

Lösungen der Aufgaben

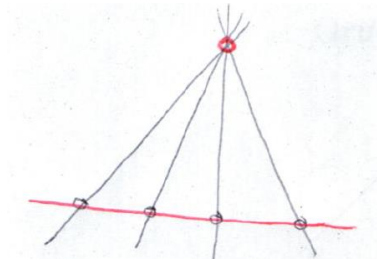
in A. Stolzenburg, Projektive Geometrie

Die Seitenzahlen beziehen sich auf die 2. Auflage, die noch in Vorbereitung ist.
In Klammern sind die der 1. Auflage (2009) beigefügt.

zu Seite 11 (11) Man fertige Skizzen an zu den Beziehungen zwischen den verschiedenen Grundgebilden.

In der Ebene:

Der Schnitt eines Geradenbündels mit einer Gerade ist eine Punktreihe.



Der Schein einer Punktreihe aus einem Punkt ist ein Geradenbündel.

Im Raum:

Verabredungen:

$\{g|P, \varepsilon\}$ oder $\{g|\varepsilon, P\}$ = Geradenbündel mit Trägerpunkt P und in Ebene ε

$\{P|g\}$ = Punktreihe mit Trägergerade g

$\{P|\varepsilon\}$ = Punktfeld mit Trägerebene ε

$\{g|P\}$ = Geradenbündel mit Trägerpunkt P

$\{g|\varepsilon\}$ = Geradenfeld mit Trägerebene ε

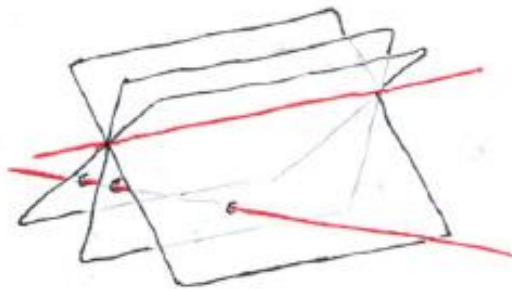
$\{\varepsilon|g\}$ = Ebenenbündel mit Trägergerade g

$\{\varepsilon|P\}$ = Ebenenbündel mit Trägerpunkt P

$\{g|g\}$ = Geradengebüsch mit Trägergerade g

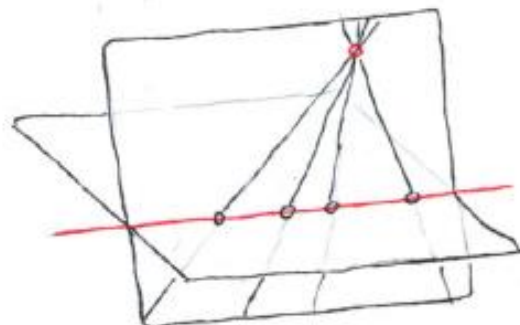
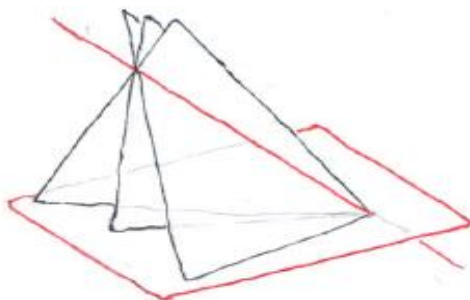
Der Schnitt eines Ebenenbündels $\{\varepsilon|g_0\}$ mit einer Gerade a ist eine Punktreihe: $\{P|a\}$.

Der Schein einer Punktreihe $\{P|g_0\}$ aus einer Gerade a ist ein Ebenenbündel: $\{\varepsilon|a\}$.

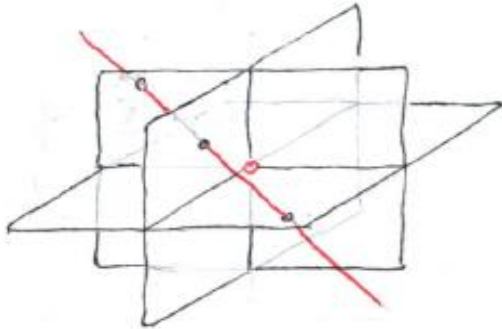


Der Schnitt eines Ebenenbündels $\{\varepsilon|g_0\}$ mit einer Ebene α ist ein Geradenbündel: $\{g|\alpha, \alpha \cdot g_0\}$.

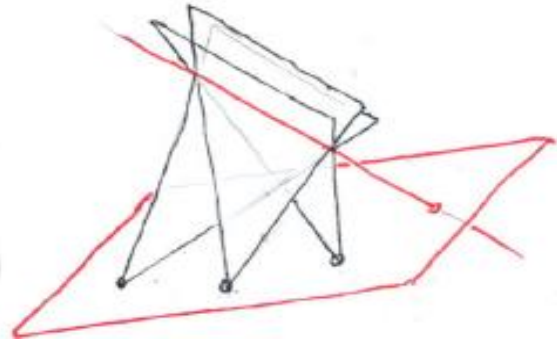
Der Schein einer Punktreihe $\{P|g_0\}$ aus einem Punkt A ist ein Geradenbündel: $\{g|A, \overline{A \cdot g_0}\}$.



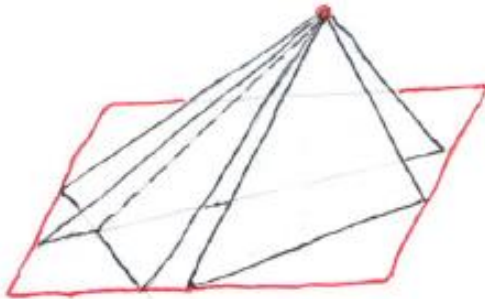
Der Schnitt eines Ebenenbündels $\{\varepsilon | P_0\}$ mit einer Gerade a ist eine Punktreihe: $\{g|a\}$.



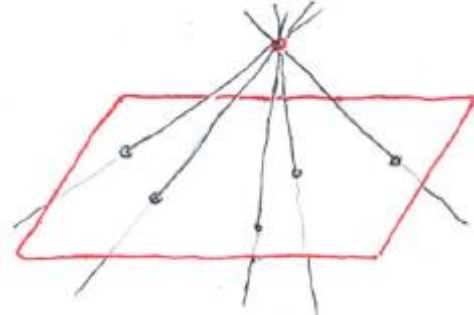
Der Schein eines Punktfeldes $\{P|\varepsilon_0\}$ aus einer Gerade a ist ein Ebenenbüschel: $\{\varepsilon | a\}$



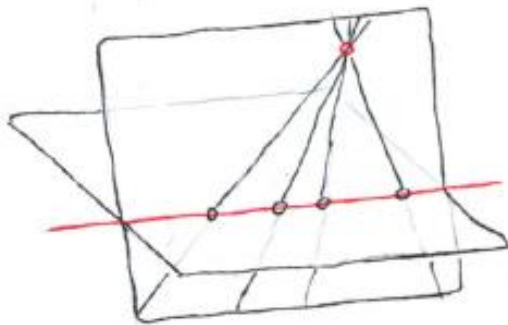
Der Schnitt eines Ebenenbündels $\{\varepsilon | P_0\}$ mit einer Ebene α ist ein Geradenfeld: $\{g|\alpha\}$.



Der Schein eines Punktfeldes $\{P|\varepsilon_0\}$ aus einem Punkt A ist ein Geradenbündel: $\{\varepsilon_0 | A\}$.



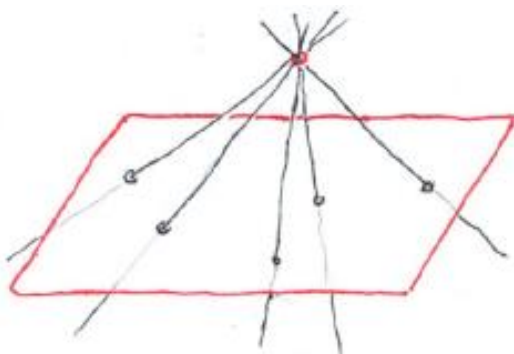
Der Schnitt eines Geradenbüschels $\{g|P_0, \varepsilon_0\}$ mit einer Ebene α ist eine Punktreihe: $\{P|\varepsilon\alpha\}$.



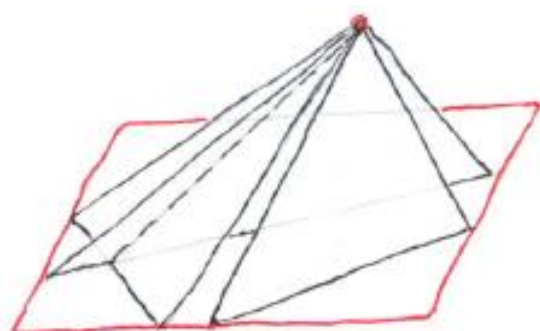
Der Schein eines Geradenbüschels $\{g|P_0, \varepsilon_0\}$ aus Punkt A ist ein Ebenenbüschel: $\{\varepsilon | A(g_0, \varepsilon_0)\}$.



Der Schnitt eines Geradenbündels mit einer Ebene ist ein Punktfeld.



Der Schein einer Geradenfeldes aus einem Punkt ist ein Ebenenbündel.



Seite 57 (54) Man dualisiere die räumliche DESARGUES'sche Konfiguration

Die DESARGUES'sche Figur im Raum besteht aus 10 Punkten, 10 Geraden und 5 Ebenen.

Durch jeden Punkt gehen 3 Geraden und 3 Ebenen.

Jede Gerade trägt 3 Punkte und 2 Ebenen.

Jede Ebene enthält 6 Punkte und 4 Geraden.

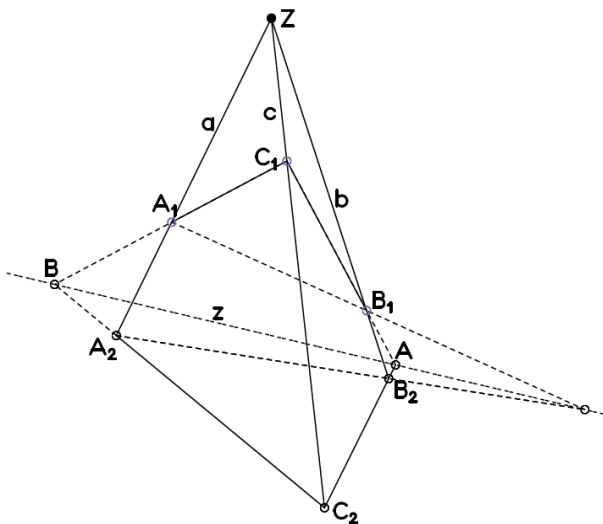
Daraus wird schon ersichtlich, dass der räumliche DESARGUES, anders als der ebene, nicht zu sich selbst dual ist.

5 Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ in allgemeiner Lage seien gegeben.

3 davon haben den Schnittpunkt $Z = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ und untereinander die Schnittgeraden $a = \overline{\beta\gamma}$, $b = \overline{\alpha\gamma}$, $c = \overline{\alpha\beta}$.

Die Ebenen δ, ε schneiden a, b, c in den Dreiecken $A_1B_1C_1$ bzw. $A_2B_2C_2$ mit den Dreiseiten $a_1b_1c_1$ bzw. $a_2b_2c_2$ (in der üblichen Art bezeichnet).

a_1 und a_2 liegen dann in der Ebene α und treffen sich in einem Punkt A , der auch in den Ebenen δ, ε liegt, also auch im Schnitt $z = \overline{\delta\varepsilon}$. Entsprechendes gilt für $B = b_1 \cdot b_2$ und $C = c_1 \cdot c_2$. A, B, C liegen alle in z .



Ausgangspunkt war hier das Dreikant abc in Punkt Z .

Schneidet man den Schein der ganzen räumlichen Figur aus einem beliebigen Punkt mit einer beliebigen Ebene, erhält man die bekannte ebene DESARGUES'sche Konfiguration.

Die dazu duale Figur besteht aus 10 Ebenen, 10 Geraden und 5 Punkten.

In jeder Ebene liegen 3 Geraden und 3 Punkte.

Jede Gerade trägt 3 Ebenen und 2 Punkte.

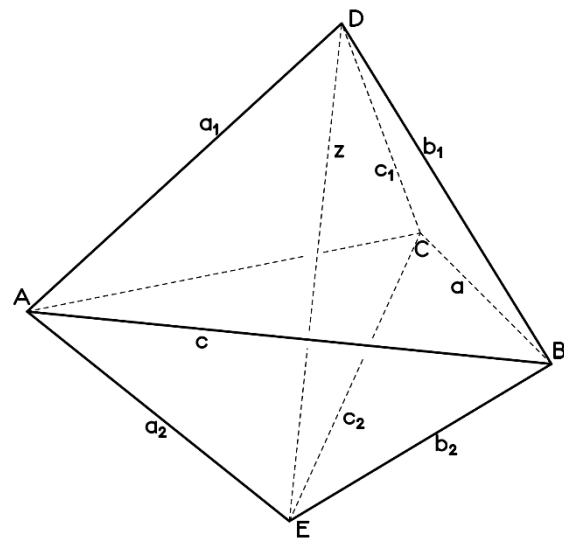
Jeder Punkt enthält 6 Ebenen und 4 Geraden.

5 Punkte A, B, C, D, E in allgemeiner Lage seien gegeben.

3 davon bestimmen die Ebene $z = \overline{ABC}$ und untereinander die Verbindungsgeraden $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

Die Punkte D, E werden mit a, b, c verbunden zu Dreiecken $a_1b_1c_1$ bzw. $a_2b_2c_2$ mit den Dreikanten $a_1b_1c_1$ bzw. $a_2b_2c_2$ (a_1 liegt gegenüber den Ebenen β_1, γ_1 in Z u.s.w.).

a_1 und a_2 gehen dann durch den Punkt A und liegen in einer Ebene α , die auch durch die Punkte D, E geht, also auch durch die Verbindungsgerade $z = \overline{DE}$. Entsprechendes gilt für $\beta = \overline{B_1B_2}$ und $\gamma = \overline{C_1C_2}$. α, β, γ gehen durch z .



Ausgangspunkt war hier das Dreiseit abc in der Ebene $\zeta (= ABC)$.

Verbindet man einen ebenen Schnitt der ganzen räumlichen Figur mit einem beliebigen Punkt, erhält man die weniger bekannte duale DESARGUES'sche Konfiguration im Bündel.

**Seite 70 (67) Wie viele PAPPOS'sche Geraden gibt es?
Was für Beziehungen bestehen zwischen diesen?**

Man macht sich leicht klar, dass es unter den Bedingungen des Satzes von PAPPOS 6 verschiedene Sechsecke gibt. Liegen nämlich die Punkte mit ungerader Nummer in der Geraden u , diejenigen mit gerader in g , hat man, in einem Punkt (z.B. 1 in u) beginnend, für den zweiten Punkt 3 Möglichkeiten zur Auswahl, für den dritten, in u , nur noch 2, dann 2 für den nächsten in g ; dann ist alles festgeschrieben. Das ergibt insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten. Da die Sechsecke zyklisch sind, spielt es keine Rolle, mit welchem Punkt von g man begonnen hat. Da bei dieser Zählweise die Sechsecke einmal vorwärts und einmal rückwärts durchlaufen werden, gibt es 6 verschiedene PAPPOS-Geraden.

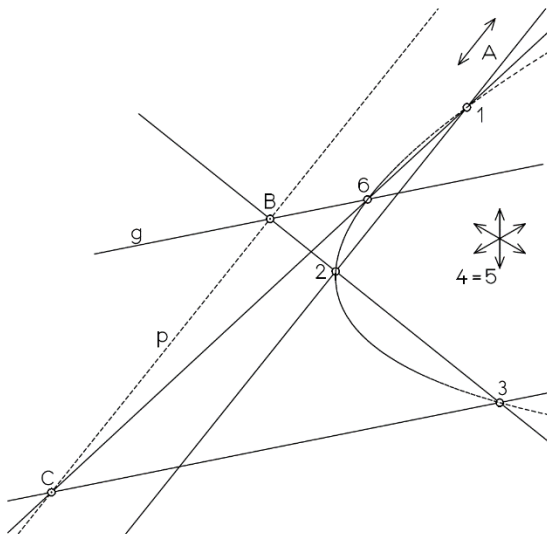
Alle $3 \cdot 3 = 9$ möglichen Sechseckseiten (Verbindungen von Punkten in u mit solchen in g) haben 18 Schnittpunkte untereinander, nämlich, $\binom{9}{2} = 36$ Kombinationen minus 18 Schnittpunkte in u und g . Jede dieser Geraden verbindet einen "geraden Punkt" mit einem "ungeraden" und wird dann noch von den Geraden geschnitten, die die übrigen 2 geraden und 2 ungeraden Punkte verbinden. Es liegen also in jeder Sechseckseite 4 von diesen Schnittpunkten, außerdem noch je ein Punkt von u und von g .

Durch fast alle diese Punkte gehen (bei allgemeiner Lage) nur 2 Geraden, nur durch die nummerierten Punkte von u und g gehen je 3 Sechsecken, also insgesamt 4 Geraden.

Insgesamt hat man $2 + 9 + 6 = 17$ Geraden und $6 + 18 + 2 = 26$ Punkte, wobei die letzten beiden neue Punkte (G und U) sind, in denen sich je drei der 6 PAPPOS-Geraden treffen (o. Beweis).

Seite 98 (95) 1. Von einer Parabel seien drei Punkte und die Richtung der Achse durch eine Gerade g gegeben (und damit der vierte und der fünfte Punkt!).

Gesucht ist der Schnittpunkt der Parabel mit g .



Gegeben also die Punkte 1, 2, 3 und die Gerade g und damit der Punkt 4 = 5 als der Fernpunkt von g . Für eine Parabel zählt dieser Fernpunkt doppelt.

Gesucht der Parabelpunkt 6 in g .

Der Satz von PASCAL ergibt:

$$A = \overline{12} \cdot \overline{45} = \binom{9}{2} \cdot u_{\infty} \text{ (ein Fernpunkt) und}$$

$$B = \overline{23} \cdot \overline{56} = \overline{23} \cdot g.$$

A und B legen schon die PASCAL'sche Gerade fest: $p = \overline{AB}$.

In p liegt auch

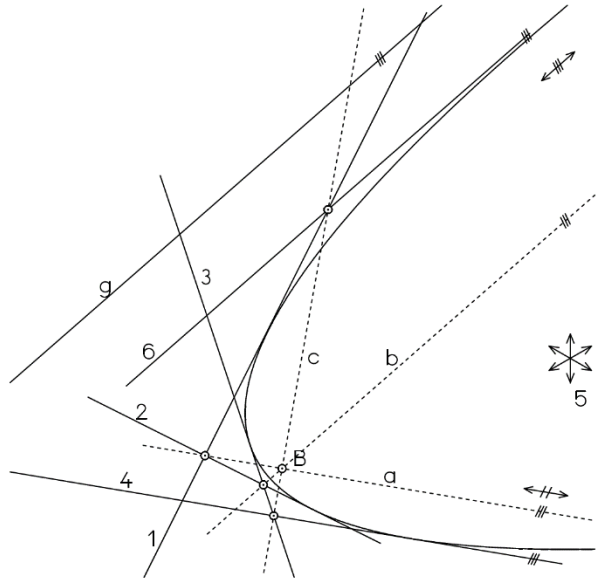
$$C = \overline{34} \cdot \overline{61} = \overline{34} \cdot g.$$

Der gesuchte Punkt 1 ist also $\overline{C1} \cdot g$.

Seite 98 (95) 2. Von einer Parabel seien vier endliche Tangenten gegeben – die Ferngerade ist dann, damit das Gebilde 2. Ordnung eine Parabel ist, die fünfte.

Gesucht ist die Tangente, die parallel zu einer beliebig gegebenen Geraden ist.

Die gegebenen Tangenten seien 1, 2, 3, 4 und 5 als Ferngerade. Gesucht ist die Tangente 6. Sie hat den gleichen Fernpunkt wie g. Man konstruiert leicht den BRIANCHON'schen Punkt $B = a \cdot b$ für $a = \overline{(1 \cdot 2)(4 \cdot 5)}$ mit $4 \cdot 5$ als Fernpunkt von 4 und für $b = \overline{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)}$ mit $5 \cdot 6$ als Fernpunkt von g. $c = \overline{(3 \cdot 4)(6 \cdot 1)}$ muss durch B gehen, ist also zu konstruieren als $\overline{(3 \cdot 4)B}$ und trifft 1 in Punkt $6 \cdot 1$. 6 ist dann die Parallele zu g durch den Punkt $6 \cdot 1$.



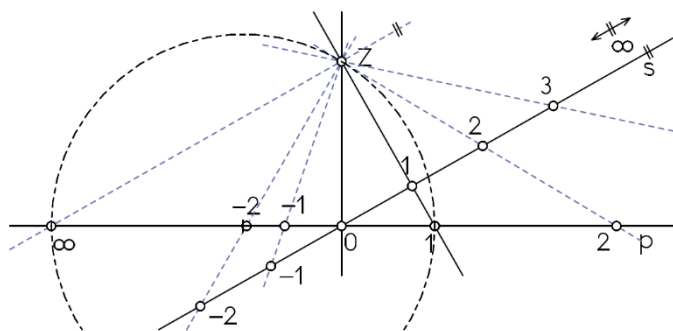
Seite 122 (119) Eine einfache Projektion aus einem Punkt lässt aus einer geeignet gewählten Schrittmaß-Skala im EUKLIDISCHEN Sinn eine additive projektive Skala hervorgehen, wobei bei letzterer drei Punkte, etwa 0, 1 und ∞ in einer beliebigen Geraden beliebig vorgegeben seien.

Gesucht sind Lage und Größe der Schrittscala und das Projektionszentrum.

Gegeben die Punkte 0, 1, ∞ – hier bezeichnet mit $N = 0$, $E = 1$, $U = \infty$ – einer projektiven Skala in der Geraden p. Diese ist damit nach dem Fundamentalsatz eindeutig bestimmt. Gesucht sind nun eine Gerade s mit einer äquidistanten Skalierung und ein Zentrum, welches beide Skalen aufeinander projiziert. s muss dabei parallel sein zu dem Projektionsstrahl $\overline{ZU}$.

Eine mögliche Lösung verwendet den THALES-Keis über den Punkten U und E in p. Die Höhe in Punkt N ergibt das Zentrum Z, die Parallele zu $\overline{ZU}$ durch Punkt N die Gerade s. Weiter ist der Punkt $\overline{ZE}$ s der Punkt 1 der äquidistanten Skala; er ergibt zugleich das Schrittmaß dieser Skala mit $\overline{01}$.

Da s senkrecht auf $\overline{ZE}$ steht, sind dort die Strecken $\overline{12}$ und $\overline{01}$ gleich lang und ist durch die Punkte 0, 1, 2 (sowie ∞) die äquidistante Skala festgelegt. Die Projektion aus Z leistet das Verlangte.

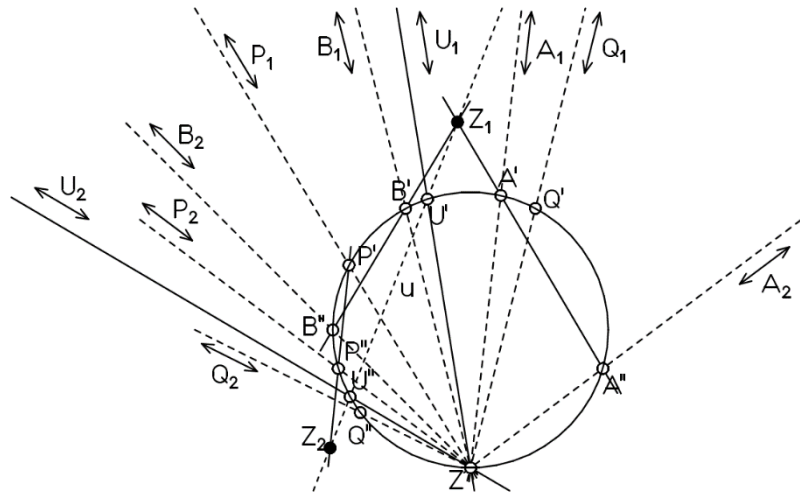


Seite 129 (126)

Gegeben: Zwei Paare (A_1, A_2) und (B_1, B_2) von Fernpunkten, die sich in einer Involution i wechselseitig entsprechen, sowie zwei weitere Paare (P_1, P_2) und (Q_1, Q_2) sich in einer weiteren Involution j wechselseitig entsprechender Punkte.

Gesucht: Die Punkte U_1, U_2 , die sich in beiden Involutionen wechselseitig entsprechen – wenn solche Punkte denn existieren.

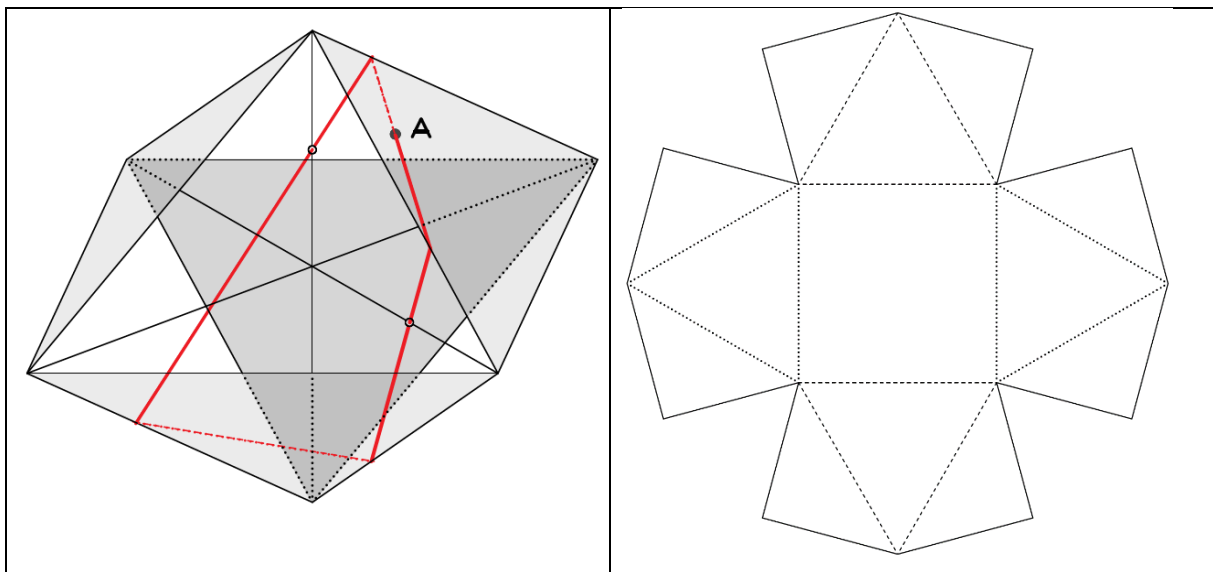
Die Aufgabe ist einfach lösbar: Es ist nur die angegebene auf Fernpunkte zu übertragen. In vielen Fällen, wird dabei die Gerade u , welche die gesuchten Punkte U_1, U_2 liefert, den Kreis nicht schneiden. Es kommt dabei darauf an, ob die gegebenen Involutionen $A_1A_2.B_1B_2$ und $P_1P_2.Q_1Q_2$ gleich- oder gegensinnig sind.



Die Involution $i = A_1A_2.B_1B_2.U_1U_2$ ist gegensinnig, weil $A_1B_1U_1$ und $A_2B_2U_2$ einen verschiedenen Richtungssinn haben, ebenso $j = P_1P_2.Q_1Q_2.U_1U_2$, weil auch $P_1Q_1U_1$ und $Q_2Q_2U_2$ verschiedenen gleichen Richtungssinn haben.

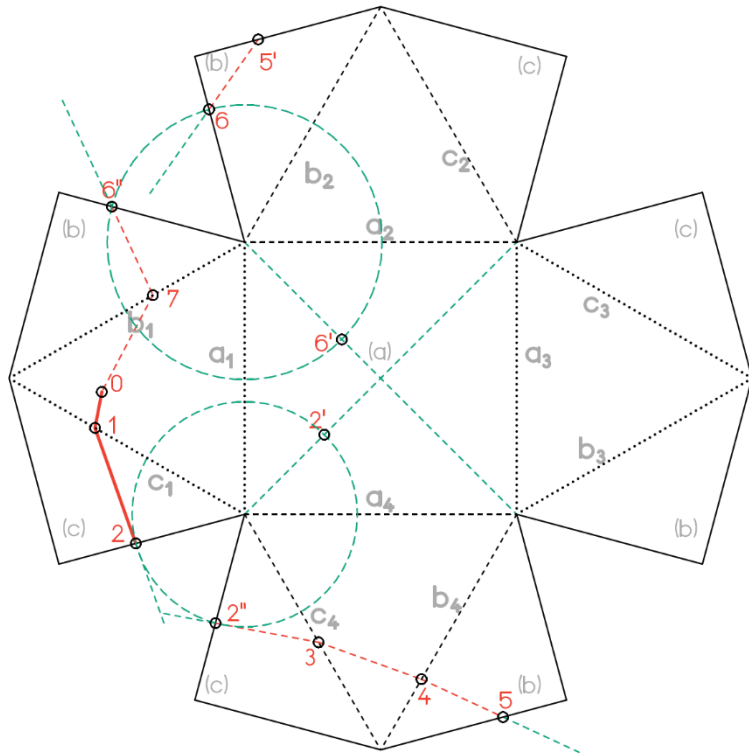
Seite 182 Zeichnen Sie den Weg des Käfers in diese Vorlage für einen Heptaeder ein.

Grundlage ist ein Heptaeder: Aufbauend von einem Oktaeder besteht er aus zwei Paaren gegenüberliegender Dreiecke sowie aus den drei Quadraten in den Mittelebenen. Hier noch einmal eine Ansicht und die Vorlage für ein Modell und die Spielregeln: Ein Käfer startet in A auf der sichtbaren Außenfläche und krabbelt einigermaßen geradeaus immer weiter auf der Fläche: wenn sich ihm eine Fläche entgegenstellt, darf er sie durchbohren und gerade weiterwandern.



In Stichworten:

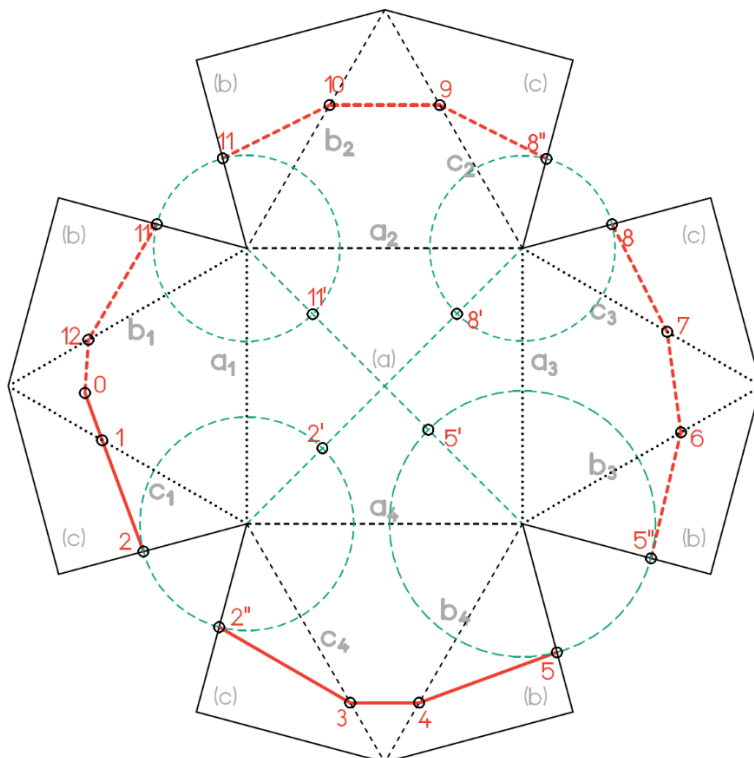
Start in 0 = A im Dreieck Δ_1 ,
 in 1 wird c_1 erreicht,
 weiter in (c) bis 2,
 in 2 (= 2' = 2'') wird (a) durch
 bohrt, und zwar knickfrei im
 Durchstoßungspunkt 2',
 weiter in (c) bis 3 auf c_4 ,
 dann in Δ_4 , bis 4 auf b_4 ,
 dann in (b) gerade bis 7:
 in 5 wird (c) durchbohrt,
 in 6 dort wird noch einmal
 (a) durchbohrt, verbleibend
 in 7 wird b_1 getroffen.
 dann zum Startpunkt in Δ_1
 zurück – aber jetzt (ab der
 Strecke 2 – 3) auf der
 Rückseite der Modellvorlage.



Erläuterungen zur Zeichnung: Der Weg (0 – 1 – 2 ...) ist rot eingezeichnet, gestrichelt, wenn er auf der Rückseite der Vorlage (nicht der Rückseite in Blickrichtung!) verläuft. Grüne Linien sind Konstruktionslinien für die Durchbohrungspunkte bzw. Andeutungen für die gleichen Winkel, zu beachten beim Weg in (b) auf dem Abschnitt 4 – 5 – 6.

Der Weg verläuft ganz in den Dreiecken Δ_1 und Δ_4 sowie den Quadraten (b) und (c).

Es gibt viele andere Möglichkeiten, z. B. der folgende Weg, der alle Flächen außer (a) genau einmal überstreicht (oder "unterstreicht").



In Stichworten:

Start in 0 = A im Dreieck Δ_1 ,
 in 1 Wechsel in Quadrat (c),
 in 2 wird (a) durchbohrt,
 in 3 Wechsel in Dreieck Δ_3 ,
 in 4 Wechsel in Quadrat (b),
 in 5 wird (a) durchbohrt,
 in 6 Wechsel in Dreieck Δ_3 ,
 in 7 Wechsel in Quadrat (c),
 in 8 wird (a) durchbohrt,
 in 9 Wechsel in Dreieck Δ_2 ,
 in 10 Wechsel in Quadrat (b),
 in 11 wird (a) durchbohrt,
 in 12 Wechsel in Dreieck Δ_1 ,
 dann Ankunft am Ort des
 Beginns, aber auf der Unter-
 seite.
 (a) wurde 4 mal durchbohrt,
 (b) und (c) niemals.

Seite 268 (265) (Beispiel 6): Eine räumliche projektive Abbildung $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ sei gegeben

$$\text{durch die Matrix } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Fixelemente.

Das charakteristische Polynom ist

$$\rho(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2 = 0 \quad (\text{durch Entwickeln nach der 1. Zeile})$$

Eigenwerte: 1, 1, -1, -1.

$$\text{zu } \lambda = 1: (\mathbf{A} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ liefert } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Der Rang der Matrix ist 3; es gibt 1 lu Lösung $(0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$.

Der Fernpunkt der z-Achse ist Fixpunkt.

$$\text{zu } \lambda = -1: (\mathbf{A} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ liefert } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{der Rang ist 2})$$

mit 1u Lösungen: $(0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$, $(0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$.

Die Fernpunkte der x- und der y-Achse und damit alle Fernpunkte des xy-Ebene sind Fixpunkte.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind die gleichen.

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ liefert } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ und die Lösung } (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \text{ (der Rang ist 3);}$$

d.h. die Ebene $x_0 = 0$, also die Fernebene, ist Fixebene, sogar Fixpunktebene (s.o.).

$$(\mathbf{A}^T + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ liefert } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ mit den Lösungen } (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T,$$

also sind die Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, also alle Ebenen der x_3 -Achse, Fixebenen, die x_3 -Achse selber eine Fixgerade als Träger eines Büschels von Fixebenen.

Zusammengefasst: Die Fernebene ist Fixpunktebene, die x_3 -Achse Fixgerade.

Die inhomogenen Abbildungsgleichungen sind: $x' = -x$; $y' = -y$; $z' = z + 1$;

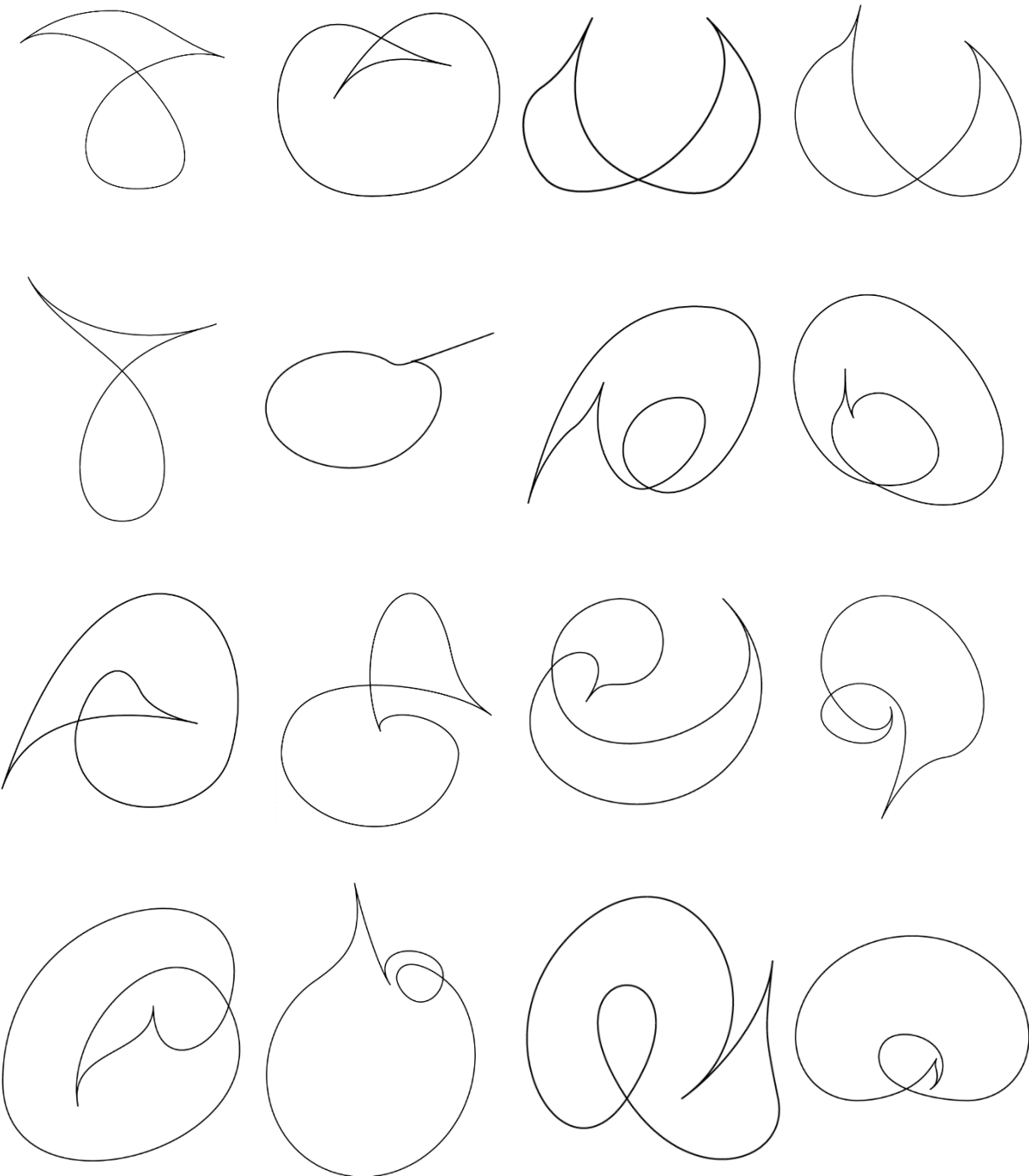
Man kann die Abbildung als räumliche Gleitachsenspiegelung bezeichnen.

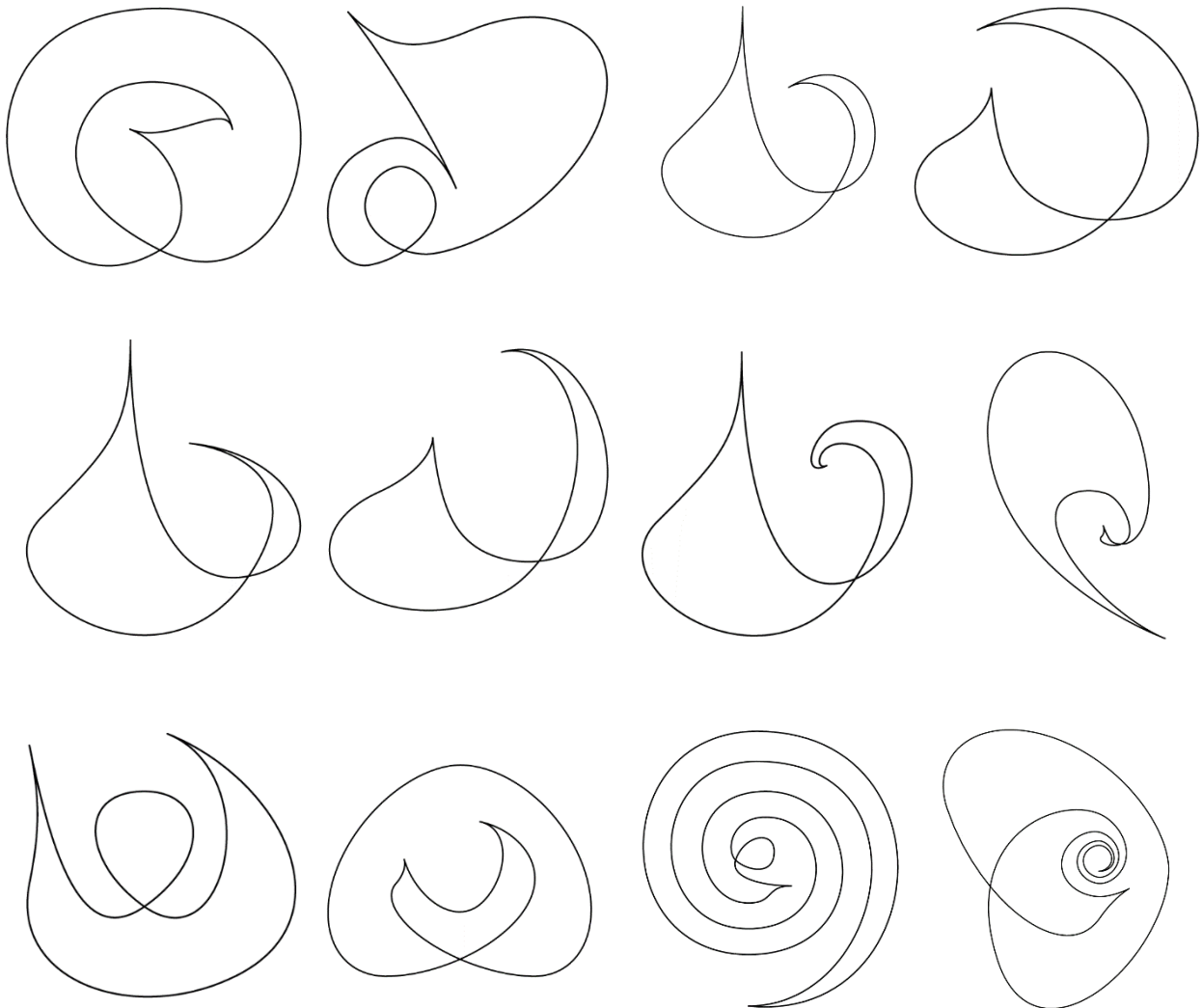
Seite 302 (299) "Wer sucht, der findet" weitere Kurven, welche alle Singularitäten – Dornspitze, Wendestelle und Schnabelspitze sowie Doppelpunkt und Doppeltangente – genau einmal enthalten.

Hier eine Auswahl (Zum Teil von Schülerinnen und Schülern diverser 12. Klassen gefunden):

Dabei sind die linken beiden und die rechten beiden Kurven zueinander polar (konstruiert mit einem geeigneten Kreis, ausgenommen das erste Paar, dessen Kurven sind "nur" dual sind).

Dabei wird in treffender Weise deutlich, besonders nach dem dritten Paar, wie sich durch das Polarisieren innen und außen vertauschen.





Kurven 12. Klasse und 12. Ordnung (wie auch die beiden letzten):

