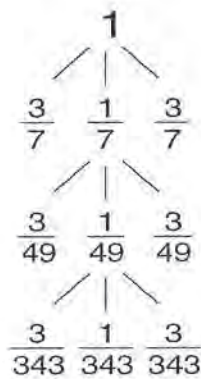
Auch hier wird ein Ganzes zerlegt, dadurch entsteht Sicherheit im Urteil über den Grenzwert.

Dies Beispiel lässt sich so verallgemeinern, dass in der Mitte eine beliebige Nullfolge x_n steht, und rechts und links die gleichen Folgen a_n stehen. Die zur Folge a_n gehörende Reihe konvergiert dann gegen $\frac{1}{2}$.

Wenn $x_n = \frac{1}{5^n}$ bzw. $x_n = \frac{1}{7^n}$ ist, so entstehen aus der Figur 1 die beiden folgenden Schemata:



Figur 4



Figur 5

Es gilt also: $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots + \frac{2}{5^n}$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$

also $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{5^n}$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$

und $\frac{3}{7} + \frac{3}{49} + \frac{3}{343} + \dots + \frac{3}{7^n}$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$

also $\frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} + \dots + \frac{1}{7^n}$ konvergiert gegen $\frac{1}{6}$

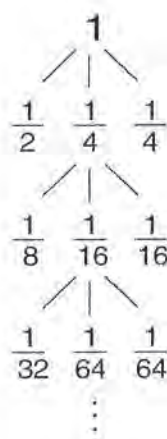
Diese Ergebnisse führen zu der Vermutung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots \quad \text{konvergiert gegen} \quad \frac{1}{k-1}.$$

Addiert man auf beiden Seiten 1 und setzt man $\frac{1}{k} = q$, so erhält man die bekannte Formel für die unendliche Reihe.

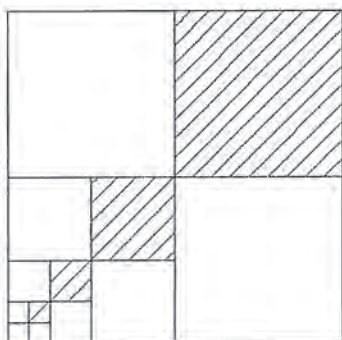
Eine weitere Verallgemeinerung besteht darin, dass z.B. die links stehenden Folgenglieder ein Vielfaches der rechts stehenden, z.B. das Doppelte, sind.

Figur 6

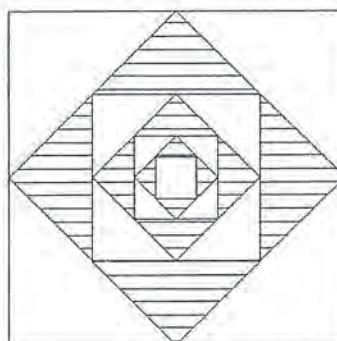


Hier wird die in der Mitte stehende Zahl stets im Verhältnis 2 : 1 : 1 geteilt. Da die mittleren Glieder wieder eine Nullfolge bilden, folgt, dass die rechts stehende Reihe gegen $\frac{1}{3}$, die links stehende Reihe gegen $\frac{2}{3}$ konvergiert; es muss nämlich die Gesamtsumme 1 im Verhältnis 1 : 2 aufgeteilt werden.

Es ist also
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}$$



Figur 7



Figur 8

Dieser gleiche Gedankengang gilt auch für die Figur 7 und 8: Zu jeder schraffierten Fläche gibt es eine doppelt so große nicht schraffierte Fläche; daher ist in beiden Quadraten ein Drittel der Quadratfläche schraffiert.

Die Figur 8 kann zu der Aussage führen: diese Quadrate ziehen sich „schließlich“ auf einen Punkt zusammen. Diese Aussage wird begründet mit dem Hinweis, dass es nicht zwei verschiedene Punkte geben kann, die in allen Quadraten liegen.

Diesem muss aber gegenübergestellt werden, dass jedes aus den Seitenmitten eines Quadrates neu gebildete Quadrat wieder ein Quadrat ist; es ist daher nicht zulässig, ein Zusammenziehen auf einen Punkt zu denken.

Es muss aber doch Folgendes betont werden: Dieser gemeinsame Punkt wird bestimmt durch den sich stets wiederholenden Konstruktionsschritt. Er wird also durch das hier vorlie-

gende Gesetz bestimmt und nicht durch die unendliche Vielheit der Quadrate. Das „Eine“ ist hier maßgebend und nicht das „Viele“.

Solche Auseinandersetzungen fordern die ganze innere Kraft des Schülers. Er muss mit seinem Ich eingreifen, um zu einem eigenen Urteil zu kommen. Dadurch befreit sich dieses Ich aus seinen seelischen Hüllen. Dies ist ein Ziel des Unterrichts in der 11. Klasse.

2. Beispiel

Wir betrachten die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

Diese Reihe bestimmt die folgenden Teilsummen

$$0; 1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{11}{16}; \dots$$

Fasst man diese Werte als Koordinaten auf, so ergibt sich das Bild von Figur 9. Die Punkte wurden abwechselnd mit A_n bzw. B_n bezeichnet.

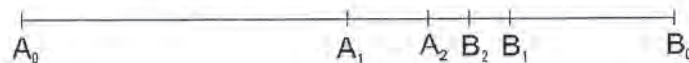


Fig. 9

Bei dieser Punktfolge $A_0B_0A_1B_1A_2B_2 \dots$ erhält man den folgenden Punkt, indem man den letzten Schritt A_nB_n oder B_nA_{n+1} halbiert und in entgegengesetzter Richtung ausführt. Das hat zur Folge, dass die Strecken A_nA_{n+1} stets doppelt so lang sind wie die Strecken B_nB_{n+1} . Daher muss der Punkt G, der die Gesamtstrecke A_0B_0 im Verhältnis 2 : 1 teilt, obere Grenze aller Punkte A und untere Grenze aller Punkte B sein; d.h.: die obere Reihe hat den Grenzwert $\frac{2}{3}$.

Diese Beweisführung, die bewusst auf algebraische Umformungen verzichtet, zeigt, dass der Grenzwert unmittelbar bestimmt wird durch das Bildungsgesetz und nicht durch eine unendliche Intervallschachtelung. Im Sinne von Zenon zeigt sich auch hier: die Realität liegt im Begriff, in der Gesetzmäßigkeit, in der Einheit und nicht in dem Vielen.

Der Gedankengang von dem 2. Beispiel lässt sich auch auf die folgende Reihe übertragen:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

In diesem Fall ist der kommende Schritt stets nur ein Drittel des vorhergehenden Schrittes in der entgegengesetzten Richtung. Daher muss der Grenzpunkt G die Gesamtstrecke A_0B_0 in

diesem Fall im Verhältnis 3 : 1 teilen, so dass der Grenzwert der oben angegebenen Reihe $\frac{3}{4}$ ist.

Verallgemeinert man auch dieses Beispiel, so kommt man zu der Vermutung

$$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} + \dots \text{ hat den Grenzwert } \frac{k}{k+1}$$

Setzt man $q = -\frac{1}{k}$, also $k = -\frac{1}{q}$, so erhält man auch hier den Grenzwert $s = \frac{1}{1-q}$.

3. Beispiel

Wir betrachten die Reihe $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$

Es sei s der Grenzwert dieser Reihe. Da jedes Folgenglied durch das selbe Gesetz aus dem vorigen Folgenglied entsteht, müssen die folgenden Verhältnisse gleich sein:

$$s : 1 = (s - 1) : \frac{2}{3}$$

Wenn man nämlich die Reihe mit $\frac{2}{3}$ beginnt, so muss sich ein um 1 verminderter Grenzwert ergeben. Da das Verhältnis bleibt und 1 durch $\frac{2}{3}$ ersetzt wird, muss auch $s - 1$ um $\frac{1}{3}$ kleiner sein als s . Es muss also 1 ein Drittel von s sein; also ist $s = 3$. Zu diesem Ergebnis kommt man natürlich auch, wenn man die betrachtete Gleichung nach s auflöst. Man versteht aber die 3 besser, wenn man auf das Auflösen verzichtet.

Die hier ausgeführten Gedanken sollen durch die folgende Betrachtung ergänzt werden. Eine Strecke der Länge 1 wird halbiert. Jede Hälfte wird dann fortlaufend wieder halbiert. Die Buchstaben L bzw. R sollen angeben, ob die linke oder rechte Streckenhälfte ausgewählt wird.

So bestimmt z.B. die Folge $LRLR\dots = \overline{LR}$, dass abwechselnd die linke und dann die rechte Hälfte betrachtet wird. Durch diese Forderung wird der Punkt mit der Koordinate $\frac{1}{3}$ bestimmt. Schreibt man nämlich $\overline{LR}$ als Dualbruch, so erhält man

$$\overline{LR} = 0,0\overline{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

Durch $\overline{RL}$ wird der Punkt mit der Koordinate $\frac{2}{3}$ bestimmt. Der Punkt mit der Koordinate $\frac{2}{5}$ hat dann die Darstellung $\overline{LRRL}$.

In jedem dieser Fälle wird ein Punkt gekennzeichnet, der in allen Strecken einer Streckenschachtelung liegt. Dieser Punkt wird durch das vorgegebene Gesetz bestimmt. Fehlt ein solches Gesetz, so ist die Intervallschachtelung nicht bestimmt. Ein Unendliches ist nur durch das „Gesetz des Gebens“ gegeben.

Daher kann auch ein Zufallsgenerator, der eine unendliche Folge von Nullen und Einsen liefert, wodurch dann eine Intervallschachtelung gegeben wäre, nicht existieren. Etwas allgemeiner ausgedrückt: Es ist nicht zulässig zu denken, dass eine Folge dadurch entsteht, dass die einzelnen Folgenglieder willkürlich gewählt werden und dass dann die Folge als Ganzes fertig vorläge.

Auch das folgende Beispiel zeigt, dass das Denken an Grenzen geführt werden kann, die beachtet werden sollten.

4. Beispiel

Aus einer unendlichen Folge von Folgen kann durch das sogenannte Diagonalverfahren von Cantor eine neue Folge bestimmt werden.

Betrachtet man z.B. die arithmetischen Folgen

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & a_n^{(1)} = n \\ 1 & \underline{3} & 5 & 7 & 9 & \dots & a_n^{(2)} = 2n - 1 \\ 1 & 4 & \underline{7} & 10 & 13 & \dots & a_n^{(3)} = 3n - 2 \end{array}$$

also allgemein $a_n^{(k)} = (n-1)k + 1$, so bilden die Glieder $a_n^{(n)} = n^2 - n + 1$ – die Diagonalfolge – eine arithmetische Folge zweiter Ordnung; es entsteht also eine neue Folge.

Die Folge der Brüche $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{5}{16} \quad \dots$

also die Brüche der Form $\frac{m}{2^n}$, in denen m eine ungerade Zahl ist und die kleiner als 1, sind lassen sich im Dreiersystem als unendliche periodische „Triel-Brüche“ schreiben.

z.B. ist $\frac{3}{4} = 0,\overline{20} \quad \frac{5}{8} = 0,\overline{12} \quad \frac{7}{12} = 0,\overline{1022}$

Nimmt man vom ersten Bruch die erste Stelle nach dem Komma, vom zweiten Bruch die zweite Stelle nach dem Komma usw., so erhält man den nicht periodischen Bruch

0,122112220220211...

Dies gilt auch, wenn man zur Antidiagonalfolge übergeht, indem man z.B. die drei Ziffern 0, 1, 2 zyklisch vertauscht. Auch hier erhält man durch die Diagonalfolge eine Zahl, die nicht in der Folge vorkam.

Mit Hilfe einer solchen Antidiagonalfolge hat Cantor 1874 versucht, die Überabzählbarkeit der Dezimalbrüche, die zwischen 0 und 1 liegen, zu beweisen.

Es entsteht allerdings die Frage, ob man die Grenze des Denkbaren überschreitet, wenn man die Gesamtheit dieser Dezimalbrüche als ein gegebenes Ganzes betrachtet.

5. Beispiel

Eine beliebige Strecke wird in drei gleiche Teile geteilt. Das mittlere Drittel wird entfernt, und die anderen beiden Drittel werden ebenfalls in drei gleiche Teile geteilt und das mittlere Drittel – also ein Neuntel der ursprünglichen Strecke – wieder entfernt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt.



Figur 10

Zeichnet man diese „gelöchernte“ Strecke in dreifacher Verkleinerung, so passt sie – wenn man sich den Teilungsprozess ins Unbegrenzte fortgesetzt denkt – genau zweimal in sich selbst hinein – sie ist also selbstähnlich.

Daher gibt man diesem „Grenzgebilde“ eine Dimension D , für die gilt

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^D = 1 \quad \text{oder} \quad D = \log_3 2$$

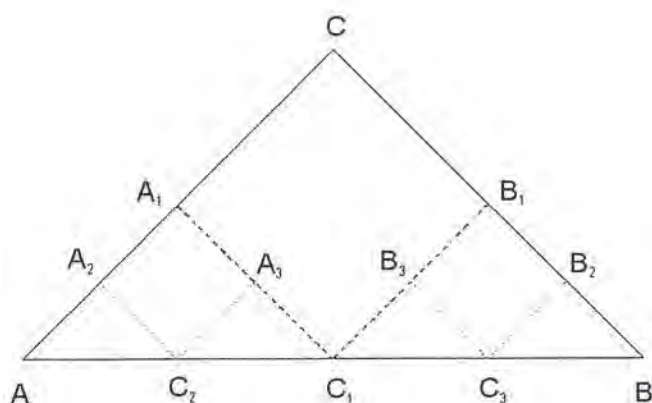
Durch diese Kennzeichnung, d.h. durch die Eigenschaft, eine Dimension zu haben, erweckt man den Anschein, dass ein solches „Grenzgebilde“ existiert. Es handelt sich aber bei der Größe D nur um eine Charakterisierung des Vorgangs: Mache aus 3 Teilen 2 Teile – das mittlere Drittel wird je entfernt. Dieser Vorgang ist das einzig Reale. D als Eigenschaft eines Grenzgebildes anzusehen ist unzulässig, da dieses Grenzgebilde eine reine Fiktion ist.

In diesem Zusammenhang ist die Charakterisierung des Mathematischen, die R. Steiner gegeben hat, von besonderer Wichtigkeit. In dem Vortrag vom 18.03.1921 (GA 324, Mathematik, wissenschaftliches Experiment) wird betont, dass das Mathematische lebt im „seelischen Konstruieren, was also erfahren wird im fortwährenden Tätigsein und im Anschauen der eigenen Tätigkeit.“ Das Aufhellen, das Zum-Bild-Werden-Lassen der eigenen Tätigkeit kann also gleichsam als Urgeste des Mathematischen angesehen werden. Die beiden polaren Seelentätigkeiten des Menschen – das Wollen und das Vorstellen – sind also in der mathematischen Tätigkeit ganz eng miteinander verbunden.

In dem letztgenannten Beispiel 4 – das betrachtete Grenzgebilde trägt die Bezeichnung „Cantor-Staub“ – verlässt man den Bereich, wo man seine eigene Tätigkeit anschaut; man denkt sich nämlich die unendlich vielen Konstruktionsschritte, die der Möglichkeit nach vorhanden sind, als fertig ausgeführt. Man kann sich nicht aufschwingen zu der Einsicht, dass man hier im Prozessmäßigen bleiben muss.

6. Beispiel

ABC sei ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit $AC = CB = 1$ und $AB = \sqrt{2}$ (Figur 11). A_1, B_1 seien die Mittelpunkte der Strecken AC bzw. BC; C_1 der Mittelpunkt von AB. Der Streckenzug $AA_1C_1B_1B$ hat dann dieselbe Länge wie der Streckenzug ACB, nämlich 2. Die Punkte $A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ sind wieder Mittelpunkte entsprechender Strecken. Auch der Streckenzug $AA_2C_2A_3C_3B_3B$ hat wieder die Länge 2. Dieses Verfahren kann beliebig weit fortgesetzt werden; die entstehenden Streckenzüge haben stets die Länge 2.



Figur 11

Gibt es einen „Grenz-Streckenzug“? Da die Entfernung aller Streckenpunkte von der Strecke AB nach dem n -ten Schritt höchstens $\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ beträgt, ist es naheliegend, diese Strecke AB als Grenzlinie zu betrachten. Dies kann aber nicht sein, da die Strecke AB nur die Länge $\sqrt{2}$ hat.

Fasst man die Streckenzüge als Graphen von Funktionen f_n auf und betrachtet die Folge der Funktionswerte $f_n(x)$, wobei x die Abszisse eines Punktes der Strecke AB ist, so hat man stets $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Was also für jede einzelne Stelle x gilt, gilt nicht für den gesamten Streckenzug. D.h.: man kann nicht das Ganze durch Eigenschaften der Teile kennzeichnen.

Es ist sicher wünschenswert, den heranwachsenden Schüler bekannt zu machen mit den Ideen der Mengenlehre Georg Cantors (1845–1918). In diesem Zusammenhang kann man auch auf die Widersprüche hinweisen, die sich aus der Definition einer Menge durch Cantor ergeben:

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen“.

(Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1895 – die Zitate sind dem Werk „G. Cantor, Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts“, herausgegeben von E. Zermelo 1932, entnommen.)

In dieser Definition wird auf der einen Seite verlangt, dass jede beliebige Zusammenfassung von Elementen eine Menge bilden – die Teile bestimmen also das Ganze –, auf der anderen Seite wird gefordert, dass diese Vielheit ein Ganzes, ein Fixiertes, eine Konstante wie Cantor sagt, ist.

Cantor selbst hat gesehen, dass seine Mengendefinition widerspruchsvoll ist. Es widersprechen sich die große Beliebigkeit bei der Auswahl der Elemente, und die Geschlossenheit des Ganzen. In einem Brief an R. Dedekind vom 28.07.1899 schreibt er:

„Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, dass die Annahme eines „Zusammenseins“ aller ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so dass es unmöglich ist, die Vielheit als eine Einheit, als „ein fertiges Ding“ aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich absolut unendliche oder inkonsistente Vielheiten. Wie man sich leicht überzeugt, ist z.B. der „Inbegriff alles Denkbaren eine solche Vielheit.“ (S. 443 des genannten Werkes)

Der Gedanke „Inbegriff alles Denkbaren“ zeigt, dass Cantor sich das noch nicht Gedachte als bereits gedacht denkt. Dieses geringe Unterscheidungsvermögen hat oft zu den sogenannten Paradoxien der Mengenlehre geführt.

Diese Briefstelle zeigt auch, wie ein scheinbar begriffliches Denken zu sich selbst widersprechenden, inhaltlosen Gedankenkonstruktionen führt. Dadurch, dass Cantor diesen inkonsistenten Vielheiten Eigenschaften zuspricht, betrachtet er sie doch als ein „Etwas“. Dieser Begriff erinnert an den Begriff „der Kreis mit den drei Ecken“.

Cantor denkt sich diese absolut unendlichen Vielheiten nur „in Deo“ realisiert; er grenzt sie ab gegen das abstrakte Aktual-Unendliche (S. 372, S.378 des oben genannten Werkes).

In einem Brief vom 28.08.1899 stellt Cantor sich sogar selbst die Frage, ob Mengen wie z.B. die Menge der reellen Zahlen („Aleph 1“) nicht vielleicht auch inkonsistent sind. Er fordert dann die Konsistenz dieser Vielheiten als Axiom der erweiterten transfiniten Arithmetik (wodurch die Probleme auch nicht gelöst sind).

Für Cantor existiert mit jeder unendlichen Menge M auch die Menge M_1 aller Teilmengen von M – die sogenannte Potenzmenge von M , die stets eine größere Mächtigkeit als M besitzt. Hiervon ausgehend kann man durch fortgesetzte Potenzmengenbildung eine abzählbar unendliche Folge von Mengen konstruieren von immer größer werdenden Mächtigkeiten. Cantor war überzeugt, dass durch diesen lückenlosen Aufstieg von Mächtigkeiten, die er Aleph 0, Aleph 1, Aleph 2, ... nannte, alle denkbaren Mächtigkeiten erschöpft sind.

In einem Brief vom 31. August 1899 an Dedekind betrachtet Cantor nun das System aller Mengen. Er nimmt dann zu jeder Mächtigkeit a eine Menge M_a dieser Mächtigkeit und vereinigt diese Mengen zu einer Gesamtmenge T . Auch T besitzt eine bestimmte Mächtigkeit a_0 . Die Potenzmenge von T hat dann eine höhere Mächtigkeit a_0' . Da aber alle Mächtigkeiten in den Mengen, die zu T vereinigt sind, vorkommen, muss die Mächtigkeit a_0 von T mindestens a_0' sein. Es gilt also $a_0 < a_0'$ und $a_0' \leq a_0$.

Dieser skizzierte Gedankengang von Cantor lässt sich kurz zusammenfassen:

Die Menge aller Mengen ist ein sinnloser Begriff, da die Mächtigkeit ihrer Potenzmenge größer als ihre Mächtigkeit ist, obwohl sie als Menge aller Mengen auch ihre eigene Potenzmenge enthalten müsste.

Hier zeigt sich auf höherer Stufe die Problematik, unendliche Mengen als gegebene Ganzheiten zu betrachten, wie dies von Cantor gefordert wurde.

Zu fordern, dass die Menge aller Mengen existiert, entspricht der Forderung nach der größten ganzen Zahl, wobei die Bildung der Potenzmenge dem Übergang von n zu $n + 1$ entspricht.

Heute versucht man, diese Widersprüche durch einen axiomatischen Aufbau zu vermeiden. Ob solche Widersprüche trotzdem einmal auftreten, bleibt abzuwarten.

Diese letzte Betrachtung weist darauf hin, dass Grenzbetrachtungen innerhalb der Mengenlehre eine besondere Aufmerksamkeit erfordern. Außerdem sollte gezeigt werden, dass die von Zenon dargestellten Gedanken zum Verhältnis des Einen zu dem Vielen auch heute noch ihre Berechtigung haben.

Eine Verallgemeinerung der Folge von Fibonacci

Uwe Hansen

Durch die Bedingung

$$(1) \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

wird bei Vorgabe zweier beliebiger Zahlen a_0 und a_1 eine unendliche Folge von Zahlen bestimmt. Für $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ erhält man die Folge von Fibonacci:

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \quad \dots$$

Für diese Folge ist charakteristisch, dass das Verhältnis $a_{n+1} : a_n$ gegen den Wert

$$G = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1,6180\dots$$

konvergiert, wenn n gegen Unendlich geht. Dieser Grenzwert G ist unabhängig von den beiden gewählten Anfangsgliedern. Er ist durch die Rekursionsformel (1) bestimmt.

Die Gleichung (1) korrespondiert mit der quadratischen Gleichung

$$(2) \quad x^2 = x + 1$$

die die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ hat. Die Lösung x_1 ist gleich G ; die Lösung

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = -0,6180\dots \text{ ist der Grenzwert von } a_{n+1} : a_n \text{ für } n \rightarrow -\infty.$$

Diese Grenzwerte, also die Lösungen von (2) bestimmen auch die Folgenglieder. Es gilt nämlich

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} = (x_1^n - x_2^n) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Dieses Beispiel lässt sich in der folgenden Weise verallgemeinern:

Die Rekursionsformel

$$(3) \quad a_{n+2} = k_1 \cdot a_{n+1} + k_0 \cdot a_n, \quad k_1, k_0 \in \mathbb{R}$$

korrespondiert mit der quadratischen Gleichung

$$(4) \quad x^2 = k_1 x + k_0$$

Wenn $k_1^2 + 4k_0 \neq 0$ ist, sind die beiden Lösungen A und B dieser Gleichung verschieden.

Dann gilt

$$(5) \quad a_n = \frac{a_1 - a_0 B}{A - B} \cdot A^n + \frac{a_1 - a_0 A}{B - A} \cdot B^n$$

Diese Gleichung lässt sich durch vollständige Induktion beweisen; dazu benötigt man $k_1 = A + B$ und $k_0 = -AB$.

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = A - B$ ist, so gilt

$$a_n = A^n - B^n$$

Außerdem gilt: Wenn $|A| > |B|$, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = B$$

Es folgen einige Beispiele:

1. Beispiel

Die Bedingung $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ führt zu der quadratischen Gleichung

$x^2 - 5x + 6 = 0$, die die Lösungen $A = 3$, $B = 2$ hat.

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ ist, so ist $a_n = 3^n - 2^n$.

Man erhält die Folge 0, 1, 5, 19, 65, 211, ...

2. Beispiel

Es sei $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Dann ist $A = 2$, $B = 1$.

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ ist, so ist $a_n = 2^n - 1$.

Wenn $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$, so ist $a_n = 2^n$.

3. Beispiel

Aus $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ folgt $A = 3$, $B = 1$.

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, gilt $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

Wenn $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$, so ist $a_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$

4. Beispiel

Aus $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ folgt $A = 3$, $B = -2$

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, erhält man $a_n = \frac{1}{5}(3^n - (-2)^n)$

5. Beispiel

Wenn $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ist, so ist $A = 1 + \sqrt{2}$, $B = 1 - \sqrt{2}$

Gilt $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ so ist $a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n)$

Es ist $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 12$, $a_5 = 29$, $a_6 = 70$, ...

6. Beispiel

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n).$$

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, so folgt $a_n = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{(-2)^n})$

Bei diesen Beispielen war der Radikand $k_1^2 + 4k_0$ der quadratischen Gleichung (4) positiv. Es soll jetzt der Fall $k_1^2 + 4k_0 < 0$ untersucht werden. Die beiden Lösungen A und B sind dann konjugiert komplexe Zahlen.

Komplexe Zahlen werden im Allgemeinen wenig im Unterricht behandelt. Es hat sich aber in den vergangenen Jahrzehnten gezeigt, dass ein Denken in zyklischen Zusammenhängen immer notwendiger wird, dass das lineare Denken für viele Probleme der heutigen Zeit nicht mehr ausreicht. Daher scheint mir eine Beschäftigung mit komplexen Zahlen, die naturgemäß zyklische Vorgänge einfach beschreiben, durchaus wünschenswert zu sein.

Wir setzen jetzt $A = a + bi$, $B = a - bi$. Dann ist

$$A + B = 2a, \quad A - B = 2bi, \quad AB = a^2 + b^2 = |A|^2$$

Wenn z eine komplexe Zahl ist, so wird mit $\bar{z}$ die konjugiert komplexe Zahl bezeichnet. Für konjugiert komplexe Zahlen gilt

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{also} \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Wenn $z = |z| \cdot (\cos \gamma + i \cdot \sin \gamma)$, so ist

$$(6) \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = |z| \cdot \sin \gamma$$

Dies folgt unmittelbar aus $\bar{z} = |z| \cdot (\cos \gamma - i \cdot \sin \gamma)$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir Gleichung (5) umformen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_1 - a_0 B}{A - B} \cdot A^n - \frac{a_1 - a_0 A}{A - B} \cdot B^n \\ &= \frac{1}{b} \left[\frac{(a_1 - a_0 \bar{A}) \cdot A^n - (a_1 - a_0 A) \cdot \bar{A}^n}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{b} \cdot \frac{w \cdot A^n - \bar{w} \cdot \bar{A}^n}{2i} \end{aligned}$$

mit $w = a_1 - a_0 \bar{A}$

$$(7) \quad a_n = \frac{1}{b} \cdot |w| \cdot |A|^n \cdot \sin(n\alpha + \gamma) \quad \text{wenn } w = |w| \cdot (\cos \gamma + i \cdot \sin \gamma)$$

Bei der letzten Umformung wurde die Gleichung (6) benutzt.

Diese Gleichung (7) soll an einigen Beispielen erläutert werden:

7. Beispiel

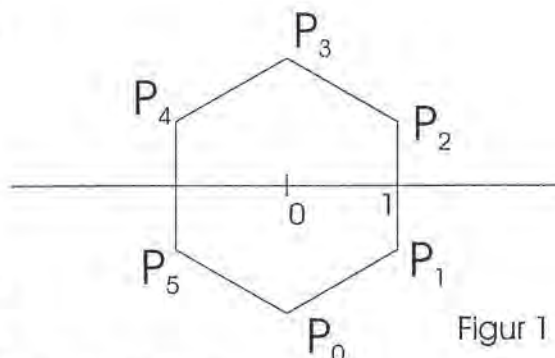
Aus $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ folgt $A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Es ist $|A| = 1$ und $\arg A = 60^\circ$.

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, ist $|w| = a_1$, $\gamma = 0$;

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Also gilt } a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin(n \cdot 60^\circ).$$

Diese Folgenglieder lassen sich als Projektion auf die reelle Achse eines regelmäßigen Sechsecks erzeugen denken. Es ist $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1$, $a_5 = -1$, $a_{n+6} = a_n$.



Figur 1

8. Beispiel

Wählt man in Beispiel 7 die Anfangsglieder $a_0 = 1$ und $a_1 = 2$, so erhält man $w = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Dann ist $|w| = \sqrt{3}$ und $\gamma = 30^\circ$.

Dann ist $a_n = 2 \cdot \sin(n \cdot 60^\circ + 30^\circ)$

Es ist jetzt $a_0 = 1$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 1$$

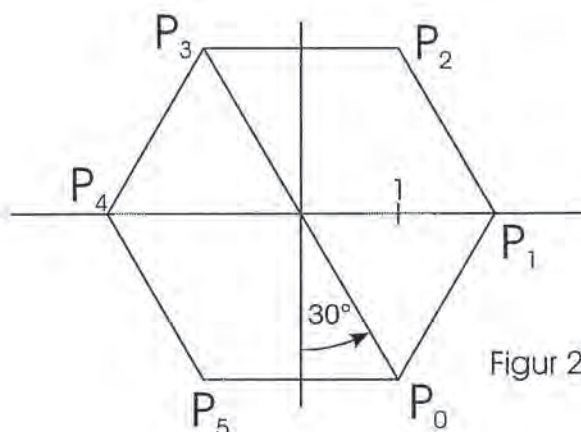
$$a_3 = -1$$

$$a_{n+6} = a_n$$

$$a_4 = -2$$

$$a_5 = -1$$

$$a_6 = 1$$



Figur 2

9. Beispiel

Wählt man in Beispiel 7 $a_0 = 3$; $a_1 = 1$, dann ist

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot i \text{ und damit } |w| = \sqrt{7} \quad \tan \gamma = -3\sqrt{3}$$

γ ist größer als 90° : $\gamma = 100,893\dots^\circ$

Man erhält

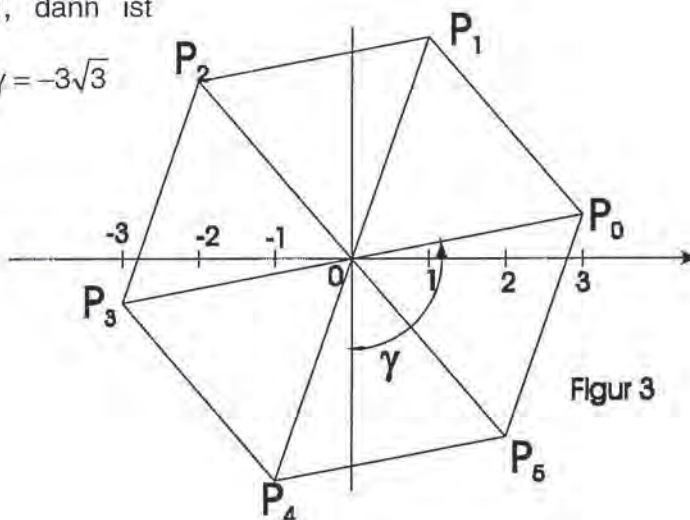
$$a_n = \sqrt{\frac{28}{3}} \cdot \sin(n \cdot 60^\circ + \gamma)$$

$$a_0 = 3$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -2$$

$$a_3 = -3$$



Figur 3

$$a_4 = -1 \quad a_{n+6} = a_n$$

$$a_5 = 2$$

$$a_6 = 3$$

10. Beispiel

Es soll gelten $a_{n+2} = -a_n$. Dann ist $A = i$, also $b = 1$; $|A| = 1$. Der Winkel α von A ist 90° .

Wenn $a_0 = 1$ und $a_1 = 3$ ist, so ist

$w = 3 + i$; $|w| = \sqrt{10}$. γ ist bestimmt durch

$\tan \gamma = \frac{1}{3}$. Wir erhalten dann

$$a_n = \sqrt{10} \cdot \sin(n \cdot 90^\circ + \gamma)$$

$$\gamma = 18,43\dots^\circ$$

$$a_0 = 1$$

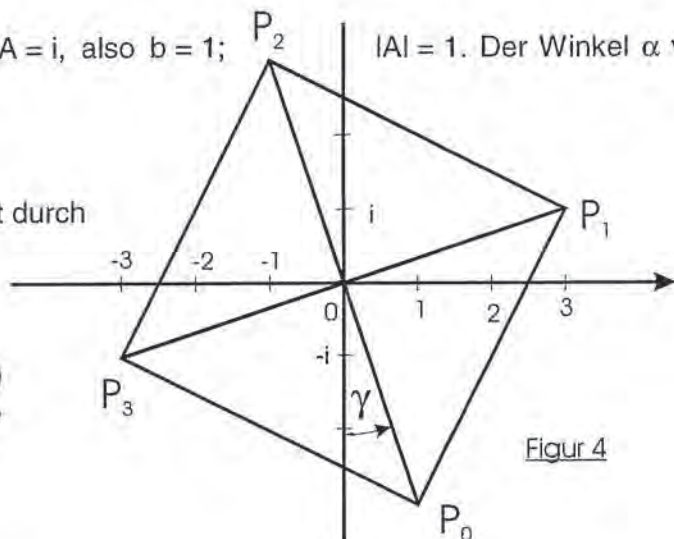
$$a_1 = 3$$

$$a_2 = -1$$

$$a_{n+4} = a_n$$

$$a_3 = -3$$

$$a_4 = 1$$



11. Beispiel

Gegeben sei die Folge (a_n) mit dem Rekursionsgesetz $a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n$. Dann ist

$A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ und $|A| = 1$. Der Winkel α

von A ist 120° .

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, ist $w = 1$ und

$\gamma = 0$. Wir erhalten

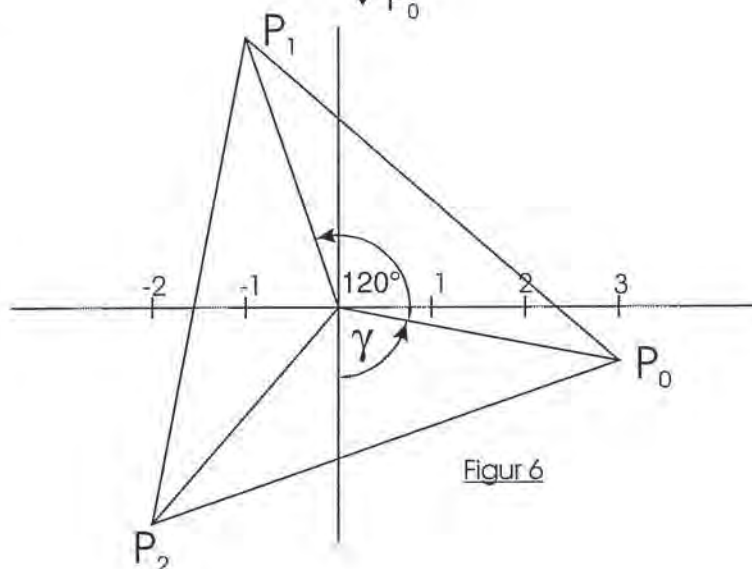
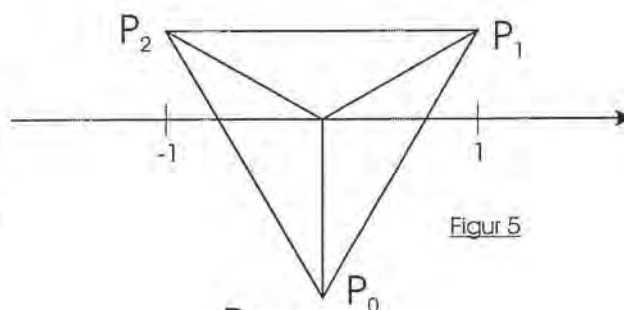
$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(n \cdot 120^\circ)$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -1 \quad a_{n+3} = a_n$$

$$a_3 = 0$$



12. Beispiel

Wählt man in Beispiel 11 für $a_0 = 3$ und $a_1 = -1$, so ist $w = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot i$. Dann ist $|w| = \sqrt{7}$

und für γ gilt

$$\tan \gamma = 3\sqrt{3}; \quad \gamma = 79,1066 \dots^\circ$$

Wir erhalten

$$a_n = \sqrt{\frac{28}{3}} \cdot \sin(n \cdot 120^\circ + \gamma)$$

$$a_0 = 3$$

$$a_2 = -2$$

$$a_1 = -1$$

$$a_3 = 3$$

$$a_{n+3} = a_n$$

13. Beispiel

$$a_{n+2} = g \cdot a_{n+1} - a_n, \text{ mit } g = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0,6180 \dots$$

(Zahl des goldenen Schnittes)

Es sei $a_0 = 0, a_1 = 1$, dann ist

$$a_2 = g$$

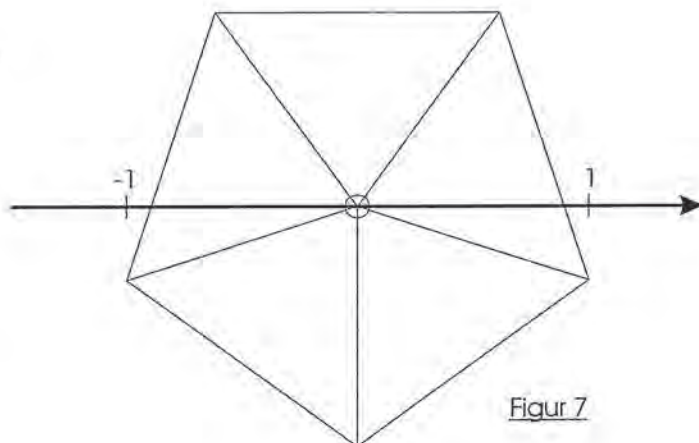
$$a_3 = -g$$

$$a_4 = -1$$

$$a_{n+5} = a_n$$

$$a_5 = 0$$

Allgemein
$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3+g}} \cdot \sin(n \cdot 72^\circ)$$



Figur 7

14. Beispiel

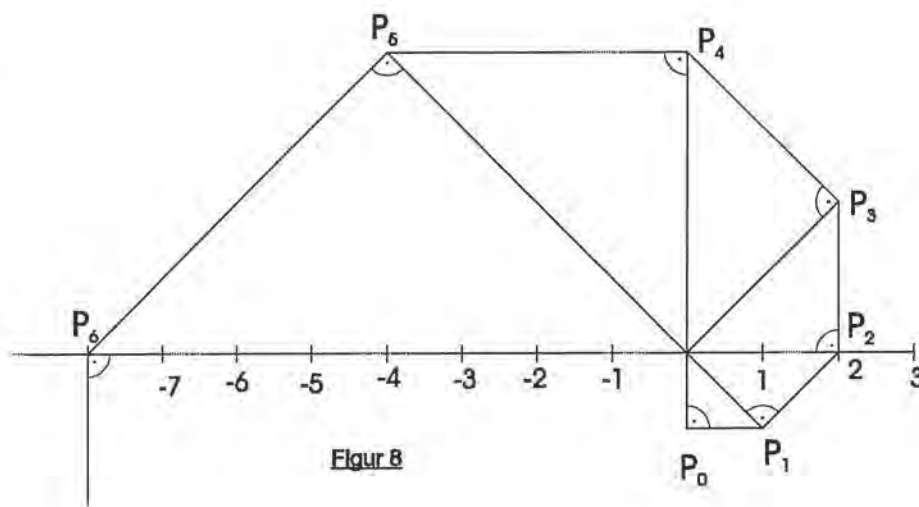
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n. \text{ Es ist}$$

$$A = 1 + i; \quad |A| = \sqrt{2} \text{ und}$$

$$\arg A = 45^\circ.$$

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$,

$$\text{so ist } a_n = \sqrt{2}^n \cdot \sin(n \cdot 45^\circ).$$



Figur 8

Es ist

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 2 \\
 a_3 &= 2 \\
 a_4 &= 0 \\
 a_5 &= -4 \\
 a_6 &= -8 \\
 a_7 &= -8 \\
 a_{n+8} &= 16 \cdot a_n
 \end{aligned}$$

Die Folge a_n erscheint hier als Projektion einer logarithmischen Spirale mit dem Faktor $q = \sqrt{2}$ bei einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$.

Da $A = 1 + i$ und $B = 1 - i$ folgt wegen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ aus Gleichung (5) auch

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{(1+i)^n}{2i} - \frac{(1-i)^n}{2i} \\
 &= \frac{1}{2} [-i(1+i)^n + i(1-i)^n] \quad \text{denn } \frac{1}{i} = -i \\
 &= \operatorname{Re} [-i(1+i)^n]
 \end{aligned}$$

In der komplexen Zahlenebene kann diese logarithmische Spirale auch beschrieben werden durch

$$z_n = -i(1+i)^n$$

Allgemein gilt $a_n = \operatorname{Im}(\frac{1}{b} w \cdot A^n)$ wie die Herleitung von Gleichung (7) zeigt. Dies ist äquivalent zu

$$(7) \quad a_n = \operatorname{Re} z_n, \text{ wobei } z_n = -i \frac{1}{b} w A^n \text{ ist.}$$

Alle diese Folgen können also als Projektionen von logarithmischen Spiralen angesehen werden.

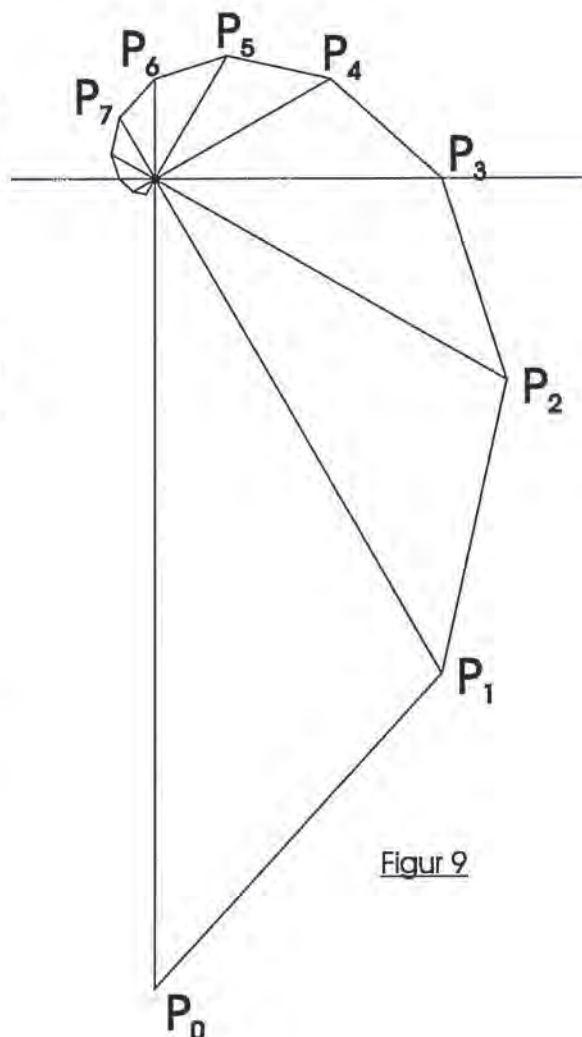
15. Beispiel

$$a_{n+2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n. \text{ Es ist } A = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + i)$$

und $|A| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Der Winkel α von A beträgt

$$\alpha = 30^\circ.$$

Wenn $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, so ist



Figur 9

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sqrt{8} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \sin(n \cdot 30^\circ) \\
 &= \sqrt{2}^{3-n} \cdot \sin(n \cdot 30^\circ)
 \end{aligned}$$

Es ist

$$a_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$a_3 = 1$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$a_5 = \frac{1}{4}$$

$$a_6 = 0$$

$$a_7 = -\frac{1}{8}$$

$$a_8 = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$a_9 = -\frac{1}{8}$$

$$a_{10} = -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$a_{11} = -\frac{1}{32}$$

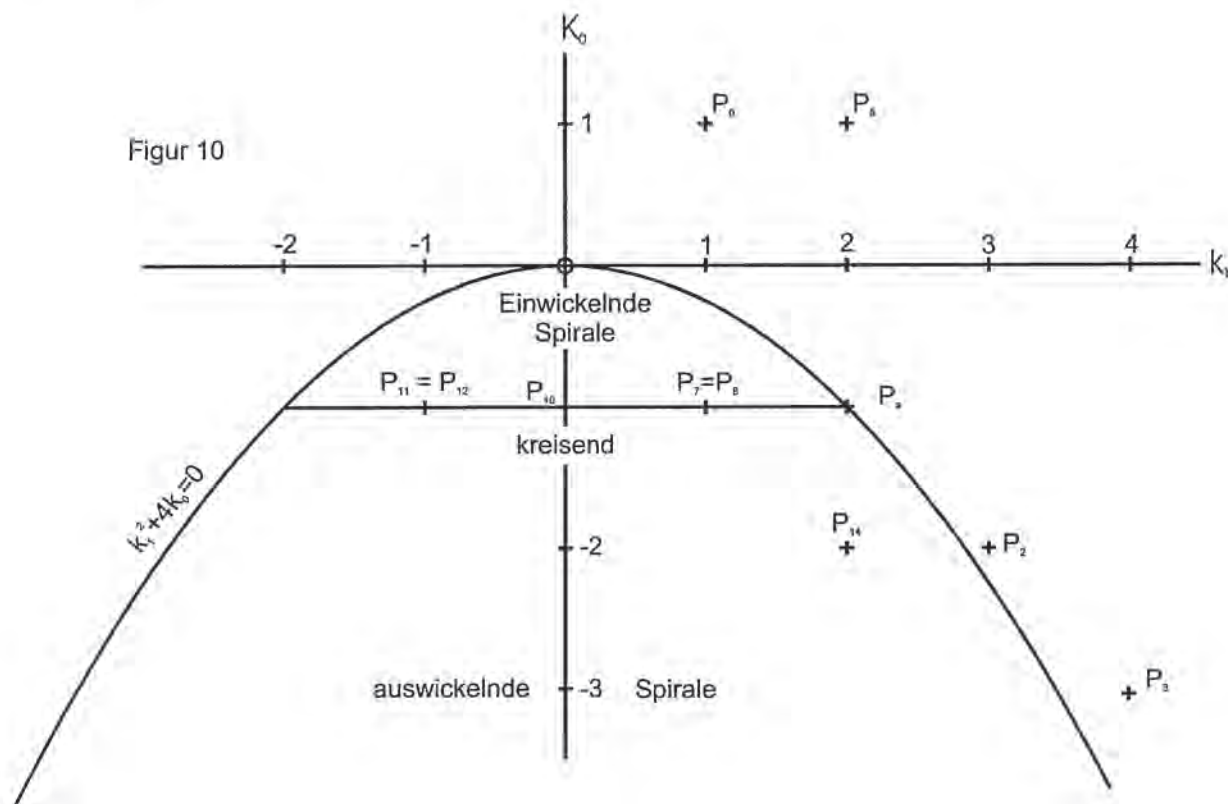
$$a_{12} = 0$$

Die in Figur 9 dargestellte Punktfolge (P_n) auf der logarithmischen Spirale hat in komplexen Koordinaten das Bildungsgesetz

$$z_n = 2\sqrt{2} \cdot (-i) \cdot A^n$$

Diese Beispiele zeigen, dass die Zahlen z_n auf einem Kreis liegen, wenn $k_0 = -1$ ist. Dass dies im Falle $k_1^2 + 4k_0 < 0$ allgemein gilt, folgt daraus, dass $k_0 = -AB = -|A|^2$ ist. Aus $k_0 = -1$ folgt also $|A| = 1$.

Aus der Beziehung $|A| = \sqrt{-k_0}$ folgt auch: Wenn $-1 < k_0 < 0$, so liegen die z_n auf einer einwickelnden Spirale; wenn $k_0 < -1$, so liegen sie auf einer auswickelnden Spirale. Diese Zusammenhänge sind in der folgenden Darstellung wiedergegeben.



In Figur 10 geben die Koordinaten $P_m (k_1 | k_0)$ des Punktes P_m die jeweilige Wahl von k_1 und k_0 in Beispiel m an. $P_0 (1 | 1)$ repräsentiert die Folge von Fibonacci, $P_a (2 | -1)$ alle arithmetischen Folgen.

Wenn $D = k_1^2 + 4k_0$ positiv ist, werden die Folgen durch Punkte gekennzeichnet, die über der Parabel liegen; wenn $D < 0$ ist, so liegen die entsprechenden Punkte unterhalb der Parabel. Punkte, die auf der Parabel liegen, repräsentieren Folgen mit $D = 0$; für diese Folgen fallen A und B zusammen.

Wenn z.B. $A = B = 1$, so ist $k_1 = 2$, $k_0 = -1$, also ist

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$$

D.h.: man erhält die arithmetischen Folgen.

Wenn $A = B = -1$, so ist $k_1 = -2$, $k_0 = -1$. Man erhält alternierende arithmetische Folgen, z.B. $1; -2; 3; -4; 5; \dots$

Allgemein gilt: Aus $D = 0$ folgt $a_n = A^n \cdot b_n$, wobei b_n Glied einer arithmetischen Folge ist.

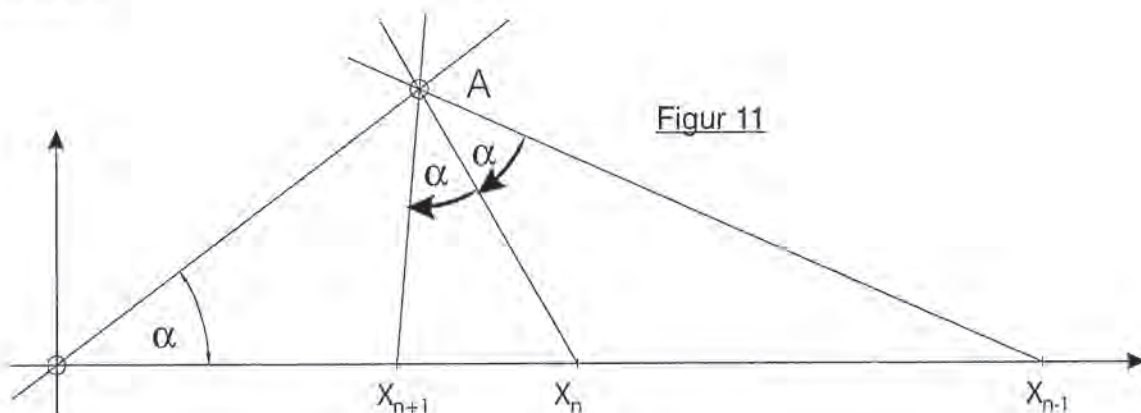
Die Gleichung (3) führt zu der Frage: Welchen Grenzwert hat die Folge

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass dieser Grenzwert gleich A oder B ist, wenn A und B reell sind und $A \neq -B$ ist. Wenn $A = -B$ ist, so pendelt a_n zwischen Werten $\frac{a_1}{a_0}$ und $\frac{a_0}{a_1} A^2$, so dass in diesem Fall kein Grenzwert existiert.

Wenn A und B konjugiert komplexe Zahlen sind, gibt es ebenfalls keinen Grenzwert; die Glieder x_n bilden dann eine zyklische Folge, die sich schließt, wenn das Argument von A in einem rationalen Verhältnis zu 360° steht. Die Grenzwerte, die im reellen Fall i.A. auftreten, lösen sich also im komplexen Fall in einen Zyklus auf.

Wird A in der komplexen Zahlenebene dargestellt und mit den reellen Zahlen x_n durch Geraden verbunden, so ist der Winkel $x_n A x_{n+1}$ eine Konstante. Dieser Winkel ist gleich dem Argument von A.



Ergänzung

Es gibt viele Möglichkeiten, die vorangegangenen Betrachtungen zu verallgemeinern. Es sei ein Beispiel angeführt.

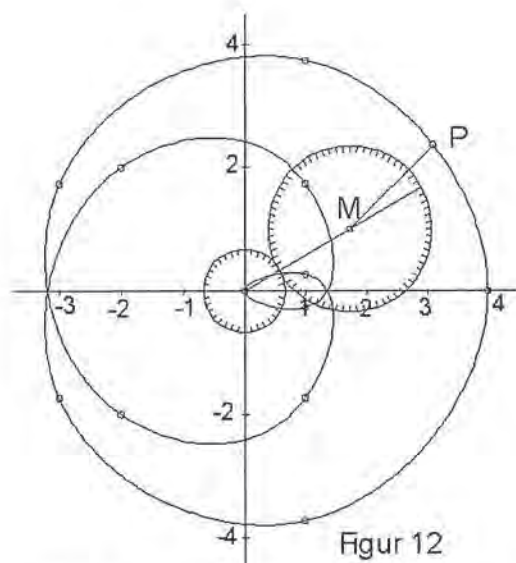
Die Bedingung $a_{n+4} = a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$

führt zu $a_n = 2 \cdot \cos(n \cdot 90^\circ) + 2 \cdot \cos(n \cdot 60^\circ)$

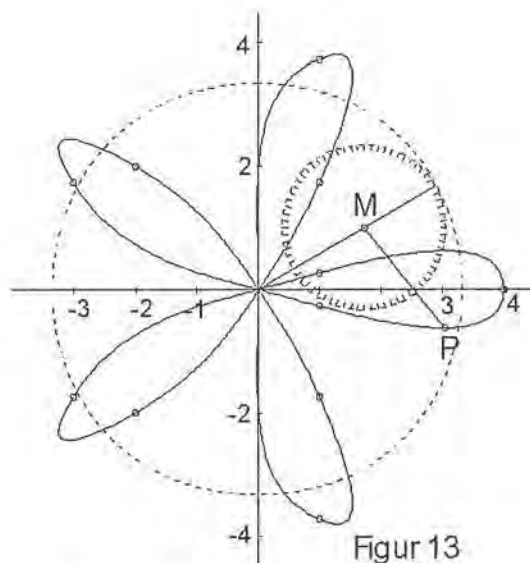
falls $a_0 = 4, a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = -2$ ist

Die Summe der Kosinusfunktionen legt es nahe, die Folgenwerte a_n aufzufassen als Projektion zweier sich überlagernder Kreisbewegungen. Diese Überlagerung lässt sich auch durch Abrollen eines Kreises mit dem Radius r_2 auf einem Kreis mit dem Radius r_1 mit $r_2 = 2r_1$ erzeugen, wobei die Bewegung eines mit dem abrollenden Kreis fest verbundenen Punktes P projiziert wird, der vom Zentrum des rollenden Kreises $\frac{3}{2}r_2$ entfernt ist. Es entsteht eine sog. verlängerte Epizykloide (Figur 12).

Für diese Folge gilt	$a_4 = 1$	$a_7 = 1$	$a_{10} = -3$
	$a_5 = 1$	$a_8 = 1$	$a_{11} = 1$
	$a_6 = 0$	$a_9 = -2$	$a_{n+12} = a_n$



Figur 12



Figur 13

Zur Erzeugung der Folgenglieder a_n kann man auch eine verlängerte Hypozykloide benutzen: In einem Kreis mit dem Radius r_1 rollt ein Kreis mit dem Radius r_2 , wobei gilt $r_2 = \frac{2}{5}r_1$.

Außerdem wird ein Punkt P des rollenden Kreises gewählt, der wieder $\frac{3}{2}r_2$ vom Mittelpunkt entfernt ist.

Verändert man die ersten vier Glieder a_0, a_1, a_2, a_3 , so erhält man eine andere Epizykloide, bzw. Hypozykloide. Das Verhältnis der Kreisradien ist durch die Rekursionsformel bestimmt.

Die Anfangsglieder $a_0 = 5, a_1 = 1,5, a_2 = -3,5, a_3 = -3$

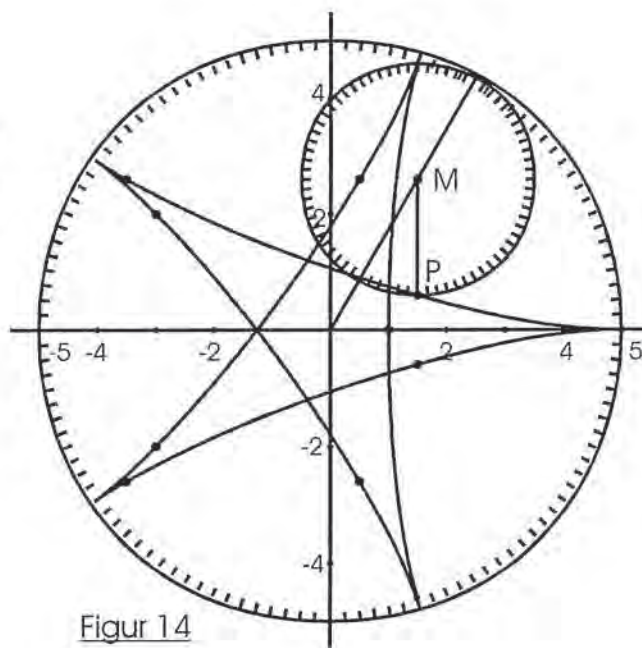
führen zu

$$a_n = 3 \cdot \cos(n \cdot 60^\circ) + 2 \cdot \cos(n \cdot 90^\circ)$$

Diese Folgenglieder entstehen aus einer Hypozykloide. In einem Kreis mit dem Radius $r_1 = 5$ rollt ein Kreis mit dem Radius $r_2 = 2$.

Es folgt

$a_4 = 0,5$	$a_8 = 0,5$
$a_5 = 1,5$	$a_9 = -3$
$a_6 = 1$	$a_{10} = -3,5$
$a_7 = 1,5$	$a_{11} = 1,5$
$a_{n+12} = a_n$	



Figur 14

Schlagwortverzeichnis

- 13er-Gilde 101
 2-Punkt-Gebiet 165
 2-Strich-Bereich 167
 3-Punkt-Gebiet 165, 166
 3-Strich-Bereich 168, 169
 4-Punkt-Gebiet 166
 4-Strich-Bereich 168, 169
 5-Punkt-Gebiet 166
- Abhängigkeit, kubische 42
 quadratische 42
 Abszisse 21, 23, 33, 298
 Achse 18, 21, 62, 66, 68, 71, 80, 81,
 142, 194, 255, 283, 304
 Spiegelungs- 10
 Adams, George 75, 186
 Additionstheorem 247
 Algebra, lineare 20
 Altertum 35, 42, 106, 290
 Analysis 35, 52
 Anfangspunkt 10, 12, 13, 14, 15, 98
 Ankreis 239
 Antidiagonalfolge 296
 Antipoden 226, 227, 228, 230, 232
 Äquator 226, 228, 229, 235, 244
 Äquatorebene 229, 244
 Arbeitsvorlagen 187
 Arithmetik 35, 299
 Asymptote 41, 42, 152, 263, 264, 267, 271
 Augpunkt 61
 axial-perspektiv 172
 Axiom 53, 56, 236, 299
 axiomatisch 58
- Bernhard, Arnold 5, 59, 75, 192, 269, 275
 Bewegung 12, 50, 62, 65, 66, 75, 80,
 178, 225, 226, 269, 310
 Beweis 46, 47, 92, 108, 172, 179, 182,
 229, 233, 261, 271, 274, 291
 Beweise, analytische 47
 Beziehungsgleichung 21
 Bild, affines 46
 Bilddreieck 61, 65, 66, 68, 81
 Bildgerade 60, 93, 152
 Bildpunkt 10, 13, 60, 62, 66, 77
 Bildpunkte 66, 68, 77, 80, 92, 244
 Bolyai, Johann u. Wolfgang 52, 53, 237
 Brennpunkt 46
 Brianchon, Charles 147
 Brianchon-Punkt 147, 151
 Satz von 188
- Cantor, Georg 259, 296, 298, 299, 300
 Cantor-Staub 297
- Cartesius 21
 Chordale 269, 270, 271, 275
 Cosinussatz 245
- Delisches Problem 42
 Desargues, Girard 52, 81
 Satz von Desargues ... 18, 73, 81, 108,
 121, 171, 172, 189, 192, 195, 196, 198
 Descartes, René 21, 35, 49
 Diagonaldreiseit 178, 184
 Diagonale 124, 125, 178, 179, 180, 181,
 216
 Diagonalfolge 296
 Diagonalkpunktendreieck 178, 184
 Diagonalverfahren 296
 Diametralpunkt 245
 Diaprojektor 77
 disjunkt 72, 165
 Doppeltetraeder 118, 279
 Doppelverhältnis 92, 93, 182, 183, 184,
 216, 217, 218, 219, 220, 221, 223
 Drache 217
 Drehsinn 72, 73, 281
 Drehung 9
 Dreieck
 ähnliche 88, 182, 221
 Eulersches 242, 227
 Gegen- 230, 231
 Kugel- 227, 228, 229, 230, 231, 233,
 234, 235, 239, 241, 244, 246, 248
 nautisches 254
 Neben- 230, 231, 239
 Polar- 228, 229, 239, 240, 249
 rechtwinkliges ... 23, 35, 36, 37, 39, 42,
 235, 236, 247, 272
 Scheitel- 230, 231
 sphärisches 230, 234
 Umfang 228
 Dreiecksebene 127, 130
 Dreiflach ... 115, 118, 119, 120, 121, 122,
 281
 Dreiflachpunkt 115
 Dreikant, konstituierendes 135, 136
 Dreiseit, konstituierendes 135, 136
 Dualbruch 295
 duale Figur 175, 184
 Dualität 48, 56, 68, 169, 177, 187, 188,
 196
 von Punkt und Ebene 169
 von Punkt und Gerade 169
 Dualitätsgedanke 72
 Dualitätsprinzip 73, 101, 106, 107, 259
 Durchdringungskörper 278, 279, 280,
 282, 287, 288, 289

- Dürer, Albrecht 76, 77
- Ebene, projektive 72, 277
- Ebenenbündel 112
- Einheitskreis 18
- Elemente, uneigentliche 155
- Entartung 260
- Entität 72
- Entwicklungsreihe 191, 192
- Erstgeraden 95, 97, 98
- Erstpunkte 95, 98
- Extremposition 165, 167
- Feldmessen 59
- Fernebene 87, 158, 161, 162
- Fernelement 56, 58, 59, 87, 88, 89, 198
- Fernpunkt 52, 71, 84, 85, 86, 87, 88, 152, 155, 156, 157, 161, 162, 163, 169, 173, 178, 184, 262, 263, 264, 267, 272
- Fibonacci, Folge von 301, 309
- Fixgerade 17, 18, 80
- Fixpunkt 13, 17, 64, 80, 81, 244
- Fixpunktgerade 17, 18, 60
- Fixstrahl 66
- Flächeninhalt 15, 35, 227, 228, 230
eines sphärischen Dreiecks 230
- Fluchtpunkt 52, 60, 61, 62, 71
- Folge 12, 13, 15, 53, 220, 290, 292, 294, 295, 296, 298, 301, 302, 305, 306, 307, 309, 310
arithmetische 296, 309
geometrische 216, 217, 218, 221, 223
unendliche 13, 14, 296, 299, 301
- Fotografie 77
- Fundamentalstruktur 137
- Fünfeck 142, 144, 224
- Fünfstern 142, 144, 145, 148
- Fußpunkt 37, 40, 275
- Gauß, Karl Friedrich 52
- Gebilde 2. Ordnung 20
- Gegenpunkte 226, 238, 244
- Gegenseite 81, 147, 187, 188, 195, 240
- gegenseitig kongruent 230, 231
- Geometrie, Abbildungs- 9
analytische 20, 21, 35, 49
euklidische 53
Kugel- 75, 225, 226, 227, 238, 240, 241, 246
nicht-euklidische 52, 53, 54, 237
projektive 48, 49, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 73, 75, 81, 101, 109, 155, 158, 169, 185, 186, 187, 189, 197, 216, 223, 224, 239, 278
widerspruchslöse 53
- Geradenbündel 45, 110, 181
- Geradenbüschel 45, 84, 85, 107, 110, 111, 112, 113, 142, 144, 148, 160, 162
- Geradenfeld 72, 87, 110, 111, 112, 114, 159, 162, 164, 167, 169, 183
- Geradengebüsch 161, 164
- Geradengleichung 35, 37, 269, 270
- Geradenmenge 45
- Geradenwurf, harmonischer 181, 184
- Gesetz, geometrisches 35
- Gliederung 63, 72, 164, 167, 169
- goldener Schnitt 285, 306
- Grenz-Gerade 15, 17, 41, 218, 282
-punkt 13, 14, 15, 16, 17, 42, 281, 282, 294
-quadrat 15, 16
-wert 14, 15, 290, 291, 294, 295, 301, 309, 310
- Größe, veränderliche 38
- Großkreis 226, 227, 228, 230, 232, 233, 234, 238, 239, 241, 244, 245, 246, 248
winkelhalbierender 233
- Grundecke 94
- Grundelemente 109, 110, 155, 197
- Grundgebilde 101, 109, 111, 114, 129, 159, 161, 260, 262
- Grundrissstrahl 62
- Grundseite 97
- harmonische Geraden 93, 98, 180
- harmonische Grundfigur 95, 98, 130, 220, 223
- harmonische Punkte 93, 125, 179, 184
- Hexaeder 117, 123, 129, 130, 134, 135, 137, 169
einfaches 129
vollständiges 129, 134, 136
- Höhe 37, 39, 40, 83, 86, 153, 154, 254, 291
- Höhensatz 35, 38, 39, 40, 42
- Höhenschnittpunkt 233, 239, 241
- Horizont 60, 61, 62, 71, 86, 157, 158, 172
- Horizontalebene 60, 61, 63, 65, 66, 67, 68, 77, 79, 80, 83, 152, 153, 154, 198
- Hülle 35, 54, 68, 72, 278, 287, 288
- Hüllkurve 144, 197
- Hüllkurven 2. Ordnung 197
- Hyperbel 18, 20, 24, 40, 42, 43, 52, 73, 146, 152, 188, 255, 256, 260, 262, 263, 264, 265, 267, 268, 271, 277
gleichseitige 39, 42, 45, 274
- Hyperbelgleichung 40, 43, 265, 266
- Hypotenuse 23, 36, 37, 270, 272
- Hypozykloide 311
- Identität 10
- Ikosaeder 117, 169

- Inkreis 239, 240
 Inkreismittelpunkt 233
 Inkugel 256, 282, 287, 288
 Inkurve 144, 146
 Intervallschachtelung 294, 296
 Invariante 92
 Invarianz 93, 181
 Involution 269, 273, 274, 275, 277

 Kathete 23, 36, 270
 Kegelschnitt 20, 43, 142, 147, 148, 152, 188, 197, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 263, 267, 277
 Kegelschnitte, projektiv erzeugte 73
 Kern 67, 68, 72, 193, 278, 279, 282, 285, 287, 288
 Kerze 189
 Kleinkreis 226, 227, 232, 233, 234
 Kleinsche Flasche 73
 Kollineation, zentriert-linierte 63, 69, 71, 73, 80, 189, 198
 kommutativ 10
 Konchoide 27
 Konfiguration, Reye'sche 137
 konjugiert komplexe Zahlen 303, 310
 konjugierte Punkte 274
 konvergieren 15, 16
 konzentrische Kreise 86
 Koordinatenachsen 21, 26, 50
 Koordinatenkreuz 21, 22
 Koordinatensystem 20, 32, 39, 42, 43, 44, 45, 50, 185, 224, 235, 275
 kartesisches 9, 21, 35, 37, 275
 Polar- 32, 255, 256, 257
 Körper, archimedischer 279, 282, 283, 284, 287, 288
 platonische 117, 278
 polararchimedischer 280, 283, 284, 287, 288
 Kreis, des Apollonius 36
 Kreisbüschel 269, 271, 273, 274, 275
 Kreisgleichung 40, 43, 276
 Krümmung 86, 157
 Kryptographie 155
 Kryptologie 155
 Kuboktaeder 114, 115, 116, 123, 282, 287
 Kubus 125
 Kugelgerade 238, 239
 Kugel-Mittelpunkt 229, 239
 Kugeloberfläche 225, 227, 230, 231, 239
 Kugelschnitt 226
 Kugelschnitt 231
 Kurve 20, 23, 24, 26, 27, 30, 33, 35, 38, 39, 43, 197, 255, 260, 261, 262
 cassinische 26, 44
 geschlossene 26

 Lage, axiale 88
 harmonische 92, 177, 181
 verschobene 89
 Lagebeziehung 71, 75, 101, 114, 155, 169, 178, 226
 Länge, konstante 37
 Leichtgerade 239, 240
 Leitgerade 255, 256
 Leitkreis 255
 Lemniskate 26, 44
 Linkspol 228
 Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch 52
 Locher-Ernst, Louis 75, 76
 Lot 36, 232, 240, 246, 275
 Luftfahrt 225

 Mächtigkeit 299, 300
 Menge aller Mengen 299, 300
 Meridian 244
 Metamorphose 90, 91, 186, 189, 198
 Dreiecks- 91, 221, 223
 Fünfecks- 223, 224
 Vierecks- 218, 220, 221, 223
 Mittel, geometrisches 42
 -senkrechte 37, 41, 232, 233, 238, 239, 240, 260, 271, 272
 Möbiusband 73, 88
 Möbiusnetz 104
 monoton 14
 Nebendreieck 94, 98, 130, 220, 230, 231, 239
 Nebendreieck 97, 98, 130
 Nebenseite 94, 95, 96, 97, 98, 103, 219, 222
 Nullfolge 290, 291, 292, 293
 Nullpunkt 21

 Oberfläche 225, 226, 232
 Oberseite 68
 Oktaeder 113, 114, 116, 117, 123, 135, 137, 140, 169, 279, 280, 282, 283, 285, 289
 einfaches 134
 vollständiges 134, 136
 Oktaederstumpf 123, 283, 285, 288
 Ordinate 21, 256
 Ortskurve 20, 73
 Ovale, Cartesische - 44

 Pappos, Satz von 106, 107, 197
 Parabel 18, 20, 23, 38, 39, 42, 43, 45, 52, 73, 146, 152, 188, 255, 256, 260, 262, 263, 264, 267, 277, 309
 Parabelgleichung 35, 40, 43
 Parallelenpostulat 52
 Parallelenschar, in der Zeichenebene 162

- Parallelitäten..... 190, 191
 Parallelprojektion 229, 234, 236
 Pascal, Blaise 147, 258, 259
 Satz von 187
 Pascalgerade 147, 148, 258, 259f
 Pentagondodekaeder 117, 285
 Peripheriewinkelkreis 47
 perspektiv. 18, 59, 122, 142, 179, 184, 239
 Perspektive 48, 73, 76, 189, 197
 Perspektivität 142
 Pol ... 20, 32, 73, 229, 238, 239, 240, 256,
 272, 274
 Polare ... 20, 73, 123, 238, 239, 240, 272,
 273, 274
 Polarität 56, 240, 278, 280
 Polaritätsgesetz 113, 114, 278
 Potenzlinie 269, 271, 272, 275, 277
 Potenzmenge 299, 300
 Problem, duales 72
 Projektion ... 80, 81, 92, 93, 223, 229, 234,
 236, 246, 256, 304, 306, 310
 stereographische 239, 244, 245
 Projektionsstrahl 77, 83
 Projektivität 142
 Proportionale, mittlere 42
 Punktbewusstsein 72
 Punktwurf, harmonischer ... 181, 182, 184
 Punktfeld 72, 87, 110, 112, 159, 162,
 164, 165, 169, 184
 Punktkurven 2. Ordnung 197
 Punktreihe ... 14, 84, 85, 109, 110, 111,
 112, 142, 144, 148, 156, 159, 162, 260,
 263, 264, 267, 278, 281
 Pyramide 79, 119, 123, 283, 285, 289
 Pyramidenoktaeder 123, 284
 Pyramidenwürfel 123, 283, 285, 289
 Pythagoras, Satz des 36, 50, 235, 236

 Quadrat 15, 16, 80, 106, 180, 216, 293
 -folge 216
 umbeschriebenes 153, 154

 Raum, absoluter 50
 euklidischer 51
 projektiver 87
 Rechtspol 228
 Redewendung 71
 Rhombendodekaeder 114, 115, 116,
 123, 282, 287
 Rückseite 73

 Schar 45, 163, 196
 Tangenten- 45
 Schiffahrt 225
 Schnittgerade 60, 87, 111, 113, 114,
 120, 121, 158, 160, 172, 281
 Schnittkante 118
 Schnittlinie 20, 47, 130, 256
 Schnittwinkel 10
 Schwerpunkt 16, 233, 240, 241
 Sechseck 147, 148, 187, 258, 259, 261
 Sechseck 280, 283
 Sechseck 147
 Sehnentangentensatz 40
 Sehstrahl 60, 61, 62, 65, 68
 Seiten-cos-cos-Satz 253
 Seitencosinussatz 242, 247, 248, 253
 Seitensumme 229
 Sekante 269, 271, 273, 274
 selbstpolar 129
 Sinussatz 92, 243, 247, 249, 253
 Spiegelung, Gleit- 12
 harmonische 18
 Punkt- 11
 Schräg- 12, 14
 Spirale 17, 307, 308
 logarithmische 306, 307, 308
 Steiner, Jakob 271, 272
 Störung, polare 134
 Strahl 156, 260, 261, 263
 Strahlenbüschel 44, 45, 62, 160, 240,
 260, 278, 281
 Strahlenfeld 159
 Streckenzug 17, 298
 Strophoide 27
 Struktur, topologische 72
 Symmetrie, von Begriffspaaren 193
 symmetrisch 23, 24, 26, 27, 43

 Tangenten ... 47, 86, 152, 189, 234, 240,
 245, 248, 250, 259, 260, 262, 263, 267,
 270, 274
 Tangentialebene 234, 239
 Taschenrechner 20
 Teilung, harmonische 91, 93, 98, 182
 -spunkt 91, 92, 98
 Tetraeder ... 116, 117, 121, 122, 129, 134,
 136, 278, 279, 289
 Tetraederstumpf 279, 280, 288
 Thales, Satz des 234
 Thaleskreis ... 39, 40, 41, 47, 234, 270, 274
 Träger ... 71, 84, 86, 111, 112, 129, 156,
 159, 160, 162, 163, 164, 260
 Trägerebene 87, 110, 111
 Trägergerade 86, 110, 178
 Trägerpunkt ... 45, 110, 111, 113, 161, 181
 Translation 11, 12
 Trapez 106, 216, 217, 218

 Überabzählbarkeit 296
 Umkreis 47, 239, 240, 245, 273
 Umkreismittelpunkt 233
 Umkugel 287, 288
 Umlaufsinn 156, 157, 183, 228, 229

- unendlich fern 12, 48, 84, 85, 86, 87,
127, 152, 188, 216, 218, 223, 224, 278
- Unendlichkeit..... 41, 164, 188
- Universalmathematik..... 35
- Unterseite..... 68, 73
- Urbild..... 86
- Urbildpunkt..... 61, 62, 73, 77
- Ursprung 10, 11, 16, 21, 23, 125, 264,
266, 270, 275
- Variable..... 21, 23
- Vektorrechnung..... 183, 242
- Verbindungsebene 112, 282
- Verbindungsgroßkreis 232
- Verbindungsweg, kürzester..... 226
- Verschlüsselung..... 155
- Vertikalebene 60, 61, 63, 65, 66
- Vielecke 195, 280
- Vielheit 159, 290, 294, 299
- Viereck, vollständiges 60, 94, 95, 98,
130, 177, 178, 181, 184, 239
- Vierecksverwandlung 90
- Vierflach 115, 118, 119, 120, 129, 281
- Vierflachpunkt 115
- Vierseit, vollständiges 94, 95, 97, 98,
130, 178, 184, 219, 220
- Vorgang, linearer..... 33
- Vorzeichen 23, 24, 44, 92, 183
- Winkel-cos-cos-Satz 248, 253
- Winkelcosinussatz 244, 247, 248, 253
- Winkelhalbierende 10, 41, 42, 233, 238,
239, 240
- Winkelsumme 66, 90, 91, 227, 228,
230, 231, 232, 235
- Würfel 113, 114, 116, 117, 127, 169,
279, 280, 282, 283, 285
- perspektiver..... 124, 125
- Würfelstumpf 123, 284, 285
- Würfelvolumen..... 42
- Wurfparabel..... 49
- Zahlenpaar 21, 22, 23
- Zeichnen, perspektivisches..... 60
- Zenon 290, 294, 300
- Zentrale 184, 244, 272
- zentral-perspektiv 172
- Zentralprojektion 52, 59, 63, 71, 75, 76,
77, 78, 81, 86, 92, 155, 188, 244
- zentriert 65, 77, 192
- Zentrum 11, 12, 18, 63, 65, 77, 80, 81,
83, 84, 102, 142, 175, 184, 194, 218,
221, 224, 278, 310
- Drehzentrum 9
- Projektions-..... 63
- Zirkel, sphärischer 232
- Zweieckswinkel..... 231