

Man dualisiere die räumliche DESARGUES'sche Konfiguration

Die DESARGUES'sche Figur im Raum besteht aus 10 Punkten, 10 Geraden und 5 Ebenen.

Durch jeden Punkt gehen 3 Geraden und 3 Ebenen.

Jede Gerade trägt 3 Punkte und 2 Ebenen.
Jede Ebene enthält 6 Punkte und 4 Geraden.

Die dazu duale Figur besteht aus 10 Ebenen, 10 Geraden und 5 Punkten.

In jeder Ebene liegen 3 Geraden und 3 Punkte.

Jede Gerade trägt 3 Ebenen und 2 Punkte.
Jeder Punkt enthält 6 Ebenen und 4 Geraden.

Daraus wird schon ersichtlich, dass der räumliche DESARGUES, anders als der ebene, nicht zu sich selbst dual ist.

Aufbau DESARGUES im P_3

Seien Z ein beliebiger Punkt und a, b, c drei Geraden durch Z . Diese bilden ein Dreikant abc und zugleich ein Dreiflach $\alpha\beta\gamma$ mit den Ebenen $\alpha = [bc]$, $\beta = [ac]$, $\gamma = [ab]$.

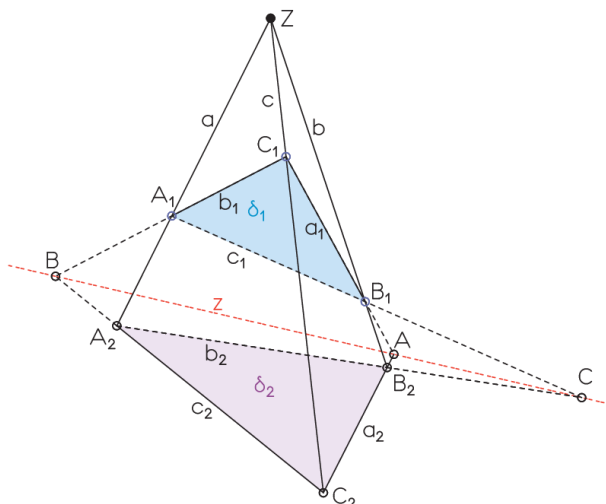
Hinzu kommen zwei Ebenen δ_i , die nicht durch Z gehen, $i = 1$ und 2 .

Die Schnittpunkte von a, b, c mit δ_i ergeben Dreiecke $A_iB_iC_i$ mit den zugehörigen Dreiseiten $a_ib_ic_i$, $i = 1$ und 2 .

Die Dreiecke sind zentral-perspektiv bzgl. Z . Zugeordnete Seiten, z.B. a_1 und a_2 , liegen in der Ebene α , haben den Schnittpunkt $A = a_1 \cdot a_2$. Entsprechend: b_1 und b_2 in β mit $B = b_1 \cdot b_2$; c_1 und c_2 in γ mit $C = c_1 \cdot c_2$.

Diese Seiten liegen aber auch in δ_1 bzw. δ_2 , die Schnittpunkte A, B, C müssen also in $z = \overline{\delta_1\delta_2}$ liegen.

Die Dreiseite $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ sind damit axial-perspektiv bzgl. z .



Aufbau dualer DESARGUES im P_3

Seien ζ eine beliebige Ebene und a, b, c drei Geraden in ζ . Diese bilden ein Dreiseit abc und zugleich ein Dreieck ABC mit den Punkten $A = b \cdot c$, $B = a \cdot c$, $C = a \cdot b$.

Hinzu kommen zwei Punkte D_i , die nicht in ζ liegen, $i = 1$ und 2 .

Die Verbindungsebenen von A, B, C mit D_i ergeben die Dreifläche $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ mit den zugehörigen Dreikants $a_ib_ic_i$, $i = 1$ und 2 .

Die Dreifläche sind planar-perspektiv bzgl. ζ . Zugeordnete Kanten, z.B. a_1, a_2 , gehen durch Punkt A mit Verbindungsebene $\alpha = [a_1 a_2]$. Entsprechend a_2 und b_2 durch B mit $\beta = [b_1 b_2]$; c_1 und c_2 durch C mit $\gamma = [c_1 c_2]$.

Diese Kanten gehen auch durch D_1 bzw. D_2 , die verbindenden Ebenen α, β, γ müssen also durch $z = \overline{D_1D_2}$ gehen.

Die Dreikants $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ sind damit axial-perspektiv bzgl. z .

