

Sanskrit, Trommeln und der „wachsende Juwelenberg“

Jessica Krause

11. Februar 2026

Manchmal eröffnen zufällige Erwähnungen neue Welten. In einem online-Meeting unter anderem mit einer amerikanischen Kollegin berichtete diese von einer Ausstellung über indische Poesie ihre Verbindung zum Spielen der Tablā, einer indischen Trommel, und zur Mathematik und Informatik im National Museum of Mathematics in New York City. Dass Mathematik und Musik eng verbunden sind wissen wir schon seit Pythagoras, doch geht die alt-indische Verbindung mindestens genauso weit zurück, beschäftigt sich aber mit ganz anderen Fragestellungen wie Rhythmen und Versmaßen. Da diese Fragestellungen kombinatorischer und zahlentheoretischer Natur sind und einen interessanten und schlüssigen Zugriff auf die Kombinatorik-Epoche darstellen und darüber hinaus fachübergreifende Zusammenarbeit mit Musik, Deutsch und/oder Informatik bieten, möchte ich sie hier vorstellen. Die Inhalte und Details werden in dieser Darstellung an vielen Stellen über den reinen Unterrichtsstoff hinausgehen, auch um die fächerübergreifenden Aspekte zu verdeutlichen. Am Ende dieses Textes steht ein Vorschlag für eine Einbindung in die Kombinatorik-/Zahlentheorie-Epoche, doch können sehr gut auch nur einzelne Aspekte in eine solche Epoche eingebracht werden.

Viele der hier dargestellten Inhalte wurden auch von dem kanadisch-indischen Mathematiker, Princeton Professor für Zahlentheorie und Fields Medaillen-Gewinner Prof. Dr. Manjul Bhargava zusammengetragen. Die englischsprachigen Videos seiner Vorträge sind auf YouTube zu finden und sehr kurzweilig und interessant.

Der indische Poet, Sprachanalytiker und Prosodiker Pingala, auf den hier immer wieder Bezug genommen wird, lebte irgendwann zwischen 800 und 200 v.Chr.,



Tablā

wann genau ist unbekannt. In seinem Werk „*Chanda Shāstra*“¹ bestehend aus vielen Sutras, also kürzeren und längeren Gedichten in Sanskrit, beschrieb und analysierte er die Poesie seiner Zeit. Dabei ging er hoch mathematisch vor. Nach ihm griffen weitere indische Poeten wie Kedāra Bhatt (ca. 8. Jhd. n.Chr.) und Ācārya Hemachandra (1088-1172/73) seine Fragestellungen auf² – ob inspiriert von ihm oder durch eigene Forschung, ist oft unklar.

Ein Sutra in Sanskrit folgt einem bestimmten Rhythmus, der sich aus einer bestimmten Anzahl von Schlägen und der Länge der Silben ergibt. In Sanskrit ist eine kurze Silbe (*laghu*) einen Schlag lang, und eine lange Silbe (*guru*) zwei Schläge lang.

Erste Fragestellung

Hemachandra, vermutlich auch schon Pingala³, stellte folgende Frage: *Wie viele Möglichkeiten für verschiedene Rhythmen aus kurzen und langen Silben erhalte ich, wenn in meinem Sutra z.B. acht Schläge übrig sind?*

Zunächst einige Beispiele:

lang sei Λ (lies „dah“) und kurz sei I (lies „di“)

in Symbolen	als sprachlicher Rhythmus
$I I I I I I I I$	<i>di-di-di-di-di-di-di-di</i>
$I I \Lambda I I \Lambda$	<i>di-di-dah-di-di-dah</i>
$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$	<i>dah-dah-dah-dah</i>
$I I I \Lambda \Lambda I$	<i>di-di-di-dah-dah-di</i>

¹[10]

²[5]

³[14]

usw.

Wollen wir uns der Beantwortung von Hemachandras Frage nähern, ist es sicherlich sinnvoll, systematisch vorzugehen. Es bietet sich an, zunächst die Möglichkeiten bei weniger Schlägen zu untersuchen und dann auf die Anzahl der Möglichkeiten bei acht Schlägen zu schließen.

Systematisch:

			Anzahl der Möglichkeiten
1 Schlag:	I		1
2 Schläge:	II	Λ	2
3 Schläge:	III I Λ	Λ I	3
4 Schläge:	IIII II Λ I Λ I	Λ II $\Lambda\Lambda$	5
5 Schläge:	IIIII IIII Λ III Λ I I Λ II I $\Lambda\Lambda$	Λ III Λ I Λ $\Lambda\Lambda$ I	8
6 Schläge:	...	...	13
7 Schläge:	...	...	21
8 Schläge:	...	...	34

Was fällt auf? Die Zahlen kommen einem Mathematiker bekannt vor! Tatsächlich handelt es sich um die sog. „Fibonacci-Folge“, benannt nach dem italienischen Mathematiker Leonardo Fibonacci, der ebenfalls im 12. Jahrhundert lebte (ca. 1170-1240) und der sie anhand des sogenannten Kaninchen-Problems ungefähr ein halbes Jahrhundert nach Hemachandra einföhrte.

Meiner Erfahrung nach fällt es insbesondere schwächeren Schüler:innen nicht ganz leicht, sich in das berühmte Kaninchen-Problem einzudenken. Besonders, da sie an der Praktikierbarkeit sich unendlich oft vermehrender Kaninchen und dem inzes-
tuösen Vorgang (ein Elternpaar zeugt ein Paar Junger, das sich dann nach gegebener Zeit wieder miteinander vermehrt) hängen bleiben und gar nicht bis zum mathematischen Problem vordringen. Man könnte fast meinen, das Fibonacci hier ein Vorreiter der teils doch recht fehlgeleiteten Anwendungsorientierungs-Bewegung im Mathematikunterricht ist.

Die Hemachandra-Folge ergibt sich dagegen aus einer echten, unkonstruierten Fragestellung der Poetik, die man mathematisch untersuchen kann.

Doch schauen wir uns die Hemachandra-Folge noch einmal genauer an:

Man erkennt, dass sich ab drei Schlägen die Anzahl der Möglichkeiten immer als Summe der beiden vorhergehenden Schlag-Zahlen ergibt:

$$3 = 1 + 2$$

$$5 = 2 + 3$$

$$8 = 3 + 5 \text{ usw.}$$

Damit beantwortet sich Hemachandras Frage: „Wie viele Möglichkeiten für verschiedene Rhythmen aus kurzen und langen Silben erhalte ich, wenn in meinem Sutra z.B. acht Schläge übrig sind?“ mit „Die Anzahl der verschiedenen Rhythmen (Möglichkeiten) bei n Schlägen ist die n -te Zahl der Hemachandra-Folge.“ Habe ich acht Schläge übrig, finde ich die Anzahl der möglichen Rhythmen bei der achten Zahl der Hemachandra-Folge, die „34“ lautet. Ich kann also 34 verschiedene Rhythmen bei acht Schlägen finden. Mathematisch ist das eine rekursiv definierte Folge $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Möchten wir, wie bei der Fibonacci-Folge üblich, mit $a_0 = 1$ beginnen, so dass die ersten Folgenglieder 1, 1, 2, 3, 5, 8,... lauten, so müssen wir in unserer Aufzählung die eine Möglichkeit beachten, dass es gar keine Silben gibt.

Hemachandra gibt sich mit oben genannter Antwort nicht zufrieden. Er liefert auch den Beweis – ebenfalls in Form eines Sutra. Dieses Sutra ist denkbar kurz und bedarf eigener weiterführender Überlegungen, wie es zu dieser Zeit üblich war. Es gibt aber die entscheidenden Hinweise. Es lautet übersetzt: „Jeder Vers [beginnt] entweder mit *laghu* (kurz) oder *guru* (lang).“⁴

Warum erklärt das alles? Diese Frage im Begriffsteil zu diskutieren und von den 9. Klässler:innen Antwortmöglichkeiten ausarbeiten zu lassen, ist eine großartige Möglichkeit, mathematisches Denken verbalisieren zu üben und die Vollständigkeit unserer Listen zu beweisen.

Der sogenannte Begriffsteil ist der dritte Schritt im unterrichtlichen Dreischritt. Hier finden Abstraktion, Erklärung, Vertiefung und Erweiterung zuvor gemachter inhaltlicher Erfahrungen und „Mathematikbegegnungen“ (erster Schritt – „Schluss“) und derer Ordnung, Sortierung und Reflexion (zweiter Schritt – „Urteil“) statt.

⁴[9]

Schauen wir uns eine mögliche Erklärung am Beispiel von 5 Schlägen an:

			Anzahl der Möglichkeiten
1 Schlag:	I		1
2 Schläge:	II	Λ	2
3 Schläge:	III I Λ	Λ I	3
4 Schläge:	IIII II Λ I Λ I	Λ II $\Lambda\Lambda$	5
5 Schläge:	IIIII IIII Λ II Λ I I Λ II I $\Lambda\Lambda$	Λ III Λ I Λ $\Lambda\Lambda$ I	8

Hemachandra sagt: „Jeder Vers [beginnt] entweder mit *laghu* (kurz) oder *guru* (lang).“ Bei fünf Schlägen gibt es Rhythmen, die mit *kurz* (I) beginnen, das sind die fünf in der linken Spalte; und es gibt Rhythmen, die mit *lang* (Λ) beginnen, das sind die drei in der rechten Spalte. Woher kommen die 5 und 3? Beginnt ein 5-schlägiger Vers mit *kurz* (I), schreibt man vor die 4-schlägigen Verse einfach ein *kurz* (I) und erhält fünf Schläge. Soll der 5-schlägige Vers mit *lang* (Λ) beginnen, muss man, um die Anzahl der Schläge nicht zu überschreiten, den langen Schlag (der ja zwei kurzen Schlägen entspricht) vor die 3-schlägigen Verse schreiben. Damit setzen sich die 5-schlägigen Verse zusammen aus den 4-schlägigen Versen, denen man eine *kurze* (I) Silbe voranstellt und den 3-schlägigen Versen, denen man eine *lange* (Λ) Silbe voranstellt.

Hemachandras Beweis bedeutet also: beginnt ein Vers aus n Schlägen mit kurz (I), so entspricht die Anzahl der Möglichkeiten denen von $n - 1$ Schlägen (a_{n-1}), beginnt ein Vers aus n Schlägen mit lang (Λ), so entspricht die Anzahl der Möglichkeiten denen von $n - 2$ Schlägen (a_{n-2}). Damit ergibt sich die Anzahl a_n bei n Schlägen als $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass im Original, die ergänzenden Silbe am Ende angefügt wurde, so dass die originale Übersetzung Hemachandras lautet „Jeder Vers endet entweder auf *laghu* oder *guru*.“ Da später im Text aber ähnliche Anfügungen stattfinden, die zugunsten unserer heutigen Schreibweisen angepasst wurden, findet die Anpassung der Konsistenz halber auch hier statt.

Eine interessante Aufgabe für Schüler:innen, die eine Herausforderung suchen, ist

3-2 rumba clave in two measures of 2/2



2-3 rumba clave in two measures of 2/2



Rumba-Clave,
<https://commons.wikimedia.org>
 14.10.2025

die Frage, welche Folge entsteht, wenn die Silben z.B. 1 und 3 oder 2 und 3 Schläge lang sind. 2-3/3-2-schlägige Rhythmen findet man in vielen Latin- und afrikanischen Musikstilen z.B. bei der Salsa-Clave, der Rumba-Clave oder Bossa Nova-Clave. Oft werden in der 9. Klasse Tanzkurse durchgeführt, so dass die Schüler:innen hier einen Bezug herstellen können.

Die Folge, die bei 2- und 3-schlägigen Silben entsteht sieht so aus:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	n
a_n	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	...	$a_{n-3} + a_{n-2}$

Es ist bei dem gesamten Thema sicherlich interessant, es durch Rhythmusübungen wie Body-Percussion, dem „Cup-Song“, Stockkampf oder verschiedensten Klatsch- oder Sprachübungen zu begleiten. Eine einfache Übung für den Beginn ist, gemeinsam die aufgestellte Liste zu klatschen oder mit *di* (für I) und *dah* (für Λ) zu sprechen. Später kann man die Schüler nacheinander die einzelnen Zeilen klatschen oder Sprechen lassen usw.

In Zusammenarbeit mit der Deutschkollegin oder dem Deutschkollegen kann man vielleicht sogar Gedichte oder Wortfolgen in den entsprechenden Silbenfolgen schreiben lassen. Ist das immer möglich? Ein Satz im Deutschen aus z.B. acht ausschließlich kurzen Silben ist bspw. nicht realisierbar, da die deutsche Sprache ihren Rhythmus durch betonte und unbetonte Silben erhält, nicht durch Lang- und Kurzsilben. Darüber hinaus ist es im Deutschen nicht möglich, mehrere gleich unbetonte Silben nacheinander zu sprechen. Welche anderen Möglichkeiten können wir finden?

Will man die Bedeutung der Betonung im Deutschen näher untersuchen, könnte man sich z.B. den folgenden Satz (oder einen beliebigen anderen) anschauen, der, je nachdem welches der zehn Wörter man betont, zehn verschiedene Bedeutungsnuance hat, die man kombinatorisch nacheinander sprechen kann:

„Ich habe nicht gesagt, dass wir die Ferien nicht mögen.“

Ich habe nicht gesagt, dass wir die Ferien nicht mögen.
 Ich *habe* nicht gesagt, dass wir die Ferien nicht mögen.
 Ich habe *nicht* gesagt, dass wir die Ferien nicht mögen.
 Ich habe nicht *gesagt*, dass wir die Ferien nicht mögen.
 Ich habe nicht gesagt, *dass* wir die Ferien nicht mögen.
 Ich habe nicht gesagt, dass *wir* die Ferien nicht mögen.
 Ich habe nicht gesagt, dass wir *die* Ferien nicht mögen.
 Ich habe nicht gesagt, dass wir die *Ferien* nicht mögen.
 Ich habe nicht gesagt, dass wir die Ferien *nicht* mögen.
 Ich habe nicht gesagt, dass wir die Ferien nicht *mögen*.

Kann man auch mehrere Wörter betonen, so dass sich die Bedeutungsnuance ändert? Welche sind trotz verschiedener Betonungskombinationen von der Bedeutung her ähnlich?

Eine andere Idee für eine kombinatorische Sprachübung habe ich dem geschätzten Kollegen Rolf Rosbigalle zu verdanken, die durch ihre vielen „k“ auch dem Wachwerden hilft:

„Kein Kind kann keinen Kirsch kern knacken.
 Kein *Kleinkind* kann keinen Kirsch kern knacken.
 Kein Kind kann keinen *kleinen* Kirsch kern knacken.
 Kein Kind kann keinen Kirsch kern *klein* knacken.
 Kein *Kleinkind* kann keinen *kleinen* Kirsch kern knacken.
 Kein Kind kann keinen *kleinen* Kirsch kern *klein* knacken.
 Kein *Kleinkind* kann keinen Kirsch kern *klein* knacken.
 Kein *Kleinkind* kann keinen *kleinen* Kirsch kern *klein* knacken.“

Außerdem kann man viele Anagramm-Gedichte mit entweder Wort- oder Buchstabenpermutationen finden.

Hier zwei kurze Beispiele von Friedrich Wolfenter⁵ :

Buchstabenpermutation	Wortpermutation
<i>Warteschleife</i>	<i>Ich weiss, wer ich bin.</i>
Warte, schleife,	Weiss ich, wer ich bin?
schwafle, reite,	Bin ich wer? Weiss ich?
watschle, feire,	Ich bin ich – wer weiss?
feilsche, warte,	Wer ich bin, weiss ich.
filtere, wasche,	Wer ich? Ich bin weiss,
schlafe weiter!	ich weiss. Ich bin wer!

⁵[16]

Interessant sind auch sogenannte „Fibonacci-Gedichte“, hier ein Beispiel auf Englisch von Brian Bilston⁶:

I
wrote
a poem
on a page
but then each line grew
by the word sum of the previous two
until I started to worry at all these words coming with such frequency
because, as you can see, it can be easy to run out of space when a poem gets all Fibonacci sequence.

Fibonacci-Gedicht, Brian Bilston

Zweite Fragestellung

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, z.B. acht Silben (dah (Λ) oder di (I)) anzuordnen und wie kann man diese Anordnung systematisieren?

Diese Fragestellung geht auf Pingala (zwischen 800 und 200 v.Chr.) zurück. Im achten Kapitel seines Werks „*Chanda Shāstra*“, das aus 35 Sutras besteht, behandeln die letzten 16 Sutras algorithmisch-kombinatorische Fragestellungen und Vorgehensweisen wie unsere zweite Fragestellung. Diese nennt er „Prastāra“, was so viel wie Ausbreitung bedeutet⁷.

Wie unterscheidet sich die erste Fragestellung von der zweiten? In Sanskrit gibt es zwei verschiedene Versarten: Solche, bei denen die Anzahl der Schläge vorgegeben ist und solche, bei denen die Anzahl der Silben vorgegeben ist⁸. Bei der ersten Fragestellung wurde die Anzahl der Schläge vorgegeben. Innerhalb dieser festen Anzahl von Schlägen sollen die langen (Λ) und kurzen (I) Silben untergebracht werden. Die Anzahl der verschiedenen möglichen Rhythmen, die sich daraus ergibt, ist, wie oben gezeigt die Hemachandra-(Fibonacci-)Folge.

Nun wird die Anzahl der Silben vorgegeben, was bedeutet, die Anzahl der Schläge variiert und ist nicht mehr in erster Linie relevant.

Im Deutschen ist bei strenger Anwendung der klassischen Meter in der Regel beides vorgegeben – sowohl die Anzahl der Silben, als auch die der Schläge – auch

⁶[14]

⁷[7]

⁸[13]

wenn man mit beiden in einem gewissen Rahmen kreativ umgeht.

Wir analysieren dies, wenn wir bspw. Versfüße von Gedichten untersuchen:

Es war, als hätt' der Himmel

Die Erde still geküsst,

Dass sie im Blütenschimmer

Von ihm nun träumen müsst.

(Joseph von Eichendorff)

Metrik: unbetont betont = Jambus

Hier sind z.B. in je zwei Zeilen die Anzahl der Silben wie auch die Anzahl der Schläge gleich.

Im Deutschen gibt es insbesondere vier Versfüße, Jambus, Trochäus, Daktylus und Anapäst, die auf die griechische Antike zurückgehen. In der griechischen Antike und in anderen Sprachen findet man weit mehr verschiedene Versfüße. Allerdings unterscheidet sich das Deutsche in einem entscheidenden Punkt vom Sanskrit: Im Deutschen geht es um betonte und unbetonte Silben, die Länge spielt dabei eine untergeordnete Rolle und ist auch nicht so klar definierbar. Man könnte im Deutschen nach Fiechter⁹ eher von einem Sprach-Rhythmus sprechen, dem eine Metrik zugrunde liegt. Im Sanskrit handelt es sich um klar definierte Silbenlängen und weniger um eine Betonung, auch wenn sich die lange Silbe für das fremde Ohr wie eine Betonung anhört. Hier trifft eher der Begriff der reinen Metrik zu. Verschiedene Meter drücken dann das aus, was im Deutschen durch den Sprach-Rhythmus zum Tragen kommt.

Die beiden folgenden Tabellen zeigen allen drei- und viersilbigen Meter und deren Bezeichnungen in Griechisch und Sanskrit. Die viersilbige Liste scheint unvollständig. Es fehlen drei Meter: - - - -, - U - U und U - U -, die aber alle drei durch zweisilbige Meter bereits erfasst sind. Darüber hinaus erkennt man die klare Struktur des Sanskrit: alle acht dreisilbigen Meter werden durch einen Konsonanten bezeichnet (M, Y, R, S, T, J, Bh, N), die viersilbigen Meter setzten sich dann im ersten Teil aus den dreisilbigen zusammen mit einem angehängten „gam“ für *guru*, also lang oder „lam“ für *laghu*, also kurz. Wir werden später auf die dreisilbigen Bezeichnungen im Sanskrit zurückkommen.

Dreisilbige Meter¹⁰:

⁹[4]

¹⁰Nach [6]

Griechischer Name	Silbenlängen (Metrik)	Sanskrit Name	Lateinisches Beispiel
Molossus	- - -	Magana	Mæcenas
Bacchius	U - -	Yagana	'Ymetto
Cretius	- U -	Ragana	Reddidi
Anapestus	U U -	Sagana	Similes
Antibacchius	- - U	Tagana	Tentare
Amphybrachys	U - U	Jagana	Juvabit
Dactylus	- U U	Bhagana	Bucula
Tribrachys	U U U	Nagana	Nivea
- betont oder lang, U unbetont oder kurz			

Viersilbige Meter:

Griechischer Name	Silbenlänge (Metrik)	Sanskrit Name
Choriambus	- U U -	Bha-gam
Antispastus	U - - U	Ya-lam
Ionic à majore	- - U U	Ta-lam
Ionic à minore	U U - -	Sa-gam
Pæan I.	- U U U	Bha-lam
Pæan II.	U - U U	Ja-lam
Pæan III.	U U - U	Sa-lam
Pæan IV.	U U U -	Na-gam
Epitrite I.	U - - -	Ya-gam
Epitrite II.	- U - -	Ra-gam
Epitrite III.	- - U -	Ta-gam
Epitrite IV.	- - - U	Ma-lam
Proceleusmatic	U U U U	Na-lam

Nähern wir uns nun mathematisch der zweiten Fragestellung, wie viele Möglichkeiten es gibt, n Silben aus zwei Elementen anzuordnen und die Anordnung zu sortieren, gehen wir wieder wie oben systematisch vor:

			Anzahl der Möglichkeiten
1 Silbe	Λ I		2
2 Silben	Λ Λ Λ I	I Λ I I	4
3 Silben	Λ Λ Λ Λ Λ I Λ I Λ Λ I I	I Λ Λ I Λ I I I Λ I I I	8

Wie man sieht, deutet sich hier bereits eine Verdopplung der Möglichkeit je hinzugenommener Silbe an. Die Anzahl a_n der Möglichkeiten bei n Silben stellt sich damit als $a_n = 2^n$ dar.

Pingala geht nach dieser Erkenntnis noch weiter und beschreibt einen Algorithmus, um alle Möglichkeiten systematisch aufzulisten. Eine Systematik welcher Art auch immer ist insofern wichtig, als dass man nur durch sie sicherstellen kann, keine Zeile vergessen zu haben. Das entsprechende Sutra mit Pingalas Algorithmus lautet in der Übersetzung „Mische es mit sich selbst.“¹¹

Tatsächlich wurde dieser Algorithmus oben bereits angewandt. Was bedeutet er aber und wo erkennen wir ihn?

Beginnen wir bei einer Silbe:

1 Silbe	Λ I
---------	--------

Es gibt nur die beiden Möglichkeiten lang (Λ) oder kurz (I). Mischen wir sie mit sich selbst, bedeutet das, dass wir zunächst vor beide ein Λ schreiben, dann vor beide ein I:

	erst Λ davor schreiben	dann I davor schreiben
2 Silben	Λ Λ Λ I (Trochäus)	I Λ (Jambus) I I

¹¹[7]

Bei drei Silben verfahren wir genauso, nur dass wir jetzt vor die vier Kombinationen von zwei Silben jeweils ein Λ und ein I schreiben. Man erhält dann:

	erst Λ davor schreiben	dann I davor schreiben
3 Silben	$\Lambda \Lambda \Lambda$ $\Lambda \Lambda I$ $\Lambda I \Lambda$ $\Lambda I I$ (Daktylus)	$I \Lambda \Lambda$ $I \Lambda I$ $I I \Lambda$ (Anapäst) $I I I$
4 Silben	$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$ $\Lambda \Lambda \Lambda I$ $\Lambda \Lambda I \Lambda$ $\Lambda \Lambda I I$ $\Lambda I \Lambda \Lambda$ $\Lambda I \Lambda I$ $\Lambda I I \Lambda$ $\Lambda I I I$	$I \Lambda \Lambda \Lambda$ $I \Lambda \Lambda I$ $I \Lambda I \Lambda$ $I \Lambda I I$ $I I \Lambda \Lambda$ $I I \Lambda I$ $I I I \Lambda$ $I I I I$

Jetzt wird auch offensichtlich, warum sich jeweils die Anzahl der Möglichkeiten verdoppelt: Da ich die vorhergehende Liste „kopiere“ und einmal ein Λ und einmal ein I davor schreibe, erhalte ich doppelt so viele Möglichkeiten wie vorher. Eine interessante vertiefende Frage zur Untersuchung für besonders starke Schüler:innen ist, wie es dann bei drei, vier, usw. verschiedenen Silbenlängen oder Elementen aussähe? – Es findet tatsächlich dann jeweils eine Verdreifachung, Vervierfachung usw. statt, wie man mit Pingalas System leicht zeigen kann.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass zur besseren Verständlichkeit vom System Pingalas und seiner Nachfolger abgewichen wird. Die historische Anordnung der binären Kombinationen haben die „alten Inder“ spiegelverkehrt gewählt. Pingala hat die lange oder kurze Silbe also jeweils *hinten* ergänzt, nicht vorne, wie hier dargestellt. Da die hier gewählte Schreibweise mit unseren heutigen Binärzahlen übereinstimmt, wurden zum besseren Verständnis der 9. Klässler:innen hier und im Folgenden die historische Schreibweise und die dazugehörigen Algorithmen entsprechend abgeändert.

Im Unterricht gibt es mehrere Möglichkeiten, sich der gesamten Thematik und Fragestellung zu nähern. Einerseits kann man gut die Schüler:innen zunächst selbst probieren lassen, eine Antwort auf Pingalas Fragestellung „*Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, z.B. acht Silben Λ oder I anzuordnen und wie kann man diese Anordnung systematisieren?*“ zu finden. Interessant ist auch, verschiedene Vorgehensweisen beim Systematisieren zu vergleichen und von den Schülerinnen und Schülern erklären zu lassen. Die dahinterstehende Frage „Wie kann ich sicherstellen, dass ich alle Möglichkeiten gefunden habe?“ bietet sich als offene Fragestellung für die Diskussion im Begriffsteil an, wenn am vorhergehenden Tag zunächst die verschiedenen Möglichkeiten gesucht wurden.

Alternativ oder ergänzend kann den Schüler:innen Pingalas Original-Text ausgeteilt werden mit dem Arbeitsauftrag, ihn zu verstehen, basierend auf ihrem Vorwissen seinem Vorgehen zu folgen und dieses mit dem selbst erarbeiteten Vorgehen abzugleichen, allerdings ist das gar nicht so einfach...

Im Folgenden ist das Original in Sanskrit und der Transliteration dargestellt. Auch wenn nicht davon auszugehen ist, dass viele Leser:innen und Schüler:innen es lesen können, so gibt es doch einen kleinen, wenn auch nur oberflächlichen Eindruck.

Pingala:¹²

Prastāra प्रस्तार		
Dvikau glau द्विकौ ग्खी॥ ८ । २०॥	Λ I	Doppeltes ΛI -Paar.
Misrau ca मशिरौ च॥ ८ । २१॥	$\Lambda \Lambda$ ΛI $I \Lambda$ $I I$	(das ΛI -Paar) mit sich selbst gemischt und

¹²[11]

pruthaglā mishrā पृथग्ला मशिराः ॥ ८।२२ ॥	$\Lambda \Lambda \Lambda$ $\Lambda \Lambda I$ $\Lambda I \Lambda$ ΛII $I \Lambda \Lambda$ $I \Lambda I$ $II \Lambda$ III	Wiederholend ΛI 's gemischt.
Vasavastrikā वसवस्त्रिकाः ॥ ८।२३ ॥		Acht Tripel.

Diese acht Tripel entsprechen den acht dreisilbigen Metern, sie werden in der Achten und Neunten Fragestellung noch einmal relevant, da Pingala sie zur Codierung von Rhythmen verwendet.

Kedāra Bhatt, ein indischer Prosodiker, der etwa 1000 Jahre nach Pingala lebte und sich mit denselben Fragestellungen beschäftigte, entwickelte einen anderen Algorithmus. Er schreibt¹³:

पादे सर्वगुरावाह्यात्लघुं न्यस्य गुरोरधः ।	Geben Sie alle guru's; ein laghu von außen unter das guru legen
यथोपरतिथा शेषं सूयः कुर्यादमुं वधिम् ॥ २ ॥	Wie oben, so ist dann auch der Rest vor dem guru.
अने. दद्याद् गुरुनेव यावत्सर्वलघुरभवेत् ।	Geben Sie guru's, bis alles laghu ist.
प्रस्तारोऽयं समाख्यातदम्दोवचितिविदभिः	Diese Ausdehnung des Universums (prastara) wurde von den Gelehrten beschrieben.

¹³[1], [7]

Transliteration	Inhaltliche Übersetzung
pade sarvagurau adyat laghu nasya gurō adhā	Am Anfang sind alle lang (Λ) Schreibe in der zweiten Zeile ein kurz (I) unter das letzte Λ der Zeile darüber
yatha-upari tatha sesham bhuyā kuryat amum vidhim	Kopiere die verbleibenden Stellen links des Λ wie in der Zeile darüber
une dadyat gurun eva yavat sarve laghū bhavet	Platziere Λ's auf allen verbleibenden Stellen rechts des letzten Λ (falls vorhanden) Wiederhole dieses Vorgehen bis alle I sind
prastarā ayām samakhyatā chandoviciti vedibhī	Dieser Prozess ist bekannt als 'prastara'.

Wie geht er vor? Schauen wir es uns am Beispiel von vier Silben an:

Die erste Zeile lautet

Am Anfang sind alle gurus	Λ Λ Λ Λ	
Schreibe in der zweiten Zeile das „I“ unter das letzte „Λ“ der Zeile darüber		I
	Λ Λ Λ	Kopiere die verbleibenden Stellen links des Λ wie in der Zeile darüber
	Λ Λ Λ I	
Schreibe in der [nächsten] Zeile das „I“ unter das letzte „Λ“ der Zeile darüber		I
	Λ Λ	Kopiere die verbleibenden Stellen links des Λ wie in der Zeile darüber
Platziere Λ's auf allen verbleiben- den Stellen rechts des ersten Λ's		Λ
	Λ Λ I Λ	
Schreibe in der [nächsten] Zeile das „I“ unter das letzte „Λ“ der Zeile darüber		I

	Λ Λ I	Kopiere die verbleibenden Stellen links des Λ wie in der Zeile darüber
	Λ Λ I I	
Platziere Λ 's auf allen verbleiben- den Stellen rechts des ersten Λ 's	I	
	Λ	Kopiere die verbleibenden Stellen links des Λ wie in der Zeile darüber
Platziere Λ 's auf allen verbleiben- den Stellen rechts des ersten Λ 's	Λ Λ	
	Λ I Λ Λ	

Auch diesen Algorithmus kann man den Schüler:innen austeilen mit dem Auftrag, ihn zu verstehen, anzuwenden und mit dem eigenen abzugleichen. Denkbar ist eine Gruppenarbeit, in der die eine Hälfte der Klasse Pingalas Algorithmus bekommt und die andere Hälfte Bhatts Algorithmus. Nach Fertigstellung wird gegenseitig berichtet und verglichen. Sinnvoll sind dafür sicherlich mindestens vier Silben.

Interessant ist, dass beide zum gleichen Ergebnis kommen. Bei beiden steht die Abfolge der einzelnen Kombinationen an derselben Stelle. Ihr Vorgehen unterscheidet sich aber fundamental:

Pingala geht rekursiv vor, der „Code“ wird also jedes Mal komplett neu aufgerufen bzw. kopiert oder anders ausgedrückt ergibt sich die komplette Liste aus der vorhergehenden. Kenne ich die Liste der Kombinationen von 3 Silben, kann ich mithilfe von Pingalas Algorithmus also ganz leicht die Liste der Kombinationen von 4 Silben erzeugen.

Bhatt geht hingegen iterativ vor, es werden also Schleifen ausgeführt, um Teile des „Codes“ zu wiederholen oder anders ausgedrückt erhält man eine Instruktion, wie man eine beliebige Zeile erzeugen kann, wenn man die vorhergehende Zeile kennt.

Beide Vorgehensweisen werden beim Programmieren verwendet, so dass sich hier auch fächerübergreifende Zusammenarbeiten anbieten. Diese Zusammenarbeit könnte vor dem Hintergrund der nächsten Fragestellungen weiter ausgebaut werden.

Im Unterricht ist es sehr empfehlenswert, nicht nur die Listen im Schlussteil, dem

erkundenden ersten Schritt im Dreischritt, zu erstellen, sondern im Urteilsteil, zweiter ordnender und reflektierender Schritt, auch ausführliche Beobachtungen zu sammeln. Dies ist einerseits eine Übung im Erkennen von Mustern, eine fundamental mathematische Fähigkeit, andererseits übt es das Verbalisieren und Erläutern von Beobachtungen und bereitet darüber hinaus das leichtere Verständnis der folgenden Schritte vor.

Betrachtet man z.B. die Liste der vier-silbigen Rhythmen oder Muster, kann man bspw. folgende Beobachtungen machen:

- Die erste Hälfte beginnt mit Λ , die zweite Hälfte beginnt mit I .
- Die letzte Stelle wechselt sich immer zwischen Λ und I ab.
- An der vorletzten Stelle steht immer für zwei Zeilen Λ oder I , an der drittletzten Stelle für vier Zeilen, an der viertletzten Stelle für acht Zeilen usw.
- Das I wandert sukzessive von rechts nach links.
- Von oben nach unten werden es immer mehr I .
- Wandert das I um eine Stelle nach vorne, so wiederholen sich alle bisherigen Endungen bis zu dieser Stelle.
- Wandert das I um eine Stelle nach vorne, so werden die Stellen dahinter erst so lange systematisch aufgefüllt und mehr I dazu genommen, bis alle Stellen mit I gefüllt sind.

Usw.

Im Begriffsteil, dem dritten, vertiefenden und abstrahierenden Schritt, am nächsten Tag folgt dann beispielsweise die Diskussion zur Frage: „Wie können wir sicher sein, dass wir alle möglichen Kombinationen erwischt haben?“

Hier können die Schüler dann vertiefend mit der erkannten Systematik argumentieren und auch auf ihre Kenntnisse zur Variation zurückgreifen und rechnerisch argumentieren. Als Variation gibt es bei z.B. fünf Silben mit den beiden Elementen Λ und I für jede Silbe zwei Möglichkeiten, es sind insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Möglichkeiten. Wobei die reine rechnerische Argumentation für ein wirkliches Verständnis zu oberflächlich bleibt und nicht ausreicht. Muster zu erkennen und das Erkannte zu verbalisieren sind die zentralen mathematischen Tätigkeiten! Daraus leiten sich dann auch die Algorithmen ab.

Dritte Fragestellung

Wie kann ich, wenn ich die Zeilennummer kenne, den zugehörigen Rhythmus wiederherstellen?

Auch diese Fragestellung bearbeiteten sowohl Pingala als auch Bhatt¹⁴. Pingala nannte diese Problemstellung „Nastam“, übersetzt bedeutet es „vernichtet, verloren“.

Bevor wir uns aber ihrer Vorgehensweisen widmen, sei hier noch ein weiterer Bezug zur Zahlentheorie und Informatik hergestellt:

Exkurs

Statt lang – Λ und kurz – I können 0 und 1 verwendet werden. Hier wird lang – $\Lambda = 0$ und kurz – $I = 1$ gewählt, so dass es zu den üblichen Binärzahlen passt. In vielen wissenschaftlichen Arbeiten zu diesem historischen Thema wird es andersherum gewählt, so auch in den meisten hier angeführten Quellen. Da es aber im Kontext und für das Verständnis der 9. Klässler:innen leichter ist, wähle ich neben der Spiegelung der einzelnen Zeilen auch die übliche Schreibweise der Binärzahlen.

Es ergibt sich dann folgende Abfolge:

	lang – kurz-Schreibweise		Übliche Binärzahlen	
1 Silbe	Λ	I	0	1
2 Silben	$\Lambda \Lambda$	$I \Lambda$	00	10
	ΛI	$I I$	01	11
3 Silben	$\Lambda \Lambda \Lambda$	$I \Lambda \Lambda$	000	100
	$\Lambda \Lambda I$	$I \Lambda I$	001	101
	$\Lambda I \Lambda$	$I I \Lambda$	010	110
	$\Lambda I I$	$I I I$	011	111

¹⁴[13]

4 Silben	$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$	$I \Lambda \Lambda \Lambda$	0000	1000
	$\Lambda \Lambda \Lambda I$	$I \Lambda \Lambda I$	0001	1001
	$\Lambda \Lambda I \Lambda$	$I \Lambda I \Lambda$	0010	1010
	$\Lambda \Lambda I I$	$I \Lambda I I$	0011	1011
	$\Lambda I \Lambda \Lambda$	$I I \Lambda \Lambda$	0100	1100
	$\Lambda I \Lambda I$	$I I \Lambda I$	0101	1101
	$\Lambda I I \Lambda$	$I I I \Lambda$	0110	1110
	$\Lambda I I I$	$I I I I$	0111	1111

Es bleibt festzuhalten, dass in Indien bereits vor über 2000 Jahren Binärzahlen existiert haben, auch wenn weder Pingala noch Bhatt mit 0 und 1 gearbeitet haben. – Die Null, die etwa seit dem 5. Jh. n.Chr. in Indien in Gebrauch war, war zur Zeit von Kedāra Bhatt übrigens schon „erfunden“.

In Zusammenarbeit mit dem Informatikunterricht könnte dort nun eine vertiefende Auseinandersetzung mit den Binärzahlen, ihrer Bedeutung in diesem Fach und ggf. den Grundrechenarten mit Binärzahlen stattfinden.

Kommen wir zurück zur dritten Fragestellung: Wie kann ich, wenn ich die Zeilennummer kenne, den zugehörigen Rhythmus wiederherstellen? Anders ausgedrückt bedeutet diese Frage nichts anderes, als eine Dezimalzahl = die Zeilennummer, in eine Binärzahl = der Rhythmus, umzurechnen.

Kennt man Bhatts Algorithmus, kann man leicht eine Zeile aus einer vorhergehenden oder nachfolgenden bekannten Zeile rekonstruieren. Bhatt hat daher kein spezielles Vorgehen für diese Fragestellung entwickelt.

Anders Pingala. Da er rekursiv vorging, also immer die komplette vorhergehende Liste kopierte, ist eine Rekonstruktion einer einzelnen Zeile schwieriger.

Die „alten Inder“ nummerierten die Rhythmen wie folgt:

4 Silben	1	Λ Λ Λ Λ	9	I Λ Λ Λ	1	0000	9	1000
	2	Λ Λ Λ I	10	I Λ Λ I	2	0001	10	1001
	3	Λ Λ I Λ	11	I Λ I Λ	3	0010	11	1010
	4	Λ Λ I I	12	I Λ I I	4	0011	12	1011
	5	Λ I Λ Λ	13	I I Λ Λ	5	0100	13	1100
	6	Λ I Λ I	14	I I Λ I	6	0101	14	1101
	7	Λ I I Λ	15	I I I Λ	7	0110	15	1110
	8	Λ I I I	16	I I I I	8	0111	16	1111

Es fällt auf, dass ΛΛΛΛ nicht der dezimalen 0 entspricht, sondern der 1. Da Pingala noch keine Null kannte, ist das verständlich und wurde von seinen Nachfolgern übernommen. Hier wird ein Vorgehen dargestellt, das zunächst den „alten Indern“ folgt und dann zeigt, wie man später trotzdem zu den üblichen Binärzahlen kommt. Will man das auslassen, nummeriert man an dieser Stelle die Liste um und beginnt bei der Zeilenzählung mit 0. Dann sind in der folgenden Darstellung die Beobachtungen zu ungeraden und geraden Zeilen zu vertauschen (gerade Zeilen enden dann auf Λ, ungerade auf I) und der Algorithmus ist entsprechend anzupassen; wie die Anpassung stattfinden muss wird an den entsprechenden Stellen als Alternative erwähnt.

Betrachten wir die Liste der Rhythmen und die zugehörigen Zeilennummern, können wir zunächst einmal feststellen, wenn wir z.B. die Liste der Kombinationen bei vier Silben untersuchen, dass die Zeilennummer immer ungerade ist, wenn sie auf Λ oder „0“ endet und immer gerade ist, wenn sie auf I oder „1“ endet. Umgekehrt muss also der Rhythmus bei einer ungeraden Zeilennummer auf Λ oder „0“ und bei einer geraden Zeilennummer auf I oder „1“ enden. Die vorletzte Silbe wechselt alle zwei, die drittletzte Silbe alle vier und die viertletzte Silbe alle acht Zeilennummern usw.

Da die vorletzte Silbe für je zwei Zeilennummern gleich ist, bedeutet es, wenn die letzte Silbe weggelassen wird, sind jeweils zwei Zeilen gleich. In der Liste oben sind, lasse ich die letzte Silbe weg, jeweils Zeilen 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8 usw. gleich. Mathematisch ausgedrückt sieht das so aus:

Entfernen wir die letzte Silbe des Rhythmus' r, erhalten wir einen neuen Rhythmus

r' , für den gilt:

$$\text{Zeilennummer von } r' = \begin{cases} \frac{(\text{Zeilennummer von } r)+1}{2} & \text{wenn } r \text{ ungerade ist} \\ \frac{\text{Zeilennummer von } r}{2} & \text{wenn } r \text{ gerade ist} \end{cases} \quad 15$$

In der 3-silbigen Liste sind dann, lasse ich wieder die letzte Silbe weg, jeweils Zeile 1 und 2, 3 und 4, 4 und 5, 5 und 6, 7 und 8 gleich.

Auf diese Art und Weise kann man nun umgekehrt vorgehen und Schritt für Schritt von rechts nach links den Rhythmus rekonstruieren.

Ist die Zeilennummer gerade, muss hinten ein „I“ stehen, ist sie ungerade, erhalte ich ein „Λ“. Kenne ich nun die letzte Silbe, kann ich die neue Zeilennummer in der $n - 1$ -silbigen Liste durch die Rechnung oben ermitteln, und wieder „I“ oder „Λ“ zuordnen usw.

Beispiel: 4 Silben/Bits

	Rhythmus	Zeilennummer	Gerade/ungerade
Zeile	r_{14}	14	gerade → letzte Stelle „I“
	$r'_{14} \text{I}$	$\frac{14}{2} = 7$	ungerade → vorletzte Stelle „Λ“
	$r''_{14} \Lambda \text{I}$	$\frac{7+1}{2} = 4$	gerade → letzte Stelle „I“
	$r'''_{14} \text{I} \Lambda \text{I}$	$\frac{4}{2} = 2$	gerade → letzte Stelle „I“
	$\text{I I} \Lambda \text{I}$		

Zur Zeilennummer 14 gehört damit der Rhythmus I I Λ I, wie die Tabelle oben bestätigt.

Beispiel: 5 Silben/Bits

	Rhythmus	Zeilennummer	Gerade/ungerade
Zeile	r_{21}	21	ungerade → letzte Stelle „Λ“
	$r'_{21} \Lambda$	$\frac{21+1}{2} = 11$	ungerade → vorletzte Stelle „Λ“
	$r''_{21} \Lambda \Lambda$	$\frac{11+1}{2} = 6$	gerade → drittletzte Stelle „I“
	$r'''_{21} \Lambda \Lambda \text{I}$	$\frac{6}{2} = 3$	ungerade → viertletzte Stelle „Λ“
	$r''''_{21} \Lambda \Lambda \text{I} \Lambda$	$\frac{3+1}{2} = 2$	gerade → letzte Stelle „I“
	$\Lambda \Lambda \text{I} \Lambda \text{I}$		

¹⁵[5]

Die Richtigkeit dieses Rhythmus' zu überprüfen, bleibt zunächst den Leser:innen überlassen. Bis hierher ist es nur durch Darstellung der kompletten Liste aller Kombinationen von 5 Silben möglich.

Alternative

Für das alternative Vorgehen mit einer Zeilennummerierung beginnend bei 0, erhält man folgenden Algorithmus:

Entfernen wir die letzte Silbe des Rhythmus' r , erhalten wir einen neuen Rhythmus r' , für den gilt:

$$\text{Zeilennummer von } r' = \begin{cases} \frac{\text{Zeilennummer von } r}{2} & \text{wenn } r \text{ gerade ist} \\ \frac{(\text{Zeilennummer von } r)-1}{2} & \text{wenn } r \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Die Beispielrechnungen sehen dann wie folgt aus:

Beispiel: 4 Silben/Bits

	Rhythmus	Zeilennummer	Gerade/ungerade
Zeile	r_{14}	14	gerade → letzte Stelle „Λ“
	$r'_{14}\Lambda$	$\frac{14}{2} = 7$	ungerade → vorletzte Stelle „I“
	$r''_{14}I\Lambda$	$\frac{7-1}{2} = 3$	ungerade → letzte Stelle „I“
	$r'''_{14}II\Lambda$	$\frac{3-1}{2} = 1$	ungerade → letzte Stelle „I“
	$IIII\Lambda$		

Beginnt man die Zeilenzählung bei $\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda = 0$ gehört damit zur Zeilennummer 14 der Rhythmus $IIII\Lambda$, das entspricht in unserer Zählung oben Zeile Nummer 15.

Beispiel: 5 Silben/Bits

	Rhythmus	Zeilennummer	Gerade/ungerade
Zeile	r_{21}	21	ungerade → letzte Stelle „I“
	$r'_{21}I$	$\frac{21-1}{2} = 10$	gerade → vorletzte Stelle „Λ“
	$r''_{21}\Lambda I$	$\frac{10}{2} = 5$	ungerade → drittletzte Stelle „Λ“
	$r'''_{21}II\Lambda I$	$\frac{5-1}{2} = 2$	gerade → viertletzte Stelle „Λ“
	$r''''_{21}\Lambda I\Lambda I$	$\frac{2}{2} = 1$	ungerade → letzte Stelle „I“
	$I\Lambda I\Lambda I$		

Vierte Fragestellung

Wie finde ich die Zeilennummer zu einem beliebigen bekannten Rhythmus?

Pingala nannte das Sutra, in dem er diese Problemstellung untersuchte, „*Uddistam*“, was übersetzt „angegeben“ bedeutet – die Frage ist also, wenn der Rhythmus angegeben ist, in welcher Zeile meiner Liste finde ich ihn? Bhatt übernahm diese Bezeichnung, verwendete aber einen anderen Algorithmus als Pingala. Beide Versionen werden hier vorgestellt. Sucht man zu einem angegebenen Rhythmus die zugehörige Zeilennummer, entspricht das einer Umrechnung von einer Binärzahl in eine Dezimalzahl.

Wie geht Pingala vor? Im Prinzip dreht er den vorhergehenden Algorithmus um. Statt einer Division durch Zwei bei jedem Rekonstruktionsschritt einer „verlorenen“ Silbe, muss also nun eine Multiplikation mit Zwei stattfinden, um den angegebenen Silben ihre Dezimalzahl zuzuordnen.

Pingala schreibt: „In umgekehrter Reihenfolge, beginnend mit dem ersten *laghu* multipliziere mit 2. Subtrahiere 1 (nach der Multiplikation mit 2), wenn die Silbe *guru* ist.“ Etwas verständlicher formuliert bedeutet es:

Beginne mit der ersten *kurzen* (I) Silbe von links. Multipliziere mit 2.

Wenn die nächste Silbe (links) *kurz* ist, multipliziere wieder mit 2, sonst multipliziere mit 2 und subtrahiere 1.

Auch dieser Algorithmus bezieht sich wieder auf die bei 1 beginnende Zeilennummerierung. Die Alternative wird weiter unten kurz dargestellt.

Da unsere Zeilennummerierung bei 1 beginnt, ist der erste Faktor immer 1.

Beispiele:

Wie lautet die Zeilennummer zum Rhythmus $\Lambda \Lambda I \Lambda$?

	Rechnung	Kommentar
$\Lambda \Lambda I \Lambda \quad \Lambda \Lambda$	1	Die beiden ersten Silben von links sind lang (Λ), also ist der Faktor 1
$\Lambda \Lambda I$	$2 \cdot 1 = 2$	Nun kommt die erste kurze Silbe (I) von links. Es wird mit 2 multipliziert.

$$\Lambda \Lambda I \Lambda \quad 2 \cdot 2 - 1 = 3 \quad \text{Die nächste Silbe ist lang } (\Lambda).$$

Es wird also das vorhergehende Ergebnis

mit 2 multipliziert und 1 subtrahiert.

$\Lambda \Lambda I \Lambda$ hat also die Zeilennummer 3.

Wie lautet die Zeilennummer zum Rhythmus $I \Lambda I \Lambda \Lambda$?

	Rechnung	Kommentar
$I \Lambda I \Lambda \Lambda$ I	$1 \cdot 2 = 2$	Die erste Silbe von links ist kurz (I). Wir „multiplizieren mit 2“ bzw. schreiben den Faktor 2.
$I \Lambda$	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	Die nächste Silbe ist lang (Λ). Es wird also das vorhergehende Ergebnis mit 2 multipliziert und 1 subtrahiert.
$I \Lambda I$	$2 \cdot 3 = 6$	Die nächste Silbe ist kurz (I). Es wird also das vorhergehende Ergebnis mit 2 multipliziert.
$I \Lambda I \Lambda$	$2 \cdot 6 - 1 = 11$	Die nächste Silbe ist lang (Λ). Es wird also das vorhergehende Ergebnis mit 2 multipliziert und 1 subtrahiert.
$I \Lambda I \Lambda \Lambda$	$2 \cdot 11 - 1 = 21$	Die nächste Silbe ist lang (Λ). Es wird also das vorhergehende Ergebnis mit 2 multipliziert und 1 subtrahiert.
$I \Lambda I \Lambda \Lambda$	hat also die Zeilennummer 21.	

Alternative

Beginnt die Zeilennummerierung bei 0, muss Pingalas Algorithmus angepasst werden. Er lautet dann wie folgt:

Beginne mit der ersten kurzen (I) Silbe von links. Multipliziere mit 2 und addiere 1.

Wenn die nächste Silbe (links) kurz ist, multipliziere wieder mit 2 und addiere 1, sonst multipliziere mit 2.

Da die Zeilennummerierung nun bei 0 beginnt, ist der erste Faktor immer 0.

Wie lautet die Zeilennummer zum Rhythmus $\Lambda \Lambda I \Lambda$?

	Rechnung	Kommentar
$\Lambda \Lambda I \Lambda \quad \Lambda \Lambda$	0	Die beiden ersten Silben von links sind lang (Λ), also ist der Faktor 0
$\Lambda \Lambda I$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	Nun kommt die erste kurze Silbe (I) von links. Es wird mit 2 multipliziert und 1 addiert.
$\Lambda \Lambda I \Lambda$	$2 \cdot 1 = 2$	Die nächste Silbe ist lang (Λ). Es wird also das vorhergehende Ergebnis mit 2 multipliziert.
$\Lambda \Lambda I \Lambda$	hat also die Zeilennummer 2.	

Wie lautet die Zeilennummer zum Rhythmus $I \Lambda I \Lambda \Lambda$?

	Rechnung	Kommentar
$I \Lambda I \Lambda \Lambda \quad I$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	Die erste Silbe von links ist kurz (I). Wir multiplizieren die Ausgangszahl „0“ mit 2 und addieren 1.
$I \Lambda$	$2 \cdot 1 = 2$	Die nächste Silbe ist lang (Λ). Es wird also das vorhergehende Ergebnis mit 2 multipliziert.
$I \Lambda I$	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	Die nächste Silbe ist kurz (I). Es wird also das vorhergehende Ergebnis mit 2 multipliziert und 1 addiert.

$$I \Lambda I \Lambda \quad 2 \cdot 5 = 10$$

Die nächste Silbe ist lang (Λ).

Es wird also das vorhergehende Ergebnis

mit 2 multipliziert.

$$I \Lambda I \Lambda \Lambda \quad 2 \cdot 10 = 20$$

Die nächste Silbe ist lang (Λ).

Es wird also das vorhergehende Ergebnis

mit 2 multipliziert.

$I \Lambda I \Lambda \Lambda$ hat also die Zeilennummer 20.

Bhatts Algorithmus unterscheidet sich wiederum grundlegend von Pingalas und ähnelt stark unserer Art, Binärzahlen mithilfe der Zweierpotenzen im Stellenwertsystem in Dezimalzahlen umzurechnen.

Zunächst einmal machte Bhatt folgende Beobachtung:

Für einen Rhythmus aus n Silben gilt, beginnt er mit lang (Λ), so hat er dieselbe Zeilennummer, wie der Rhythmus ohne diesen Beginn (also aus $n - 1$ Silben). Beginnt der Rhythmus hingegen mit kurz (I), so hat er dieselbe Zeilennummer wie der Rhythmus ohne diesen Beginn $+2^{n-1}$.

	Zeilen- nummer	Rhythmus beginnt mit lang (Λ)		Zeilen- nummer	Rhythmus beginnt mit kurz (I)	
1 Silbe	1	Λ		2	I	
2 Silben	1	$\Lambda \Lambda$	Ohne das erste Λ	3	I Λ	gleiche Zeilennummern wie 1 Silbe $+2^1$
	2	ΛI	gleiche Zeilennummern wie 1 Silbe	4	I I	

3 Silben	1	$\Lambda \Lambda \Lambda$	Ohne das erste Λ	5	$I \Lambda \Lambda$	gleiche
	2	$\Lambda \Lambda I$	gleiche	6	$I \Lambda I$	Zeilennummern
	3	$\Lambda I \Lambda$	Zeilennummern	7	$I I \Lambda$	wie 2 Silben $+2^2$
	4	$\Lambda I I$	wie 2 Silben	8	$I I I$	
4 Silben	1	$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$	Ohne das erste Λ	9	$I \Lambda \Lambda \Lambda$	gleiche
	2	$\Lambda \Lambda \Lambda I$	gleiche	10	$I \Lambda \Lambda I$	Zeilennummern
	3	$\Lambda \Lambda I \Lambda$	Zeilennummern	11	$I \Lambda I \Lambda$	wie 3 Silben $+2^3$
	4	$\Lambda \Lambda I I$	wie 3 Silben	12	$I \Lambda I I$	
	5	$\Lambda I \Lambda \Lambda$		13	$I I \Lambda \Lambda$	
	6	$\Lambda I \Lambda I$		14	$I I \Lambda I$	
	7	$\Lambda I I \Lambda$		15	$I I I \Lambda$	
	8	$\Lambda I I I$		16	$I I I I$	

Bei einem 2-silbigen Rhythmus beginnen also *die* Rhythmen mit I, deren Zeilennummern um $2^1 = 2$ höher sind als diejenigen, die mit Λ beginnen aber dieselbe Endung haben.

Beginnt ein 3-silbiger Rhythmus mit I, so ist seine Zeilennummer um $2^2 = 4$ höher als derselbe Rhythmus, der auf Λ beginnt. Beispiel: die Zeilennummer von $I \Lambda I$ ist 6, die Zeilennummer von $\Lambda \Lambda I$ ist 2.

Bei einem beliebigen n -silbigen Rhythmus bedeutet das also, dass man die Silben von hinten nach vorne untersuchen muss. Sind alle Silben Λ ist die Zeilennummer 1.

Ist die erste Silbe von hinten (rechts) I, ist die Zeilennummer um $1 = 2^0$ höher, als wenn sie Λ ist.

Ist die zweite Silbe von rechts I, ist die Zeilennummer um $2^1 = 2$ höher gegenüber demselben Rhythmus aber mit einem Λ an dieser Stelle. (Bsp: $I \Lambda I \Lambda$ hat die Zeilennummer 11 und ist um 2 höher als $I \Lambda \Lambda \Lambda$ mit der Zeilennummer 9.)

Für die dritte Silbe von rechts gilt, ist sie I, dann ist die Zeilennummer um $2^2 = 4$ höher gegenüber demselben Rhythmus aber mit einem Λ an dieser Stelle.

Daraus folgt, dass Bhatt jeder Stelle im Rhythmus einen Wert zuordnet:

Aufsteigend von rechts nach links

						für „alle Λ “
32	16	8	4	2	1	+1
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
Rhythmus						

Dieser Wert wird dann gezählt, wenn im Rhythmus eine kurze Silbe (I) steht.

Die Zeilennummer des Rhythmus' ist dann um 1 höher als die Summe der Werte der Plätze der *kurzen* Silben (I). Das liegt daran, dass die erste Zeile jeweils nur aus langen Silben (Λ) besteht, gezählt werden aber die kurzen Silben (I).

Beispiel:

Rhythmus	I		Λ		I		Λ		Λ	
Stellenwert	2^4		2^3		2^2		2^1		2^0	
Zeilennummer	16				+4					+1 = 21

Interessant ist, dass auch wenn diese Rechnung etwas komplexer als die für uns gewohnte Umrechnung der Binärzahlen erscheint, der dahinterstehende Überlegungsprozess sich auch für 9. Klässler nachvollziehbar und in einem Unterrichtsgespräch als gemeinsam entwickelbar darstellt, da er auf einer genauen Beobachtung und Analyse der erstellten Listen beruht.

Eine weitere interessante Beobachtung ist, dass Bhatt, deutlicher als Pingala, auf Pingalas Algorithmus zur Erstellung der Liste zurückgreift. Denn die Eigenart, die er nutzt, ist ja gerade, dass jeweils die erste Hälfte einer neuen Liste mit einem „ Λ “ und die zweite Hälfte mit einem „I“ beginnt, was Pingalas Algorithmus zur Erstellung der Liste („Mische mit sich selbst“) entspricht. Aus Bhatts eigenem Algorithmus kann man sich diese Eigenart nur durch Beobachtung der erstellten Liste erschließen.

Alternative

Hat man sich für die Zeilennummerierung beginnend bei 0 entschieden, so entfällt das „+1“ und man erhält sofort die gewünschte Dezimalzahl.

Hinführung zur Zeilennummerierung beginnend bei 0

Hat man, wie die „alten Inder“ die Zeilennummerierung zunächst bei 1 begonnen, so bietet es sich an dieser Stelle an, diese in einem Begriffsteil zu hinterfragen. Bhatts Stellenwertsystem ermöglicht ja die Rechnung in beide Richtungen: die Rekonstruktion eines Musters zu einer gegebenen Dezimalzahl, wie auch das Finden einer Dezimalzahl zu einem gegebenen Muster. Die Klarheit der Darstellung besticht durch ihre Einfachheit, was 9. Klässler:innen sehr entgegenkommt. Man muss sich keine Algorithmen merken und diese ausführen, sondern man kann direkt die Zweierpotenzen aufschreiben und sie dem Rhythmus entsprechend zählen. Lässt man die „lästige“ +1 am Ende weg, reduziert sich Arbeit sogar noch weiter und der Rhythmus in der ersten Zeile, der ausschließlich aus Λ 's besteht, hat immer die Dezimalzahl 0. Eine mögliche Einstiegsfrage in eine solche Diskussion im Begriffsteil könnte sein: „Inwiefern eignet sich Bhatts Stellenwertsystem auch zur Rekonstruktion eines Musters?“ und später „Welche Vorschläge habt ihr, um Bhatts Stellenwertsystem noch weiter zu vereinfachen?“

Damit haben wir dann die Binärzahlen erarbeitet und können auch an dieser Stelle die Schreibweise mit 0 und 1 sinnvoll einführen. In den Übstunden oder im Informatikunterricht könnten diese nun aufgegriffen werden und das Rechnen mit Binärzahlen geübt werden. Auch können ggf. weitere Zahlssysteme betrachtet werden.

Es ist insgesamt nicht zwingend notwendig, die Zweierpotenzen als 2^n zu verwenden. Da die Potenzrechnung und insbesondere die Einführung von $a^0 = 1$ erst in der 10. Klasse stattfinden, ist die Verwendung in der 9. Klasse evtl. problematisch. Man kann hier aber gut mit den Potenzwerten, also 1, 2, 4, 8, 16 usw. arbeiten, die sich ja bereits bei der Zweiten Fragestellung ergeben.

Fünfte Fragestellung

Wie viele Rhythmen haben eine bestimmte Anzahl langer (oder kurzer) Silben?

Diese Fragestellung fragt nach den sogenannten Kombinationen oder einer „Auswahl“. Pingala nannte die Sutras zu dieser Problemstellung „*Lagakriya*“¹⁶, „Kurz-Lang-Übung“. Sind bspw. 5 Silben gegeben, von denen 3 lang und 2 kurz sind ($\Lambda\Lambda\Lambda II$), ist eine typische kombinatorische Frage, auf wie viele verschiedene Arten man diese anordnen kann oder auf wie viele Arten man z.B. 2 aus 5 auswählen kann.

¹⁶[13]

Bleiben wir bei unseren Versen, wäre also die Frage, wie viele mögliche fünf-silbige Verse gibt es mit drei langen und zwei kurzen Silben.

Notiert man alle 32 möglichen Kombinationen von 5 Silben nach diesem Gesichtspunkt geordnet, erhält man folgendes Bild:

ΛΛΛΛΛ	ΛΛΛΛΙ	ΛΛΛΙΙ	ΛΛΙΙΙ	ΛΙΙΙΙ	ΙΙΙΙΙ	
	ΛΛΛΙΑ	ΛΛΙΑΙ	ΛΙΑΙΙ	ΙΑΙΙΙ		
	ΛΛΙΑΛ	ΛΛΙΙΑ	ΛΙΙΑΙ	ΙΙΑΙΙ		
	ΛΙΑΛΛ	ΛΙΑΛΙ	ΛΙΙΑΛ	ΙΙΑΙΛ		
	ΙΑΛΛΛ	ΙΑΛΙΑ	ΙΑΛΙΙ	ΙΙΑΙΛ		
		ΛΙΙΑΛ	ΙΑΙΑΙ			
		ΙΑΛΛΙ	ΙΑΙΙΑ			
		ΙΑΛΙΑ	ΙΙΑΛΙ			
		ΙΑΙΑΛ	ΙΙΑΙΑ			
		ΙΙΑΛΛ	ΙΙΑΛΛ			
1	5	10	10	5	1	Summe: 32
alle Λ	4 Λ, 1 Ι	3 Λ, 2 Ι	2 Λ, 3 Ι	1 Λ, 4 Ι	alle Ι	

Man erkennt: je unausgeglichener die Anzahl der langen und kurzen Silben ist, desto geringer ist die Anzahl der Möglichkeiten. Darüber hinaus ist erkennbar, dass ich z.B. bei vier langen und einer kurzen Silbe zum selben Ergebnis komme, wie bei einer langen und vier kurzen Silben. Die Verteilung ist also symmetrisch und kombinatorisch ausgedrückt erhalte ich dieselbe Anzahl an Möglichkeiten egal, ob ich „vier aus fünf“ oder „eins aus fünf“ auswähle. Die Komplemente liefern also immer dieselbe Anzahl an Möglichkeiten. Auffällig ist auch das geordnete Erscheinungsbild der einzelnen Blöcke. Beim Block „4 Λ, 1 Ι“ wandert z.B. das „Ι“ einmal von rechts oben nach links unten durch den Block.

Diese und weitere Beobachtungen und deren Verbalisierung haben wieder „urteilenden“ Charakter, d.h. wir sammeln Beobachtungen, erkannte Muster und andere Auffälligkeiten, ohne diese zunächst zu erklären. Dabei ergeben sich oft bereits Fragen, die eine hervorragende Vorlage für eine erklärende Vertiefung im Begriffsteil am nächsten Tag sind.

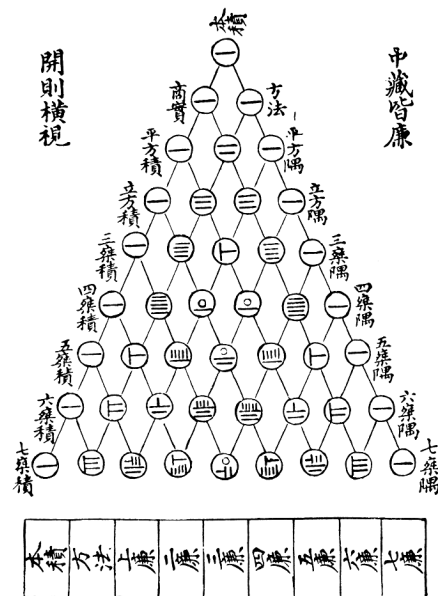
Notieren wir nun die Anzahl der Möglichkeiten, die wir erhalten, wenn wir n -silbige

Verse mit k lange (oder kurzen) Silben anordnen, erhalten wir das Folgende:

	Anzahl der Silben	Summe
1	0 Silben	$2^0 = 1$
1 1	1 Silbe	$2^1 = 2$
1Λ 1I		
1 2 1	2 Silben	$2^2 = 4$
2Λ 1Λ, 1I 2I		
1 3 3 1	3 Silben	$2^3 = 8$
3Λ 2Λ, 1I 1Λ, 2I 3I		
1 4 6 4 1	4 Silben	$2^4 = 16$
4Λ 3Λ, 1I 2Λ, 2I 1Λ, 3I 4I		
1 5 10 10 5 1	5 Silben	$2^5 = 32$
5Λ 4Λ, 1I 3Λ, 2I 2Λ, 3I 1Λ, 4I 5I		
1 6 15 20 15 6 1	6 Silben	$2^6 = 64$
6Λ 5Λ, 1I 4Λ, 2I 3Λ, 3I 2Λ, 4I 1Λ, 5I 6I		
1 7 21 35 35 21 7 1	7 Silben	$2^7 = 128$
7Λ 6Λ, 1I 5Λ, 2I 4Λ, 3I 3Λ, 4I 2Λ, 5I 1Λ, 6I 7I		
1 8 28 56 70 56 28 8 1	8 Silben	$2^8 = 256$
8Λ 7Λ, 1I 6Λ, 2I 5Λ, 3I 4Λ, 4I 3Λ, 5I 2Λ, 6I 1Λ, 7I 8I		

Schreiben wir die Möglichkeiten systematisch auf, entsteht das bekannte „Pascal’sche Dreieck“, benannt nach Blaise Pascal (1623 – 1662), nur dass es vielleicht bereits seit Pingala, also fast 2000 Jahre früher bekannt war. Pingala oder seine inhaltlichen Nachfolger gaben dieser Zahlenfigur den poetischen Namen „Meruprastāra“, der *wachsende Juwelenberg*. Es wird in der einschlägigen Literatur immer wieder diskutiert und sich in Vermutungen ergangen, ob das Meruprastara tatsächlich auf Pingala selbst zurückzuführen ist. Fakt ist, dass er im *Chandahshasastra* einen Algorithmus zur Berechnung von Binomialkoeffizienten angegeben hat, woraus in

古 法 七 乘 方 圖



Yang-Hui-Dreieck (pascalsches
Dreieck) wie es in einem Buch von Zhu
Shijie aus dem Jahre 1303 beschrieben
ist.

späteren Jahrhunderten gefolgert wurde, dass das Meruprastara auf ihn zurückgeht¹⁷. Auch der chinesische Mathematiker Yang Hui (13. Jhd.) kannte das Zahlendreieck noch vor Pascal, in China bekannt als Yang Hui-Dreieck.

Mit den 9. Klässler:innen kann die Systematik des Meruprastara durch eine Arbeitsteilung im Schluss-Teil erarbeitet werden, indem z.B. 2er oder 3er Teams alle möglichen Kombinationen für eine bis (mindestens) 6 oder 7 Silben, wie oben für 5 Silben gezeigt, aufschreiben und sortieren. Dann werden gemeinsam die Zahlen gesammelt und durch die Lehrperson impulsiv in die Dreiecksform gebracht. Im Urteilsteil werden Beobachtungen am Dreieck gesammelt, von denen es eine große Anzahl gibt. Hier eine kleine Auswahl:

- Außen und an der Spitze stehen ausschließlich Einsen.
- In der zweiten „Schicht“ folgen die natürlichen Zahlen, dann die Dreiecks- und die Tetraederzahlen (letzteres fällt den Schüler:innen vermutlich nicht

¹⁷[13]

direkt auf, es kann aber in vertiefenden Aufgabenstellungen aufgegriffen und auf das Dreieck zurückgeführt werden).

- Die Zahlen jeder Zeile ergeben sich als Summe der beiden darüberstehenden Zahlen.
- Das Dreieck ist spiegelt sich an der Mittelsenkrechten.
- Bei geradzahligen Zeilen steht ein „Zwillings-Zahlenpaar“ in der Mitte
- Bei ungeradzahligen Zeilen steht eine einzelne Zahl.
- Alle Λ und I in einer Zeile addieren sich zur Anzahl der Silben/Zeilenummer (wenn die 1 an der Spitze, die 0. Zeile ist)
- Die Λ verringern sich von links nach rechts um 1, die I erhöhen sich.
- Λ und I sind vertauschbar. Es gibt z.B. 56 Möglichkeiten, 8 Silben mit 5 Λ und 3 I zu bilden aber auch mit 3 Λ und 5 I .
- In einer Diagonalen steht von links nach rechts immer dieselbe Anzahl von Λ und von rechts nach links immer dieselbe Anzahl von I .

Usw.

Man wird sicherlich auch auf die Verwandtschaft mit den Binomischen Formeln eingehen und üben, mit Hilfe einer beliebigen Zeile die entsprechende Binomische Formel aufzustellen.

Auch die Betrachtung der Muster, die man erhält, wenn man alle Vielfachen einer Zahl im Meruprastara einfärbt, lohnt sich.

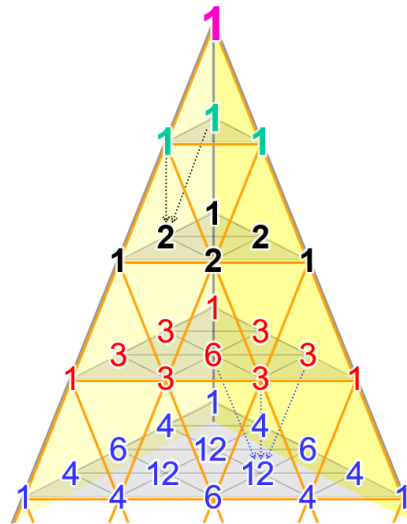
Eine vertiefende Möglichkeit stärkere Schüler:innen herauszufordern, ist die Frage, welche Figur sich ergibt, wenn man drei verschiedene Silbenarten, z.B. Λ , I und $\bullet$ verwendet.

Dies sei hier kurz angedeutet:

Man erhält dann einen wirklichen „wachsenden Juwelenberg“, nämlich eine dreidimensionale Zahlenpyramide, die prinzipiell nach derselben Systematik funktioniert, wie das Meruprastara. Eine vier- und mehrdimensionale Figur bei vier und mehr verschiedenen Silben ist dann nur noch denk- aber nicht mehr vorstellbar. Schon bei der dreidimensionalen Version kommen wir auf dem Papier an die Grenze, sie überschaubar und verständlich darzustellen.

Nun kann auch die Schreibweise der Zahlen im Meruprastara als Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ „n über k“ oder „wähle k aus n“ eingeführt und im Meruprastara ergänzt

	Anzahl der Silben
1	0
$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \bullet 1 \\ 1 \quad 1 \end{array}$	1
$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \bullet 2 \\ 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 2 \Lambda \quad 1 \Lambda, II \quad 2 I \end{array}$	2
$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \bullet 3 \\ 1 \Lambda, 2 \bullet 1 I, 2 \bullet 3 \\ 3 \quad 6 \quad 3 \\ 2 \Lambda, 1 \bullet 1 \Lambda, II, 1 \bullet 2 I, 1 \bullet 1 \\ 3 \Lambda \quad 2 \Lambda, II \quad 1 \Lambda, 2 I \quad 3 I \end{array}$	3



Der dreidimensionale wachsende Juwelenberg oder die Pascal'sche Pyramide
<https://commons.wikimedia.org>, 8.9.2025

werden.

Wie aber berechnen sich die einzelnen Zahlen, wenn man mal nicht das Dreieck zur Hand hat?

Da dies einen Ausschnitt aus einer möglichen Kombinatorik-Epoche darstellt, ist davon auszugehen, dass zu Beginn der Epoche Permutationen und Permutationen mit Wiederholung behandelt wurden, ebenso wie deren Berechnung mit $n!$ und $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$ mit $k_1, k_2, \dots, k_m$: Anzahl der Wiederholungen einzelner Elemente.

Es kann im Begriffsteil dann gemeinsam herausgearbeitet werden, dass es sich um eine recht einfache Permutation mit Wiederholung handelt, die nur zwei verschiedene Elemente besitzt, die sich entsprechend oft wiederholen. Dann erhält man die bekannte Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Eine Frage, die sich für den Begriffsteil am nächsten Tag anbietet, ist bspw. „Wie können wir anhand unserer bisherigen Kenntnisse erklären, dass tatsächlich eine Zahl im Meruprastara immer die Summe der beiden darüberstehenden Zahlen ist?“

In der Formelschreibweise ausgedrückt: Wie kann ich beweisen, dass die im Folgenden so genannte Additionsformel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ gilt?

Wählen wir zunächst ein Beispiel:

$\binom{6}{2} =$ $15 =$ $4 \Lambda, 2 I =$ von 6 Silben sind 4 lang und 2 kurz 15 Möglichkeiten	$\binom{5}{1} =$ $5 =$ $4 \Lambda, 1 I =$ von 5 Silben sind 4 lang und 1 kurz 5 Möglichkeiten	$+\binom{5}{2} =$ $+10 =$ $+3 \Lambda, 2 I =$ von 5 Silben sind 3 lang und 2 kurz 10 Möglichkeiten
	Lässt man im zweiten Block der $\binom{6}{2}$ die erste Silbe I weg, erhält man:	Lässt man im ersten Block der $\binom{6}{2}$ die erste Silbe Λ weg, erhält man:
$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I I$ $I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$ $\Lambda \Lambda \Lambda I \Lambda I$ $I \Lambda \Lambda \Lambda I \Lambda$ $\Lambda \Lambda \Lambda I I \Lambda$ $I \Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda$ $\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda I$ $I \Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda$ $\Lambda \Lambda I \Lambda I \Lambda$ $I I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$ $\Lambda \Lambda I I \Lambda \Lambda$ $\Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda I$ $\Lambda I \Lambda \Lambda I \Lambda$ $\Lambda I \Lambda I \Lambda \Lambda$ $\Lambda I I \Lambda \Lambda \Lambda$	$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$ $\Lambda \Lambda \Lambda I \Lambda$ $\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda$ $\Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda$ $I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$	$\Lambda \Lambda \Lambda I I$ $\Lambda \Lambda I \Lambda I$ $\Lambda \Lambda I I \Lambda$ $\Lambda I \Lambda \Lambda I$ $\Lambda I \Lambda I \Lambda$ $\Lambda I I \Lambda \Lambda$ $I \Lambda \Lambda \Lambda I$ $I \Lambda \Lambda I \Lambda$ $I \Lambda I \Lambda \Lambda$ $I I \Lambda \Lambda \Lambda$

Die Erklärung ist also ähnlich – wie bereits der Beweis zur ersten Fragestellung – „Jeder Vers [beginnt] entweder [mit] *guru* (lang) oder *laghu* (kurz).“

Die Anzahl aller Möglichkeiten einer bestimmten Kombination von langen und kurzen Silben entspricht der Summe aus den Versen, die mit lang (Λ) beginnen und denen, die mit kurz (I) beginnen. Lässt man die erste Silbe weg, reduziert sich die Gesamtzahl der Silben auf $n - 1$, von denen ein Teil eine kurze Silbe weniger hat und ein Teil eine lange Silbe weniger hat. Ist k die Anzahl der kurzen Silben und $(n - k)$ die Anzahl der langen Silben in unserer Ausgangskombination mit n Silben, dann hat ein Teil also nach Weglassen der letzten Silbe $k - 1$ kurze Silben und $n - k$ lange Silben und ein Teil hat k kurze Silben und $n - k - 1$ lange Silben.

In unserem Beispiel lassen wir von den 6 Silben die erste Silbe weg, es werden also 5 Silben.

Von den 6 ($= n$) Silben sind im Beispiel 2 ($= k$) kurz und 4 ($= n - k$) lang. Lasse ich eine kurze Silbe weg, betrachte ich die Kombinationen aus 5 ($= n - 1$) Silben, von denen 1 ($= k - 1$) kurz ist und 4 ($= n - k$) lang sind. Lasse ich eine lange Silbe weg, betrachte ich die Kombinationen aus 5 ($= n - 1$) Silben, von denen 2 ($= k$) kurz sind und 3 ($= n - k - 1$) lang sind.

Es ist zu betonen, dass dies ein stark Beispiel gebundener Nachweis ist! Ein mathematisch korrekter Beweis müsste per Induktion geführt werden, hat dann aber nichts mehr mit unserer „poetischen“ Fragestellung zu tun.

Man kann – mit einer sehr starken Klasse – ggf. zeigen, dass die Gleichung $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ gilt:

Wir beginnen rechts und zeigen, dass die linke Seite herauskommt

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} && \text{Vereinfachen} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} && \text{Zusammenfassen} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} && \text{Ziel: Nenner gleichnamig} \\
 & && \text{machen, dazu zunächst} \\
 & && \text{die Nenner umschreiben} \\
 &= \frac{(n-1)!k}{(k-1)!k(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-1-k)!(n-k)} && \text{erweitern} \\
 &= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} && \text{Zähler zusammenfassen} \\
 &= \frac{(n-1)!(k+n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

Dass $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ und $\binom{n}{n} = 1$ ist, kann man am Meruprastara ablesen, es sollte aber – mindestens zur Übung der neuen Schreibweise – noch einmal festgehalten werden, ebenso wie die Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Zur Additionsformel kann man nun auch Aufgaben zum Manhattan-Problem (Wege-Problem) bearbeiten und auch anhand dieser Fragestellung die Additionsformel vertiefend klären. Hier kann man sehr anschaulich anhand der Wege, die z.B. nach

Osten und Süden gehen, nachvollziehen, dass die Anzahl der Wege, die zu einem Knotenpunkt (oder einer Kreuzung) führen, sich immer aus der Summe der Wege ergibt, die zu den beiden vorhergehenden Knoten (oder Kreuzungen) führten.

Eine schöne Variante des Manhattan-Problems ist die folgende:

Auf wie viele Arten kann man das Wort MERUPRASTARA lesen?

	1	2	3	4	5	6	7								
M	–	E	–	R	–	U	–	P	–	R	–	A	–	S	
															8 1
E	–	R	–	U	–	P	–	R	–	A	–	S	–	T	
															9 2
R	–	U	–	P	–	R	–	A	–	S	–	T	–	A	
															10 3
U	–	P	–	R	–	A	–	S	–	T	–	A	–	R	
															11 4
P	–	R	–	A	–	S	–	T	–	A	–	R	–	A	

Wichtig ist zu bemerken, dass die Buchstaben auf den Knotenpunkten stehen, zu zählen sind aber die Wege, also die Lücken zwischen den Buchstaben.

Hier sind es also $\binom{11}{4} = \binom{11}{7}$ Möglichkeiten, da die Gesamtzahl der Lücken bei einer beliebigen Lesart 11 ist und es vier senkrechte bzw. 7 waagerechte Wege gibt.

Hier kann man auch die Additionsformel noch einmal nachvollziehen: Wählen wir bspw. den vierten Buchstaben, das „U“, so kann ich zum „U“ in der zweiten Zeile auf drei Wegen kommen: *rechts-rechts-runter* oder *rechts-runter-rechts* oder *runter-rechts-rechts*. Das „U“ hat zwei verschiedene Vorgänger: entweder das „R“ in der ersten Zeile, zu dem ich auf genau einem Weg komme (*rechts-rechts*) oder das „R“ in der zweiten Zeile, zu dem ich auf zwei Wegen kommen (*rechts-runter* oder *runter-rechts*). Zum „U“ in der zweiten Zeile komme ich also auf $1 + 2$ Wegen, da ich vorher immer zu einem der beiden genannten „R“ gehen muss, wie es die Additionsformel sagt.

Interessant ist, dass die Additionsformel anhand dieser Beispiele einen lokalen und geometrischen Charakter hat – der Weg teilt sich an einem Knoten bzw. Wege laufen an einem Knoten zusammen. Später wird noch eine Multiplikationsformel

erarbeitet, die dann einen globalen und kombinatorischen Charakter hat.

Will man sich und den Schüler:innen eine Poetik-Pause gönnen, dann kann man die Kombinationen auch wunderbar über die Frage einführen, wie viele Dreiecke (Vierecke, Fünfecke, Sechsecke) es im Sechseck gibt. Dazu findet man eine ausführliche Darstellung von Klaus Labudde in den „Mathematikthemen für die 9. Klasse“, edition waldorf.

Auch ein Vergleich beider Herangehensweisen – über die Poetik und über die k -Ecke im n -Eck – ist denkbar und empfehlenswert. Wählt man eine Herangehensweise zur Einführung, dann kann man die andere als vertiefende Erweiterung verwenden.

Sechste Fragestellung

Kann man, ohne das gesamte Meruprastara-Dreieck aufzuschreiben, eine beliebige Zeile angeben?

Auch dieser Fragestellungen haben sich die indischen Poetik-Mathematiker gewidmet und sie haben tatsächlich einen Algorithmus dafür gefunden, der hier kurz dargestellt werden soll, da er meist unbekannt ist:

Soll die n -te Zeile gefunden werden (Erinnerung: die „1“ an der Spitze ist nach unserer Lesart die 0te Zeile), schreiben wir die Zahlen $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$. Darunter, mit einer Zeile Abstand schreiben wir dieselben Zahlen in aufsteigender Richtung. Für $n = 10$ sieht es dann so aus:

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

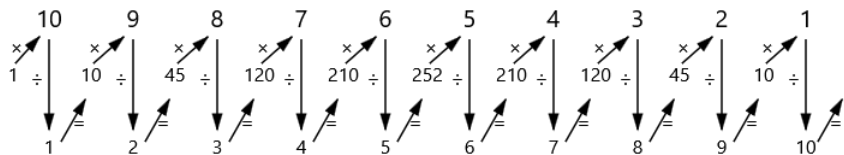
Wir bemerken, dass jeweils die Summe der übereinander stehenden Zahlen $n+1$, hier also 11, ergibt. Die Zahlen in der unteren Zeile entsprechen den k im $\binom{n}{k}$, wobei die 0 weggelassen wurde.

Links beginnend schreiben wir nun etwas nach vorne versetzt in die Mitte die „1“, mit der jede Zeile des Meruprastara beginnt. $1 = \binom{n}{0}$ – hier taucht die „0“ also verklausuliert auf.

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dann folgt der Algorithmus:

Multipliziere die Zahl in der mittleren Zeile mit der rechts schräg darüber und dividiere durch die senkrecht darunter stehende Zahl. Du erhältst die neue Zahl deiner gesuchten Zeile im Meruprastara:



Damit lautet die 10te Zeile des Meruprastara: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Die 9. Klässler:innen nehmen diese Rechentechnik möglicherweise einfach zur Kenntnis, erfreuen sich der Einfachheit und staunen darüber. Man kann sich diese Rechentechnik aber ähnlich wie den Aufbau des Meruprastara plausibel machen bzw. ihre Richtigkeit nachweisen.

Betrachtet man die Rechnung genauer stellt man fest, dass immer die bekannte Zahl $\binom{n}{k}$ mit $n - k$ multipliziert wird und durch das neue k , also $k + 1$ dividiert wird, also gilt $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$. Diese Formel wird im Folgenden die „Multiplikationsformel“ genannt.

Erläuterung:

- $\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient, den wir schon errechnet haben (oder 1, wenn wir beginnen)
- $\binom{n}{k+1}$ ist der Eintrag, den wir suchen, nämlich der nächste Binomialkoeffizient in der gewünschten n -ten Zeile.
- $n - k$ ist jeweils die Zahl in der oberen Zeile, während $k + 1$ die Zahl direkt darunter in der unteren Zeile ist.

Beispiel: Im obigen Beispiel ist die „Startzahl“ $1 = \binom{10}{0}$ (10 wegen der 10. Zeile) mit $n = 10$ und $k = 0$.

Wir suchen $\binom{10}{1} = \binom{n}{k+1}$ mit $n = 10$ und $k + 1 = 1$.

Die erste Zahl in der oberen Zeile ist $10 = 10 - 0 = n - k$. Die erste Zahl in der unteren Zeile ist $1 = k + 1$.

Wo kommen diese Zahlen, insbesondere der Faktor $\frac{n-k}{k+1}$, her?

Betrachten wir das Beispiel $\binom{6}{2}$, also die Kombinationen aus sechs Silben, von denen vier *lang* (Λ) und zwei *kurz* (I) sind. Das sind 15 Möglichkeiten. Nun wollen wir eine kurze Silbe mehr verwenden, ohne die Gesamtzahl der Silben zu erhöhen. Wie verändert sich dann die Anzahl der möglichen Kombinationen?

Zur leichteren Vorstellung kommen hier noch einmal die Kombinationen für $n = 6$:

$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$
6 Λ	5 Λ, 1 I	4 Λ, 2 I	3 Λ, 3 I	2 Λ, 4 I	1 Λ, 5 I	6 I
Von 6 Silben sind alle lang	Von 6 Silben sind 5 lang und 1 kurz	Von 6 Silben sind 4 lang und 2 kurz	Von 6 Silben sind 3 lang und 3 kurz	Von 6 Silben sind 2 lang und 4 kurz	Von 6 Silben sind 1 lang und 5 kurz	Von 6 Silben sind alle kurz
ΛΛΛΛΛΛ	ΛΛΛΛΛI ΛΛΛΛIΛ ΛΛΛIΛΛ ΛΛIΛΛΛ ΛIΛΛΛΛ IΛΛΛΛΛ	ΛΛΛΛII ΛΛΛIΛI ΛΛΛIIΛ ΛΛIΛΛI ΛΛIΛIΛ ΛΛIIΛΛ ΛIΛΛΛI ΛIΛΛIΛ ΛIΛIΛΛ ΛIIΛΛΛ IΛΛΛΛI IΛΛΛIΛ IΛΛIΛΛ IΛIΛΛΛ	ΛΛΛIII ΛΛIΛII ΛΛIIΛI ΛΛIIIIΛ ΛIΛΛII ΛIΛIΛI ΛIΛIIΛ ΛIIΛΛI ΛIIΛIΛ ΛIIΛIΛ IΛΛΛII IΛΛIΛI IΛΛIIΛ IΛΛIIΛ IΛIΛΛI	ΛΛIIII ΛIΛIII ΛIIΛII ΛIIIIΛI ΛIIIIΛ IΛΛIII IΛIΛII IΛIIΛI IΛIIIIΛ IIΛΛII IIΛIΛI IIΛIIΛ IIΛIIΛ IIΛIΛI IIΛIΛΛ	ΛIIIII IΛIIII IIΛIII IIIΛII IIIIΛI IIIIΛΛ	I I I I I I

		IIAAAA	IAIAIA IAIIAA IIAAAI IIAAIA IIAIAA IIIAAA	IIIIAA		
1	6	15	20	15	6	1

Man kann beobachten, dass je weniger Elemente einer Art es gibt, desto mehr Möglichkeiten haben sie, sich auf alle Stellen zu verteilen und je mehr Elemente einer Art es gibt, desto weniger Möglichkeiten haben sie, sich zu verteilen. Gibt es z.B. nur Λ 's, so gibt es auch nur eine mögliche Verteilung. Werden die Λ 's weniger, so können sie sich auf mehr Arten verteilen. Das hat aber dann seine Grenze, wenn das zweite Element gleich oft oder häufiger vorkommt. Es gibt also jeweils das Element den Ausschlag zum mehr oder weniger Werden, dass insgesamt häufiger vorkommt. Kommt ein Element seltener vor, vervielfachen sich die Möglichkeiten, wird das Vorkommen häufiger, dividieren sich die Möglichkeiten.

Reduzieren sich die Λ 's bei sechs Stellen also von 6 auf 5, so versechsfachen sich die Möglichkeiten, da ja das neue I an jeder der sechs Stellen stehen kann, also einmal von hinten nach vorne durchwandert. Bei einer Reduktion von 5 auf 4 Λ 's müssten sich demnach die Möglichkeiten verfünffachen. Gleichzeitig erhöht sich aber die Anzahl der I's von 1 auf 2, was zu einer Halbierung der Möglichkeiten führt.

Schauen wir uns das genauer an:

In jeder Zeile der sechs Möglichkeiten von $\binom{6}{1}$ könnte jedes der Λ weggelassen und durch das neue I ersetzt werden:

1.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I$	wird	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I I$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I$		$\Lambda\Lambda\Lambda I I I$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I$		$\Lambda\Lambda I \Lambda\Lambda I$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I$		$\Lambda I \Lambda\Lambda\Lambda I$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I$		$I \Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I$

2.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I A$	wird	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda I I$
			$\Lambda\Lambda\Lambda A I \Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda I I \Lambda$
			$\Lambda\Lambda A \Lambda \Lambda I$		$\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda I$
			$\Lambda A \Lambda \Lambda \Lambda I$		$\Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda I$
			$A \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$		$I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$
3.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda I \Lambda A$		$\Lambda\Lambda\Lambda I \Lambda I$
			$\Lambda\Lambda\Lambda I A \Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda I I \Lambda$
			$\Lambda \Lambda A I \Lambda \Lambda$		$\Lambda \Lambda I I \Lambda \Lambda$
			$\Lambda A \Lambda I \Lambda \Lambda$		$\Lambda I \Lambda I \Lambda \Lambda$
			$A \Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda$		$I \Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda$
4.	Zeile	aus	$\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda A$	wird	$\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda I$
			$\Lambda \Lambda I \Lambda A \Lambda$		$\Lambda \Lambda I \Lambda I \Lambda$
			$\Lambda \Lambda I A \Lambda \Lambda$		$\Lambda \Lambda I I \Lambda \Lambda$
			$\Lambda A I \Lambda \Lambda \Lambda$		$\Lambda I I \Lambda \Lambda \Lambda$
			$A \Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda$		$I \Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda$
5.	Zeile	aus	$\Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda A$	wird	$\Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda I$
			$\Lambda I \Lambda \Lambda A \Lambda$		$\Lambda I \Lambda \Lambda I \Lambda$
			$\Lambda I \Lambda A \Lambda \Lambda$		$\Lambda I \Lambda I \Lambda \Lambda$
			$\Lambda I A \Lambda \Lambda \Lambda$		$\Lambda I I \Lambda \Lambda \Lambda$
			$A I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$		$I I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$
6.	Zeile	aus	$I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda A$	wird	$I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$
			$I \Lambda \Lambda \Lambda A \Lambda$		$I \Lambda \Lambda \Lambda I \Lambda$
			$I \Lambda \Lambda A \Lambda \Lambda$		$I \Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda$
			$I \Lambda A \Lambda \Lambda \Lambda$		$I \Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda$
			$I A \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$		$I I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$

Wir erhalten also eine Verfünffachung der Möglichkeiten.

Beim genaueren Hinsehen stellen wir aber fest, dass jede der Möglichkeiten doppelt vorkommt, da einmal das „alte“ I und einmal das neue I, die ja eigentlich nicht unterscheidbar sind, auf demselben Platz stehen.

Für die ersten Beispiele wird es hier farbig gekennzeichnet. Dieselbe Farbe entspricht demselben Rhythmus bzw. derselben Zeichenfolge:

1.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$	wird	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
2.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$	wird	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
3.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
4.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$	wird	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
5.	Zeile	aus	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$	wird	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$
			$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$

			$\Lambda I A \Lambda \Lambda \Lambda$		$\Lambda I I \Lambda \Lambda \Lambda$
			$A I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$		$I I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$
6.	Zeile	aus	$I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda A$	wird	$I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$
			$I \Lambda \Lambda \Lambda A \Lambda$		$I \Lambda \Lambda \Lambda I \Lambda$
			$I \Lambda \Lambda A \Lambda \Lambda$		$I \Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda$
			$I \Lambda A \Lambda \Lambda \Lambda$		$I \Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda$
			$I A \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$		$I I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda$

Man erkennt an der Einfärbung, dass sich z.B. jede Zeile des ersten Blocks als erste Zeile der folgenden Blöcke wiederfindet. Jede Zeile des zweiten Blocks findet sich als zweite Zeile der folgenden Blöcke wieder usw.

Damit tritt jede Zeile doppelt auf.

Wir müssen also die doppelten Zeilen streichen bzw. die erhaltenen 30 Möglichkeiten halbieren, um zu unserer endgültigen Anzahl zu kommen.

1.	Zeile	aus	$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda A I$	wird	$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I I$	
			$\Lambda \Lambda \Lambda A \Lambda I$		$\Lambda \Lambda \Lambda I \Lambda I$	
			$\Lambda \Lambda A \Lambda \Lambda I$		$\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda I$	5
			$\Lambda A \Lambda \Lambda \Lambda I$		$\Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda I$	
			$A \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$		$I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$	
2.	Zeile	aus	$\Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I A$	wird	$A \Lambda \Lambda \Lambda A I$	
			$\Lambda \Lambda \Lambda A I \Lambda$		$\Lambda \Lambda \Lambda I I \Lambda$	
			$\Lambda \Lambda A \Lambda \Lambda I$		$\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda I$	4
			$\Lambda A \Lambda \Lambda \Lambda I$		$\Lambda I \Lambda \Lambda \Lambda I$	
			$A \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$		$I \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda I$	
3.	Zeile	aus	$\Lambda \Lambda \Lambda I I A A$		$A \Lambda \Lambda I A I$	
			$\Lambda \Lambda \Lambda I A \Lambda$		$A \Lambda \Lambda A I A$	
			$\Lambda \Lambda A I I \Lambda \Lambda$		$\Lambda \Lambda I I \Lambda \Lambda$	3

					ΛΛΛΛΛ	Λ/ΛΛΛ	
					ΛΛΛΛΛ	/ΛΛΛΛ	
4.	Zeile	aus	ΛΛΛΛΛ	wird	ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ	2	
			ΛΛΛΛΛ		Λ/ΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		/ΛΛΛΛ		
5.	Zeile	aus	ΛΛΛΛΛ	wird	ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ	1	
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		/ΛΛΛΛ		
6.	Zeile	aus	ΛΛΛΛΛ	wird	ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ	0	
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ		
			ΛΛΛΛΛ		ΛΛΛΛΛ		
Summe:						15	

Insgesamt findet also eine Veränderung der Anzahl der Möglichkeiten um den Faktor $\frac{5}{2}$ statt. Das ist aber bei $\binom{n}{k} = \binom{6}{1}$ genau der Faktor $\frac{n-k}{k+1} = \frac{6-1}{1+1} = \frac{5}{2}$.

Will ich nun vom gerade errechneten $\binom{6}{2}$ zu $\binom{6}{3}$ kommen, bedeutet es, dass sich die Λ 's von 4 auf 3 reduzieren, daher also eine Vervierfachung der Möglichkeiten stattfindet, da wieder jedes der vier Λ 's gestrichen und durch das neue I ersetzt werden könnte. Aber gleichzeitig tritt jede dieser Möglichkeiten drei Mal auf, da das neue I nun einerseits an der Stelle, wo das Λ wegfällt, auftritt. Andererseits gibt es aber Zeilen, in denen an dieser Stelle eines der alten I stand und das Λ ersetzt wurde, wo in der anderen Zeile eines der beiden alten I stand. Z.B. wird sowohl aus $\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$, als auch aus $\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$ und $\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$ das neue $\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$.

Damit müssen wir durch 3 dividieren. Der Faktor, um von $\binom{6}{2}$ zu $\binom{6}{3}$ kommen, ist

also $\frac{4}{3}$. Und tatsächlich ist $\binom{6}{2} \cdot \frac{4}{3} = 15 \cdot \frac{4}{3} = 20 = \binom{6}{3}$.

Für Mathematiker sei hier ein kleiner „abstrakter“ Beweis geführt:

Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Linke Seite:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \quad (1)$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} && \text{Nenner umsortieren} \\ &= \frac{n!}{k!k+1} \cdot \frac{n-k}{(n-k)!} && \begin{array}{l} 1. \text{ Schritt: } k\text{'s zusammenfassen} \\ 2. \text{ Schritt: } (n-k) \text{ ausklammern} \end{array} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!} \cdot \underbrace{\frac{n-k}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k-2)(n-k-1)(n-k)}}_{(n-k-1)!} && (n-k) \text{ kürzen} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} && (2) \end{aligned}$$

Nach der Umformung sind die linke Seite (1) und die rechte Seite (2) gleich, damit müssen sie auch vor der Umformung gleich sein.

Im Gegensatz zur Additionsformel, die beschreibt, dass die Summe zweier benachbarter Binomialkoeffizienten immer den darunter stehenden Binomialkoeffizienten ergibt, und die wir anhand des Manhattan-Problems oder anderer Wege-Such-Probleme lokal an einem Knotenpunkt und geometrisch veranschaulichen konnten, ist dies bei der Multiplikationsformel nicht möglich.

Sucht man hier anschauliche Beispiele oder Übungsaufgaben, so kann man z.B. Team-Probleme wählen: Ein k -köpfiges Team, das aus n Personen ausgewählt wird, soll um eine weitere Person (aus den n Personen) ergänzt werden. Wie verändert sich die Anzahl der Möglichkeiten?

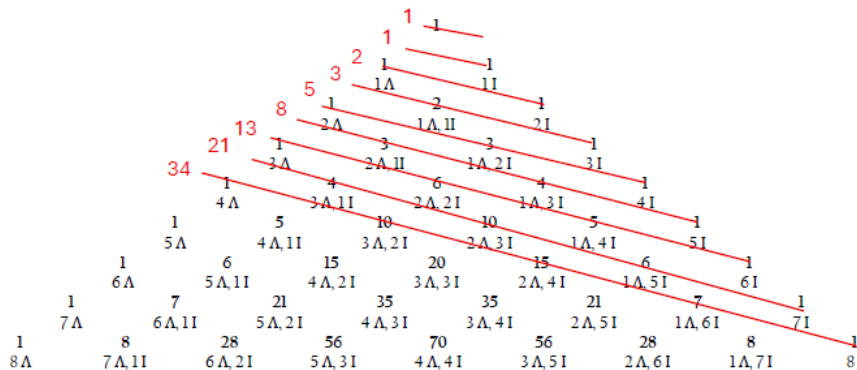
Die weitere Person muss aus den $n-k$ verbleibenden Personen gewählt werden. Es gibt also $n-k$ Möglichkeiten, das vorhandene k -köpfige Team zu ergänzen. Dabei wird aber jedes neue Team der Größe $k+1$ mehrfach gezählt, da es auf $k+1$ Arten gebildet werden kann, weil ja jede der $k+1$ Personen die Ergänzende sein könnte. Daher muss durch $k+1$ geteilt werden, um die Mehrfachzählung zu korrigieren.

Die Multiplikationsformel ist also global (im Sinne von ortsunabhängig) und kombinatorisch: Man untersucht, wie viele Möglichkeiten es gibt, von kleineren Teilmengen zu größeren zu gelangen und korrigiert die Überzählung. In diesem Sinne kann man die Multiplikationsformel als Vorgängerin der Hypergeometrischen Verteilung ansehen.

Siebte Fragestellung

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Hemachandra-(Fibonacci-)Folge und dem Meruprastara (Pascal'schen Dreieck)?

Als Mathematiker wissen wir, dass man die Fibonacci-Zahlen (Hemachandra-Folge) tatsächlich im Pascal'schen Dreieck (Meruprastara) findet. Aber kann man auch erklären, warum? Sonst könnte es Zufall sein. Zumal die Fibonacci-Zahlen nicht unmittelbar in Erscheinung treten, sondern man sie nur durch Addition bestimmter Binomialkoeffizienten, nämlich der sog. „flachen Diagonalen“, erhält.



Es fällt bei genauerem Hinsehen auf, dass alle diese Silbenkombinationen genau acht Schläge haben und auch alle möglichen Zusammenstellungen von Λ 's und I 's bei acht Schlägen repräsentiert sind. Zur Erinnerung: Λ ist zwei Schläge lang, I ist einen Schlag kurz.

Und genau diese Auffälligkeit ist der gesuchte Zusammenhang!

Die Hemachandra-Zahlen hatten wir gefunden, als wir die Anzahl möglicher langer und kurzer Silbenanordnungen für eine bestimmte Anzahl von Schlägen gesucht hatten. (Schlagzahl fest, Silbenanzahl variabel).

Die Meruprastara-Zahlen dagegen sind Kombinationen gleicher Silbenanzahlen, die aber unterschiedlich viele Schläge haben. (Silbenanzahl fest, Schlagzahl variabel).

Auf einer roten Linie liegen immer alle die Kombinationen, die dieselbe Schlagzahl haben. Die Summe dieser Kombinationen ergibt die Hemachandra-Zahl.

Dieser Zusammenhang wird nur deutlich, weil wir zwei-schlägige und ein-schlägige Silben verwenden, unsere Elemente also „1“ und „2“ sind und wir entweder die entstehende Summe der Zahlen aus „1“ und „2“ betrachten oder die möglichen Kombinationen der Symbole „1“ und „2“. 121 ist also lesbar als „1+2+1“ und ich suche nach allen möglichen Zusammenstellungen der Ziffern 1 und 2, die aus drei Ziffern bestehen und die Summe „4“ ergeben (Hemachandra-(Fibonacci-)Zahl) oder es ist lesbar also Ziffernfolge 1, 2, 1 und ich frage, wie viele Möglichkeiten gibt es, die Ziffern 1, 1 und 2 anzuordnen (Binomialkoeffizient).

Arbeitet man mit „0“ und „1“, „nein“/„ja“, „Punkt“/„Linie“ usw. Ergibt sich der geschilderte einfache Zusammenhang nicht und es bleibt ein nicht erklärbares Phänomen.

Achte Fragestellung

Welche weiteren Geheimnisse haben die „alten Inder“ entdeckt?

Die Achte und die Neunte Fragestellung sind nicht unbedingt kombinatorischer Natur. Sie zeigen aber, wie das kombinatorische Wissen auf praktische Fragestellungen angewendet wurde. In der Kombinatorik-/Zahlentheorie-Epoche eignen sie sich eher als Anekdoten oder Schmanckerl, weniger als Lerninhalt. Sie stellen darüber hinaus einen gewissen Bezug zur Codierung her und sollen in diesem Text der Vollständigkeit halber nicht weggelassen werden.

Schläft ein Lied in allen Dingen,
 Die da träumen fort und fort.
 Und die Welt hebt an zu singen
 Kennst du nur das Zauberwort.

Joseph von Eichendorff

Indischen Musikern ist tatsächlich ein Zauberwort bekannt, dass so, mehr als 2000 Jahre lang völlig unverändert, auf Pingala zurückgeht¹⁸.

Treffen zwei oder mehr Musiker aufeinander, können sie sich ein „Codewort“ zurfen und sofort gemeinsam in einem komplizierten Rhythmus spielen, ohne vorher je miteinander musiziert zu haben.

Das Zauberwort heißt: „*ya mā tā rā ja bhā na sa la gām*“ („*ya*“ wird wie das deutsche „Ja!“ ausgesprochen, „*ja*“ dagegen „dscha“). Das „*ā*“ steht hier für eine betonte, lange Silbe, während das normale „*a*“ unbetont, kurz ist. Es ist ein Nonsens-Wort, hat also keine inhaltliche Bedeutung und muss folglich auch nicht übersetzt werden.

Dieses Zauberwort lernen schon Kinder, die bspw. Trommeln oder andere Instrumente spielen lernen. Was und wie codiert es?

Übersetzen wir zunächst einmal das Wort in unsere Λ -I-Silben, indem wir uns nur auf die betonten und unbetonten Silben konzentrieren:

<i>ya</i>	<i>mā</i>	<i>tā</i>	<i>rā</i>	<i>ja</i>	<i>bhā</i>	<i>na</i>	<i>sa</i>	<i>la</i>	<i>gām</i>
I	Λ	Λ	Λ	I	Λ	I	I	I	Λ

Betrachtet man die Λ -I-Folge, so kann man sie sukzessive in Dreiergruppen aufteilen, die je mit einer Silbe beginnen:

<i>ya</i>	I $\Lambda\Lambda$	<i>ja</i>	I Λ I	<i>la</i>	I
<i>mā</i>	$\Lambda\Lambda\Lambda$	<i>bhā</i>	Λ II	<i>gām</i>	Λ
<i>tā</i>	$\Lambda\Lambda$ I	<i>na</i>	III		
<i>rā</i>	Λ I Λ	<i>sa</i>	II Λ		

Die letzten beiden Silben *la* (I) und *gām* (Λ) lassen wir zunächst außen vor und betrachten nur die ersten acht Silben und ihre Zahlenfolgen.

Wir stellen fest, dass es sich bei den Zahlenfolgen um alle acht möglichen Kombinationen aus drei Silben Λ und I handelt. Sie sind nicht in einer der vorher erarbei-

¹⁸[13]

teten Reihenfolgen sortiert, sondern recht beliebig, aber doch kompakt und hoch durchdacht angeordnet. Es handelt sich bei der gesamten Folge $I\Lambda\Lambda\Lambda I\Lambda I\Lambda I\Lambda$ um eine von nur zwei möglichen Folgen, in denen alle acht dreistelligen Kombinationen von zwei Symbolen vorkommen, eine sogenannte DeBruijn-Folge. Die zweite Folge ist $I\Lambda\Lambda I\Lambda I\Lambda I\Lambda$.

Eine DeBruijn-Folge ist eine kompakte Abfolge von Zeichen, in der jede mögliche Kombination dieser Zeichen mit einer gegebenen Länge genau einmal vorkommt. Diese Zeichenabfolge wird zyklisch betrachtet, das heißt die Zeichen am Ende dürfen mit denen am Anfang fortgesetzt werden, um ein Teilwort zu bilden¹⁹.

Unsere kompakte Abfolge von Zeichen hat zehn Stellen, die mit zwei verschiedenen Zeichen, Λ oder I , so gefüllt werden, dass je nach dem, an welcher Stelle man beginnt, man jede mögliche dreistellige Kombination dieser zwei Zeichen erhält. Sie ist zyklisch, da die letzten beiden Zeichen den ersten beiden entsprechen, so dass man diese Zeichenfolge im Kreis anordnen kann, wobei sich die beiden letzten Stellen mit den beiden ersten Stellen überlappen. Dies gilt auch für die zweite Folge. Beide Folgen sind, lässt man die erste und letzte Stelle weg, komplementär zueinander: vertauscht man in der einen Folge die Symbole Λ und I , so erhält man die andere (bzw. eine ihrer zyklischen Verschiebungen). Auf die Zyklizität wird später noch eingegangen werden. DeBruijn-Folgen werden in der Informatik aber z.B. auch in der Zauberei, etwa für Kartentricks, verwendet.

Wie kann man nun damit codieren?

Wir reduzieren die Silben selbst noch etwas weiter und lassen den Vokal a oder $\bar{a}$ weg. Er ist sowieso nur ein Platzhalter. Das Wort könnte auch mit „e“, „i“, „o“ oder „u“ gebildet werden.

Jede der acht 3-stelligen Kombinationen von Λ und I steht also für einen Konsonanten.

y	$I\Lambda\Lambda$	j	$I\Lambda I$	l	I
m	$\Lambda\Lambda\Lambda$	bh	ΛII	g	Λ
t	$\Lambda\Lambda I$	n	III		
r	$\Lambda I\Lambda$	s	$II\Lambda$		

Möchte ich einen bestimmten Rhythmus codieren, bilde ich also ein Wort, das aus den entsprechenden Konsonanten mit beliebigen Vokalen besteht.

¹⁹[17]

Beispiele:

Tiramisu	t		r		m		s
	$\Lambda\Lambda I$		$\Lambda I\Lambda$		$\Lambda\Lambda\Lambda$		$II\Lambda$

Der zugehörige Rhythmus ist also:

$\Lambda\Lambda I\Lambda I\Lambda\Lambda\Lambda I I\Lambda$

dah dah di dah di dah dah dah dah di di dah

Rotation	r		t		t		n
	$\Lambda I\Lambda$		$\Lambda\Lambda I$		$\Lambda\Lambda I$		III

Der zugehörige Rhythmus ist also:

$\Lambda I\Lambda\Lambda\Lambda I\Lambda\Lambda IIII$

dah di dah dah dah di dah dah di di di di

Nun kommen die beiden letzten Konsonanten „g“ und „l“ ins Spiel, denn nicht alle Rhythmen sind durch 3 teilbar. „g“ steht für *guru*, also lang (Λ), „l“ steht für *laghu*, also kurz (I). Will man also eine einzelne lange oder kurze Silbe einfügen, verwendet man entsprechend „g“ oder „l“.

Jalousie	j		l		s
	$I\Lambda I$		I		$II\Lambda$

Der zugehörige Rhythmus ist also:

$I\Lambda IIIII\Lambda$

di dah di di di di dah

Regal	r		g		l
	$\Lambda I\Lambda$		Λ		I

Der zugehörige Rhythmus ist also:

$\Lambda I\Lambda\Lambda I$

dah di dah dah di

Wenn man ein wenig herumprobiert, stellt man fest, dass man im Deutschen mit dem Zauberwort schnell an seine Grenzen kommt. „ya“ und der Konsonant „y“ wie

auch „ja“ und der Konsonant „j“ kommen im Deutschen eher selten vor. Dagegen unterscheiden wir z.B. stärker zwischen „d“ und „t“ als im Sanskrit.

Im Unterricht könnte man also mit den Schüler:innen ein deutsches Zauberwort finden, in dem z.B. die 10 häufigsten Konsonanten der deutschen Sprache vorkommen. Sollen „k“ und „l“ für kurz und lang stehen, bleiben noch acht weitere Konsonanten. Die Befragung von ChatGPT hat ergeben, dass die acht häufigsten Konsonanten im Deutschen außer *k* und *l* die folgenden sind: *n, r, s, t, d, h, m, g*.

Ein deutsches Zauberwort könnte also z.B. heißen:

Ga mā tā rā ha dā na sa ka lā

Selbstverständlich ist die Reihenfolge der Konsonanten bis auf „k“ und „l“ am Ende beliebig. Die betonten und unbetonten Silben sind aber fest. Darüber hinaus kann man auch andere Vokale verwenden, so dass das Wort der deutschen Sprache ähnlicher wird. Das bleibt denjenigen überlassen, die es ausprobieren möchten.

Mit dem obigen deutschen Zauberwort erhält man folgende Konsonanten-Rhythmus-Zuordnung:

<i>g</i>	IΛΛ	<i>h</i>	IΛI	<i>k</i>	I
<i>m</i>	ΛΛΛ	<i>d</i>	ΛII	<i>l</i>	Λ
<i>t</i>	ΛΛI	<i>n</i>	III		
<i>r</i>	ΛIA	<i>s</i>	IIΛ		

Das Wort „*Mathematik*“ hat dann den folgenden Rhythmus:

Mathematik	m	t	h	m	t	k
	ΛΛΛ	ΛΛI	IΛI	ΛΛΛ	ΛΛI	I

Der zugehörige Rhythmus ist also:

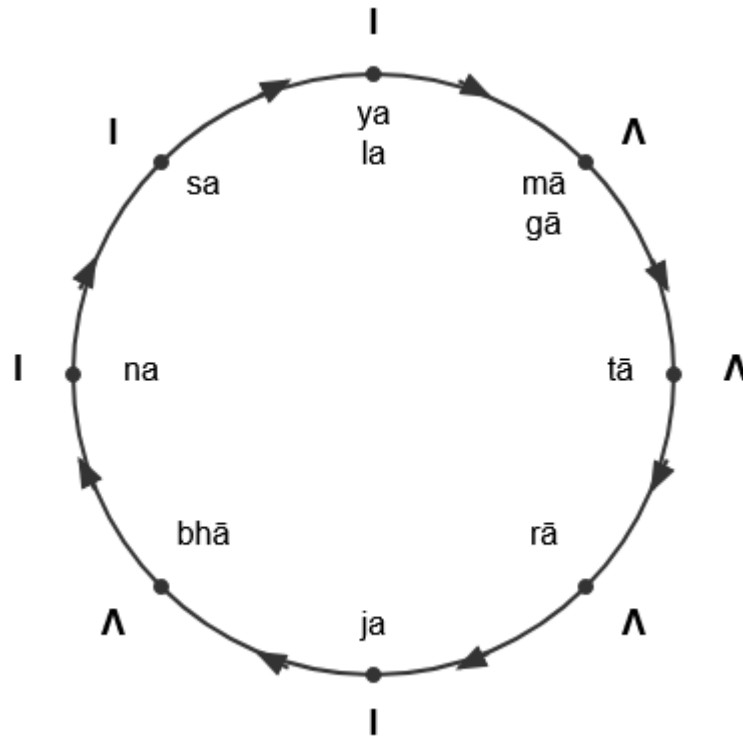
Λ Λ Λ Λ Λ I I Λ I Λ Λ Λ Λ Λ I I

dah dah dah dah dah di di dah di dah dah dah dah dah di di

Hat man für jeden der Konsonanten die entsprechende Zahlenfolge gelernt, kann man also sehr schnell zu einem gegebenen Wort den Rhythmus finden und umgekehrt.

Die DeBruijn-Folgen wurden als zyklisch bezeichnet. Und tatsächlich ist es so, dass man die Silben des Zauberworts im Kreis anordnen kann und quasi die sich selbst

in den Schwanz beißende Schlange Ouroboros erhält. Dabei sind die letzten beiden Silben „la“ und „gām“ der Schwanz, der verschluckt wird. Die zugehörigen Zeichen „I“ und „Λ“ entsprechen den beiden ersten Zeichen unserer Zauberwort-Folge.



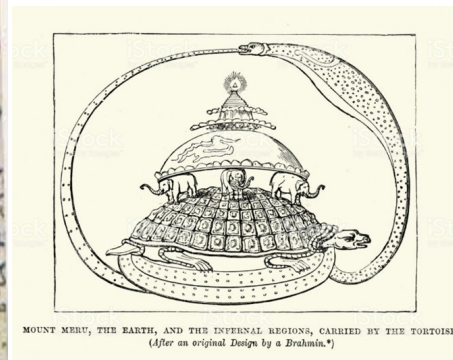
Der Ouroboros ist ein uraltes Symbol, das in fast allen alten asiatischen und europäischen Kulturen zu finden ist als Leviathan, als Midgardschlange (nordische Mythen), als Tiamat (Gilgamesh Epos), als Ouroboros (Ägypten). Bei den Hindus als Universum, im Yin Yang der chinesischen Kulturen usw. Es steht immer für Unendlichkeit, Wiedergeburt und den Kontrast von Innen und Außen, hell und dunkel usw.

Rudolf Steiner verwendet den Ouroboros als Siegelbild für das vierte Mysteriendrama „Der Seelen Erwachen“ und beschreibt die sich in den Schwanz beißende Schlange als Bild für die Umstülpung, von Raum und Gegenraum und für die imaginative Erkenntnis²⁰.

²⁰[14, 15]



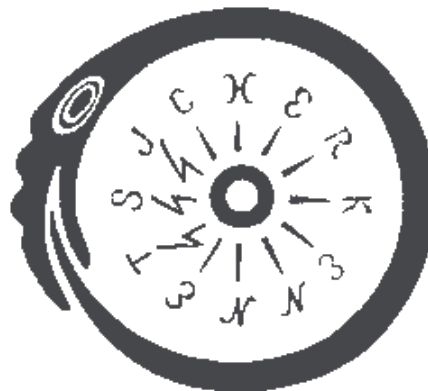
Alchemie Von anonymous medieval illuminator; Fol. 279 of Codex Parisinus graecus 2327,
<https://commons.wikimedia.org>



Hinduistische Kosmologie



Ouroboros (Ägypten)



Die Ouroboros-Schlange im Siegelbild für das vierte Mysteriendrama «Der Seelen Erwachen» nach dem Entwurf Rudolf Steiners.

Selbst mit dem Zauberwort „*ya mā tā rā ja bhā na sa la gām*“ gab sich Pingala noch nicht zufrieden. Es folgte noch eine weitere Fragestellung zur fälschungssicheren Codierung.

Neunte Fragestellung

Wie kann man einen Rhythmus fälschungssicher und über Jahrtausende erhaltbar benennen?

Ziel der „alten“ Poeten wie Pingala war es, einen Rhythmus für Melodien oder Sutras so fälschungssicher zu benennen, dass er sich über lange Zeit und auch ohne schriftliche Weitergabe, sondern ggf. nur durch mündliche Überlieferung unverändert erhielt.

Es geht also um eine fälschungssichere Codierung.

Die Idee: Man schreibe ein Sutra über den Rhythmus in dem Rhythmus, in dem der Rhythmus benannt wird.

Verwendet wird dabei natürlich das Zauberwort *ya mā tā rā ja bhā na sa la gām*.

Beispiel 1:

Sutra:	<i>Sūr yās vāir ya di mām sajāu satatagāh</i> $\Lambda \Lambda \Lambda I I I \Lambda I \Lambda I I I \Lambda$ <i>Sārdūllavīkrīditām.</i> $\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda I \Lambda$
Übersetzung:	<i>Wenn es 12-plus-7 Silben in der Form mā sa ja sa tā tā gā(m) gibt,</i> <i>dann wird es „Spiel des Tigers“ genannt.</i>
Code:	<i>mā sa ja sa</i> $\Lambda \Lambda \Lambda I I \Lambda I \Lambda I I \Lambda$ <i>tā tā gā(m)</i> $\Lambda \Lambda I \Lambda \Lambda I \Lambda$

Der Code *mā sa ja sa tā tā gā(m)* beschreibt also den gesamten Rhythmus, in dem er als lang/kurze Silbe selbst ebenfalls vorkommt.

Wird auch nur eine einzige lange oder kurze Silbe geändert, passt sie nicht mehr

zum Code und es fällt sofort auf. Werden ganze Wörter geändert, ergibt das Sutra keinen Sinn mehr.

Beispiel 2:

Sutra:	<i>Bhu jān gā pra yā tām catūr bhīr ya kā rāih.</i> I Λ Λ I Λ Λ I Λ Λ I Λ Λ
Übersetzung:	<i>Der „Gang der Kobra“ besteht aus einem Vierfachen ya.</i>
Code:	<i>ya ya ya ya</i> I Λ Λ I Λ Λ I Λ Λ I Λ Λ

Können wir solche Sätze auch im Deutschen finden? Das ist eine spannende Herausforderung für unsere Schüler:innen. Ich freue mich über Zuschriften mit Berichten und Ideen!

Ein bekanntes Beispiel und Merkvers, in dem Hexameter und Pentameter in Gedichtform und „ihrem“ Versmaß beschrieben werden, finden wir bei Friedrich Schiller:

Das Distichon

Im Hexameter steigt des Springquells flüssige Säule,
Im Pentameter drauf fällt sie melodisch herab.

Hier wird natürlich kein Zauber- bzw. Codierungswort verwendet.

Ein selbsterdachtes, sehr einfaches Beispiel ebenfalls für ein Hexameter unter Verwendung des deutschen „Zauberworts“ *Ga mā tā rā ha dā na sa ka lā* mit

<i>g</i>	I Λ Λ	<i>h</i>	I Λ I	<i>k</i>	I
<i>m</i>	Λ Λ Λ	<i>d</i>	Λ II	<i>l</i>	Λ
<i>t</i>	Λ Λ I	<i>n</i>	III		
<i>r</i>	Λ I Λ	<i>s</i>	II Λ		

könnte sein:

Sechs mal daktylische Füße, sechs Dā, sind der edle Hexameter.

Λ I I Λ I I Λ I I Λ I I Λ I I

Code: Sechs Dā = Λ II Λ II Λ II Λ II Λ II

Exkurs

Auch Sir Francis Bacon (1561 – 1626), oft als „Vater der Binärzahlen“ angesehen, entwickelte mit 17 Jahren – aber lange nach Pingala - ein auf Binärzahlen beruhendes Chiffrier- oder Codier-System, genannt Bacon-Chiffre. Er ordnete jedem Buchstaben des Alphabets eine fünfstellige Abfolge der Buchstaben a und b zu. Es gab zu dieser Zeit im viktorianischen England 24 verschiedene Buchstaben, da I und J bzw. U und V jeweils identisch waren.

Buchstabe	Code	Buchstabe	Code	Buchstabe	Code
A	aaaaa	I, J	abaaa	R	baaaa
B	aaaab	K	abaab	S	baaab
C	aaaba	L	ababa	T	baaba
D	aaabb	M	ababb	U, V	baabb
E	aabaa	N	abbaa	W	babaa
F	aabab	O	abbab	X	babab
G	aabba	P	abbba	Y	babba
H	aabbb	Q	abbbb	Z	babbb

Bacons Ziel war es, seinen Code in einem längeren „normalen“ Text zu verstecken, indem z.B. für a und b verschiedene Schriftarten oder Groß- und Kleinschreibung verwendet wurden. Er schlug sogar vor, den Buchstaben A bis M den Codewert a und den Buchstaben N bis Z den Codewert b zuzuordnen. Nun formuliert man einen langen Text und codiert die Botschaft mithilfe der Anfangsbuchstaben der Wörter. So konnte ein „normaler“ Text zum Träger einer versteckten Botschaft werden²¹.

„BACON“ könnte dann z.B. folgendermaßen codiert werden:

B	aaaab
A	aaaaa
C	aaaba
O	abbab
N	abbaa

Die Chiffre ist eine prima Angelegenheit, da man mit ihrer Hilfe geheime

²¹[12]

Botschaften zuverlässig in langen Texten verstecken kann, so dass uneingeweihte Personen es ignorieren.

Die einzelnen fünfstelligen Buchstabencodes sind unterstrichen, die relevanten Wortanfänge sind fett gedruckt. Man erhält also:

B	A	C	O	N
aaaab	aaaaa	aaaba	abbab	abbaa
DCiep	Admmi	HgBzi	lTvks	duPei

Allerdings sieht man, dass die geheime Botschaft möglichst kurz sein sollte, da man sonst sehr lange Trägertexte verfassen muss.

Zusammenfassung und kurzer Epochenüberblick

Es erstaunt durchaus, welche umfassenden kombinatorischen und zahlentheoretischen Betrachtungen indische Gelehrte bereits vor über 2000 Jahren machten. In den teilweise zitierten Texten wie dem Chandashastra von Pingala oder dem Vrutaratnakara von Kedara Bhatt ist sicherlich noch viel mehr verborgen. Interessant ist, dass die treibende Kraft nicht die mathematische Forschung war, sondern eine Analyse und differenzierte Darstellung der Poetik. Ähnliche Antriebe findet man bspw. bei Sir Francis Bacon, der den Binärcode als Chiffriersystem entwickelte.

Man mag sich fragen, warum dieses alte Wissen heute nicht (mehr) bekannt ist. Dies ist insbesondere auf die Kolonialisierung zurückzuführen, in der, wie meistens üblich, das Wissen der Herrscher gelehrt wurde, nicht das der Beherrschten. Damit kennen indische Schüler:innen die Zahlenfolgen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... als im Westen übliche „Fibonacci-Folge“, nicht als ursprüngliche „Hemachandra-Folge“, das Zahlendreieck ist auch indischen Lernenden als „Pascal’sches Dreieck“ bekannt, nicht als „Meruprastara“ – wie sie in der indischen Prosodik noch genannt werden. Viel Wissen ging auf diese Weise aus Überheblichkeit verloren oder wurde verschüttet und wird erst langsam wiederentdeckt.

In diesem kleinen Text haben wir zunächst anhand von Rhythmen gleicher Schlagzahl, bestehend aus ein- und zwei-schlägigen Silben, die Hemachandra- oder Fibonacci-Zahlen entdeckt.

Im Folgenden haben wir uns Rhythmen gleicher Silbenzahl und damit den Binärzahlen zugewandt. Wir haben verschiedene Algorithmen kennengelernt: zunächst Algorithmen, nach denen man sicherstellen kann, keine Zeile in einer Liste zu vergessen. Dann Algorithmen, die dazu dienen, Dezimalzahlen in Binärzahlen umzu-

rechnen, also eine „verlorene“ Binärzahl zu rekonstruieren, und das Umgekehrte, zu einer angegebenen Binärzahl die Dezimalzahl zu berechnen.

Diese Aspekte können gut in der zweiten Epochenwoche behandelt werden, wenn in der ersten Epochenwoche Permutationen ohne und mit Wiederholung und ggf. Variationen und alle zugehörigen Formeln und Rechenarten wie die Fakultät erarbeitet wurden.

In der Fünften Fragestellung haben wir uns den „Kurz-Lang-Übungen“ gewidmet, also den Kombinationen oder Auswahlproblemen. Wir haben das Meruprastara, den wachsenden Juwelenberg, oder das Pascal'sche Dreieck aufgestellt und daran viele mathematische Regelmäßigkeiten und Zahlenmuster entdeckt, wie die Additionsformel, die Binomialkoeffizienten, das regelmäßige Auftreten bestimmter Zahlen wie der natürlichen Zahlen, Dreieckszahlen uvm., sowie die Multiplikationsformel, mit der man ganze Zeilen des Meruprastara errechnen kann, und sind den Hemachandra-Fibonacci-Zahlen wieder begegnet.

Diese Inhalte passen in die dritte Epochenwoche, ggf. ergänzt durch Codierungs- und Chiffrierungs-Aspekte oder durch das Lotto-Modell mit der Hypergeometrischen Verteilung und Aspekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Eine mögliche Kombinatorik-Epoche mit dem hier dargestellten historischen, aber hochaktuellen Hintergrund könnte also ganz grob wie folgt aussehen:

1. Woche: Permutation, Permutation mit Wiederholung, evtl. Variation
2. Woche: Erste bis Vierte Fragestellung
3. Woche: Fünfte bis Siebte Fragestellung, ggf. ergänzt durch Codierung/Chiffrierung oder Wahrscheinlichkeitsrechnung

Alle Themen müssen immer angereichert und ergänzt sein durch viele und vielfältige andere Übungs- und Vertiefungsaufgaben. Klassische Aufgaben zu Permutationen mit und ohne Wiederholung, zu Variationen und zu Kombinationen findet man im Netz und im Buch „Mathematikthemen für die 9. Klasse“ der edition waldorf.

Es wird von einer dreiwöchigen Epoche mit 15 Unterrichtstagen ausgegangen. Ergänzende Fachstunden sind hier nicht beachtet, sind aber sinnvollerweise für Exkurse, Vertiefungen und Üben zu verwenden.

In der 3. Woche könnte man auch die poetischen Betrachtungen „nur“ als Ergänzung bzw. Vertiefung verwenden und die Kombinationen neu greifen und über die etwas anschaulichere Frage der k -Ecke im n -Eck erarbeiten.

Ob man die indischen Bezeichnungen verwenden möchte, oder lieber auf die bekannten westlichen Bezeichnungen zurückgreift, bleibt der eigenen Abwägung überlassen. Einerseits sind die Bezeichnungen für die Schüler:innen in jeden Fall neu, die Umgewöhnung findet bei der Lehrperson statt. Andererseits werden die Schüler:innen bei vertiefenden Recherchen, Nachhilfelehrer:innen, Eltern etc. mit dem indischen Bezeichnungen auf wenig Wiedererkennen stoßen, was für eine Verwendung der Üblichen Bezeichnungen spräche.

In diesem Text wurden bewusst konsequent die indischen Bezeichnungen (oder beide) verwendet auch aus Respekt und Anerkennung der indischen Denker, deren Errungenschaften im Zuge der Kolonialisierung verschüttet wurden.

Die Achte und Neunte Fragestellung, die sich insbesondere mit der Codierung beschäftigen, können auch in Übstunden oder als kleine Anekdoten im Unterricht betrachtet werden und stellen neben den Binärzahlen eine mögliche Verbindung zum Informatikunterricht her.

Es ist sehr zu empfehlen, die 9. Klässler:innen nicht nur denkerisch zu aktivieren, sondern auch physisch durch zugehörige Rhythmusübungen ins Schwitzen zu bringen und die theoretischen Rhythmen auch praktisch übend zu ergreifen.

I would like to thank the 'Circle of Math' for many inspiring meetings, and particularly Marisha for her insightful report on her museum visit.

Literatur

- [1] BHATTA, KEDARA: Vrittaratnakara (with Sanskrit Commentary and Hindi Translation). P. 152(164/180),
https://archive.org/details/vritta_ratnakara, 8.9.2025
- [2] Bilston, Brian: Fibonacci-Gedicht, <https://www.goldennumber.net/poetry/>
14.10.2025
- [3] CHANILLO, SAGUN: Fibonacci Numbers in the Music and Metre of Indian Music and Poetry
<https://sites.math.rutgers.edu/~chanillo/music.pdf>, 18.8.2025
- [4] FIECHTER, HANS PAUL: Lyrik lesen – Grundlagen einer praktischen Poetik, 1996

- [5] HALL, RACHEL WELLS: Math for Poets and Drummers
https://sanskrit.uohyd.ac.in/Algorithms_in_Ancient_India/Material/mathfor_poets.pdf, 18.8.2025
- [6] KALAYAMARAMAN, SRINI: Chandas and Mleccha (Meluhha) are prosody and parole in Indian sprachbund
https://www.academia.edu/11047661/Chandas_and_Mleccha_Meluhha_are_prosody_and_parole_in_Indian_sprachbund, 28.8.2025
- [7] KULKARNI, AMBA: Recursion and Combinatorial Mathematics in Chand-ashāstra
<https://arxiv.org/vc/math/papers/0703/0703658v1.pdf>, 18.8.2025
- [8] LABUDDE, KLAUS in NEUMANN, ROBERT (Hrsg.): Mathematikthemen für die 9. Klasse, edition waldorf
- [9] MILLIGAN, MARK: How a poet founded mathematics
<https://www.heritagedaily.com/2020/04/how-a-poet-founded-mathematics/127479>, 18.8. 2025
- [10] PINGALA: Chanda Shastra, translated by Dvivedi, Kapil Deva und Singh, Shyam Lal: The Prosody of Pingala; Chowk, Varansi Indien, 2019
- [11] PINGALACHARYA: Chand Shastra, P. 315-316/324
<https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.327579>, 8.9.2025
- [12] RAM, STEFAN: Die Vorgeschichte des ASCII-Codes
https://www.purl.org/stefan_ram/pub/code_ascii_vorgeschichte_de, 9.9.2025
- [13] SHAH, JAYANT: A History of Pingalas Combinatorics,
https://sanskrit.uohyd.ac.in/Algorithms_in_Ancient_India/Material/Pingala.pdf, 28.8.2025
- [14] STEINER RUDOLF (1): Anthroposophie, ihre Erkenntniswurzeln und Lebensfrüchte, GA 78
- [15] STEINER RUDOLF (2): Vier Mysteriendramen, GA 14
- [16] WOLFENTER, FRIEDRICH: Anagrammgedichte.
<http://www.wolfenter.de/anagrammgedichte.htm>, 3.9.2025
- [17] Wikipedia: „De-Bruijn-Folge“, „Ouroboros“, „Pascal’sche Pyramide“, „Yang Hui“

- [18] YÁNG HUĪ, ca. 1238–1298),
<https://commons.wikimedia.org>, 8.9.2025