

DESARGUES-ähnliche Figuren im P^n

Alexander Stolzenburg

09.03.2026

In einer früheren Arbeit habe ich DESARGUES-ähnliche Figuren im P^5 beschrieben und mich dabei der Tatsache bedient, dass die Punkte des P^5 den Kegelschnitten im P^2 zugeordnet werden können und die Geraden den Kegelschnitt-Büschele, die Ebenen den Bündeln u.s.w. Von dieser Bindung kann man sich gänzlich freimachen, wenn man einen Punkt im P^5 als den Schnitt von 5 Hyperebenen A, B, C, D, E beschreibt, die Geraden als Schnitt von dreien u.s.w. Sogar die Symbolik kann man weitgehend übernehmen: Man lese ABCDE nicht als den Kegelschnitt durch 5 Punkte des P^2 , sondern als den Schnittpunkt von Hyperebenen des P^5 , ABCD nicht als Kegelschnittbüschel, sondern direkt als die Gerade des P^5 , die vier Hyperebenen gemeinsam haben.

Im Übrigen, und das ist wohl die Hauptsache, ist man nicht auf die Dimension 5 beschränkt, die neuen Überlegungen gelten für projektive Räume aller Dimensionen $n \geq 3$.

Wichtig ist i.F. die Dimensionsformel:

Wenn zwei Teilräume T^a und T^b des P^n die Dimensionen a und b besitzen, dann gilt für die Dimensionen von Verbindungsraum und Schnittraum mit den Symbolen $\vee$ für das Verbinden und $\wedge$ für das Schneiden.

$$\dim(T^a \vee T^b) + \dim(T^a \wedge T^b) = \dim(T^a) + \dim(T^b) \quad \text{für } -1 \leq a, b < n. \quad (*)$$

Es ist $\dim(T^a \wedge T^b) = -1$ für windschiefe T^a und T^b .

Behauptung: Im P^n seien $k > 1$ Teilräume mit der Dimension d in allgemeiner Lage gegeben, wobei je zwei von ihnen den ganzen P^n aufspannen.

$$\text{Dann hat ihr Schnittraum die Dimension } k \cdot d - (k - 1) \cdot n. \quad (**)$$

Beweis (mit Induktion):

Seien $S_1, \dots, S_k$ die k Teilräume mit $\dim(S_i) = d$ und $S_{12\dots j}$ der Schnittraum der S_i , $i = 1 \dots j$. Für $k = 2$ ist die Aussage gemäß (*) richtig: $n + \dim(S_{12}) = d + d$, also $\dim(S_{12}) = 2 \cdot d - 1 \cdot n$.

Sei nun die Aussage richtig für ein $k (> 1)$.

Dann ist (*) anzuwenden für die zwei Teilräume $S_{12\dots k}$ und S_{k+1} :

$$k \cdot d - (k - 1) \cdot n + d = n + \dim(S_{12\dots k+1})$$

$$\dim(S_{12\dots k+1}) = k \cdot d - (k - 1) \cdot n + d - n = (k + 1) \cdot d - k \cdot n + n - n = k \cdot d - ((k + 1) - 1) \cdot n,$$

d.h. die Behauptung gilt auch für $k + 1$, also für alle $k \geq 2$. qed

Speziell hat der Schnitt von k Hyperebenen in allgemeiner Lage die Dimension $n - k$ (***)

Bezeichnungen: Hyperebenen: A, B, ... oder $A_1, A_2,$

Schnitte von Hyperebenen: AB, ABC, ... oder $A_1A_2, A_1A_2A_3, \dots$ u.s.w.

Für das Folgende sind zwei Abkürzungen hilfreich:

$$\{A\}_k^m \text{ besteht aus den } \binom{m}{k} \text{ Kombinationen zu je k aus den } A_1, A_2, \dots, A_m,$$
$$[X]_w = X_1X_2 \dots X_w.$$

Das Ziel ist, Figuren in Räumen P^n mit $n > 3$ zu studieren, die der DESARGUES'schen ähneln.

Leitfaden dafür ist der folgende Aufbau einer DESARGUES'schen Figur im P^3 .

Am Anfang steht ein Punkt Z , durch den 3 (Hyper-)Ebenen gehen und die drei Schnittgeraden dieser Ebenen. Diesen Dreikant oder Dreiflach (es ist ja beides) bezeichnen wir kurz mit Ω_3^Z . Dann nehmen wir 2 (Hyper-)Ebenen hinzu. Die Schnittpunkte und -geraden des Ω_3^Z mit diesen Ebenen sind sich zentral-perspektiv zugeordnet vermöge Z . Die zugeordneten werden nun verbunden. Die Schnitte der Verbindungen treffen sich in einer Geraden z und in 3 Punkten von z .

Kurz das Schema, nach dem das Ganze für allgemeinere Fälle dargestellt werden soll:

, Z' : $Z(A_1A_2A_3)$, ein T^0 , sei gegeben.

Der $3\Omega_3^Z$ besteht nun aus den $3T^2 : (\{A\}_1^3)$ und den $3T^1 : (\{A\}_2^3)$.

Mit den 2 zusätzlichen $T^2 X_1, X_2$ ergeben sich als Schnitte mit $3\Omega_3^Z$ die $3T^1 : (\{A\}_1^3 X_i)$ und die $3T^0 : (\{A\}_1^2 X_i)$, ($i = 1, 2$). Die zugeordneten Teilräume werden jetzt verbunden; das ergibt die $3T^0 : (\{A\}_1^3 [X]_2)$ und $1T^1 : (\{A\}_1^0 [X]_2)$, kurz $([X]_2)$.

Dieses Ergebnis bezeichnen wir mit , z' – es besteht aus einer Geraden mit 3 ihrer Punkte.

, Z' und , z' bedeuten also Anfang bzw. Ende in funktionaler Hinsicht, nicht notwendig Punkt und Gerade.

Und nun im P^n :

Wir gehen im P^n aus von m ($3 \leq m \leq n$) Hyperebenen $A_1, A_2, \dots, A_m$, also Teilräumen T^{n-1} in allgemeiner Lage. Ihr Schnitt soll die Rolle des Zentrums einnehmen, und zwar ist , $Z' : (A_1A_2 \dots A_m)$ oder $\{A\}_m^m$ – nach (***) ein T^{n-m} .

Aufbau des $m\Omega_n^Z$:

Je k dieser mT^{n-1} schneiden sich in einem von insgesamt $\binom{m}{k} T^{n-k}(\{A\}_k^m)$, ($0 \leq k \leq m$).

Zusammen bilden diese Teilräume den maßgeblichen $m\Omega_n^Z$ mit $A_1, \dots, A_m$.

Für $k = m$ hat man dabei , Z' als $T^m : (\{A\}_m^m)$. (Für $k = 0$ erhält man den vollen P^n).

w weitere Hyperebenen,

die nicht durch Z gehen, werden dazugenommen, nämlich $X_1, X_2, \dots, X_w$. Diese schneiden die Teilräume von $m\Omega_n^Z$ nach (***) je in einem $T^{n-1-k} : (\{A\}_k^m X_i)$, $0 \leq k \leq n-w-1$, $2 \leq i \leq w$.

Für $k = 0$ ergibt sich der bloße Schnittraum der zusätzlichen Hyperebenen : $([X]_w)$.

Für $k = n-w$ wäre der Schnittraum = , Z' – und das hatten wir ausgeschlossen.

Schnitte der Verbindungsräume der zugeordneten Räume:

Zugeordnet seien jetzt die in gleichen Räumen von $m\Omega_n^Z$ liegenden Schnitt Räume mit den X_i .

Als Schnitt der zugeordneten Räume erhält man die $\binom{m}{k} T^{(n-w)-k} : (\{A\}_k^m [X]_w)$

für $k = 0, 1, \dots, (n-w)-1$ (und $3 \leq m \leq n$, $2 \leq w \leq n$).

Für jedes m bilden diese Teilräume (für die zulässigen k) eine Ausgestaltung des Endes , z' .

Nach so vielen verdichteten und verdichtenden Formeln können einige Beispiele hilfreich sein, in denen die Ergebnisse anschaulich charakterisiert werden, soweit das möglich ist.

Merken sollte man sich: n = Dimension des Raumes, in dem sich alles abspielt.

m = Anzahl der Hyperebenen (T^{n-1}) von $m\Omega_n^Z$

w = Anzahl der T^{n-1} , die mit Ω_n^Z zum Schnitt gebracht werden

k = Laufvariable beim Verbinden der zugeordneten Teilräume verschiedener Dimensionen

Tabelle für $n = 3, 4, 5, 6$ und $m = n$

Dann ist z' ein Punkt des P^n .

Für $\{A\}_k^m$ steht hier aus typographischen Gründen nur $\{A\}_k$.

n	w	k	Anz	z'	Beschreibungen von z'
3	2	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_2)$	Eine Gerade (der Schnitt von X_1, X_2) ...
		1	3	$T^0(\{A\}_1[X]_2)$	... mit 3 ihrer Punkte
	3	0	1	$T^0(\{A\}_0[X]_3)$	Der Schnittpunkt der 3 zusätzlichen (Hyper-)(Ebenen)
4	2	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_2)$	In einer Ebene (dem Schnitt von X_1, X_2) ... (1)
		1	4	$T^1(\{A\}_1[X]_2)$	... 4 Geraden ...
		2	6	$T^0(\{A\}_2[X]_2)$	... mit allen 6 Schnittpunkten
	3	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_3)$	Eine Gerade ...
		1	4	$T^0(\{A\}_1[X]_3)$	... mit 4 ihrer Punkte
	4	0	1	$T^0(\{A\}_0[X]_4)$	Der Schnittpunkt der 4 zusätzlichen Hyperebenen
5	2	0	1	$T^3(\{A\}_0[X]_2)$	In einem T^3 (Schnitt der 2 Hyperebenen) ... (2)
		1	5	$T^2(\{A\}_1[X]_2)$	... 5 Ebenen ...
		2	10	$T^1(\{A\}_2[X]_2)$	... mit ihren 10 Schnittgeraden und ...
		3	10	$T^0(\{A\}_3[X]_2)$	... und ihren 10 Schnittpunkten
	3	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_3)$	In einer Ebene (Schnitt der 3 Hyperebenen) ... (3)
		1	5	$T^1(\{A\}_1[X]_3)$	... 5 Geraden ...
		2	10	$T^0(\{A\}_2[X]_3)$	... mit allen 10 Schnittpunkten
	4	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_4)$	Eine Gerade ...
		1	5	$T^0(\{A\}_0[X]_4)$	... mit 5 ihrer Punkte
	5	0	1	$T^0(\{A\}_0[X]_5)$	Der Schnittpunkt der 5 zusätzlichen Hyperebenen
6	2	0	1	$T^4(\{A\}_0[X]_2)$	In einem T^4 ...
		1	6	$T^3(\{A\}_1[X]_2)$	... 6 T^3 ...
		2	15	$T^2(\{A\}_2[X]_2)$	... mit allen 15 Schnittebenen und ...
		3	20	$T^1(\{A\}_3[X]_2)$	... und allen 20 Schnittgeraden der T^3 und ...
		4	15	$T^0(\{A\}_4[X]_2)$	... und allen 15 Schnittpunkten der T^3
	3	0	1	$T^3(\{A\}_0[X]_3)$	In einem T^3 ... (4)
		1	6	$T^2(\{A\}_1[X]_3)$	... 6 Ebenen ...
		2	15	$T^1(\{A\}_2[X]_3)$	... mit allen 15 Schnittgeraden und ...
		3	20	$T^0(\{A\}_3[X]_3)$	... und allen 20 Schnittpunkten
	4	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_4)$	In einer Ebene ...
		1	6	$T^1(\{A\}_1[X]_4)$	... 4 Geraden ...
		2	15	$T^0(\{A\}_2[X]_4)$	... mit allen 6 Schnittpunkten
	5	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_5)$	Eine Gerade ...
		1	6	$T^0(\{A\}_1[X]_5)$	... mit 6 ihrer Punkte

(1) Ein ebenes Viereit mit seinen 6 Ecken

(2) Eine klassische DESARGUES'sche Figur im P^3

(3) Ein ebenes Pentagramm mit seinen 10 Ecken

(4) Ein Hexaeder mit 15 Kanten und 20 Ecken (Genauerer findet sich im Anhang, S.6).

Tabelle für $n = 4, 5, 6$ und $m = n - 1$

Dann ist π, Z^* eine Gerade des P^n .

Für $\{A\}_k^m$ steht hier wieder nur $\{A\}_k$.

n	w	k	Anz	π, Z^*	Beschreibungen von π, Z^*
4	2	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_2)$	In einer Ebene (dem Schnitt von X_1, X_2) ... (1)
		1	3	$T^1(\{A\}_1[X]_2)$	... 3 Geraden ...
		2	3	$T^0(\{A\}_2[X]_2)$	... mit allen 3 Schnittpunkten
	3	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_3)$	Eine Gerade ...
		1	3	$T^0(\{A\}_1[X]_3)$	... mit 3 ihrer Punkte
	4	0	1	$T^0(\{A\}_0[X]_4)$	Der Schnittpunkt der 4 zusätzlichen Hyperebenen
	5	0	1	$T^3(\{A\}_0[X]_2)$	In einem T^3 (dem Schnitt von X_1, X_2) ... (2)
		1	4	$T^2(\{A\}_1[X]_2)$	... 4 Ebenen ...
		2	6	$T^1(\{A\}_2[X]_2)$	... mit ihren 6 Schnittgeraden ...
5	2	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_2)$	In einer Ebene ... (3)
		1	4	$T^1(\{A\}_1[X]_2)$	... mit 4 Geraden ...
		2	6	$T^0(\{A\}_2[X]_2)$	... mit allen 6 Schnittpunkten
	3	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_3)$	In einer Ebene ... (3)
		1	4	$T^1(\{A\}_1[X]_3)$	... mit 4 Geraden ...
		2	6	$T^0(\{A\}_2[X]_3)$	... mit allen 6 Schnittpunkten
	4	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_4)$	Eine Gerade ...
		1	4	$T^0(\{A\}_1[X]_4)$	... mit 4 ihrer Punkte
	5	0	1	$T^0(\{A\}_0[X]_5)$	Der Schnittpunkt der 5 zusätzlichen Hyperebenen
6	2	0	1	$T^4(\{A\}_0[X]_2)$	In einem T^4 ...
		1	5	$T^3(\{A\}_1[X]_2)$	... 5 T^3 und ...
		2	10	$T^2(\{A\}_2[X]_2)$	... mit allen 10 Schnittebenen ...
		3	10	$T^1(\{A\}_3[X]_2)$	... und allen 10 Schnittgeraden der T^3 und
		4	5	$T^0(\{A\}_4[X]_2)$	... und allen 5 Schnittpunkten der T^3
	3	0	1	$T^3(\{A\}_0[X]_3)$	In einem T^3 ... (4)
		1	5	$T^2(\{A\}_1[X]_3)$	... 5 Ebenen ...
		2	10	$T^1(\{A\}_2[X]_3)$	... mit allen 10 Schnittgeraden ...
		3	10	$T^0(\{A\}_3[X]_3)$	... und allen 10 Schnittpunkten der Ebenen
	4	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_4)$	In einer Ebene ... (5)
		1	5	$T^1(\{A\}_1[X]_4)$	... mit 5 Geraden ...
		2	10	$T^0(\{A\}_2[X]_4)$	... und allen 10 Schnittpunkten
	5	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_5)$	Eine Gerade ...
		1	5	$T^0(\{A\}_1[X]_5)$	... mit 5 ihrer Punkte
	6	0	0	$T^0(\{A\}_0[X]_6)$	Der Schnittpunkt der 6 zusätzlichen Hyperebenen

(1) Ein ebenes Dreieck mit seinen 3 Ecken

(2) Ein räumlicher Tetraeder: 4 Flächen und 6 Kanten und 4 Ecken

(3) Ein ebenes Viereck mit seinen 6 Ecken

(4) Eine klassische DESARGUES'sche Figur im P^3

(5) Ein ebenes Pentagramm mit seinen 10 Ecken

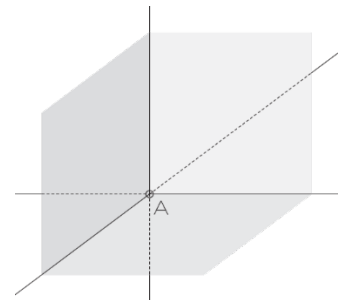
Tabelle für $n = 5, 6$ und $m = n - 2$

Dann ist $\mathcal{Z}^*$ eine Ebene des P^n .

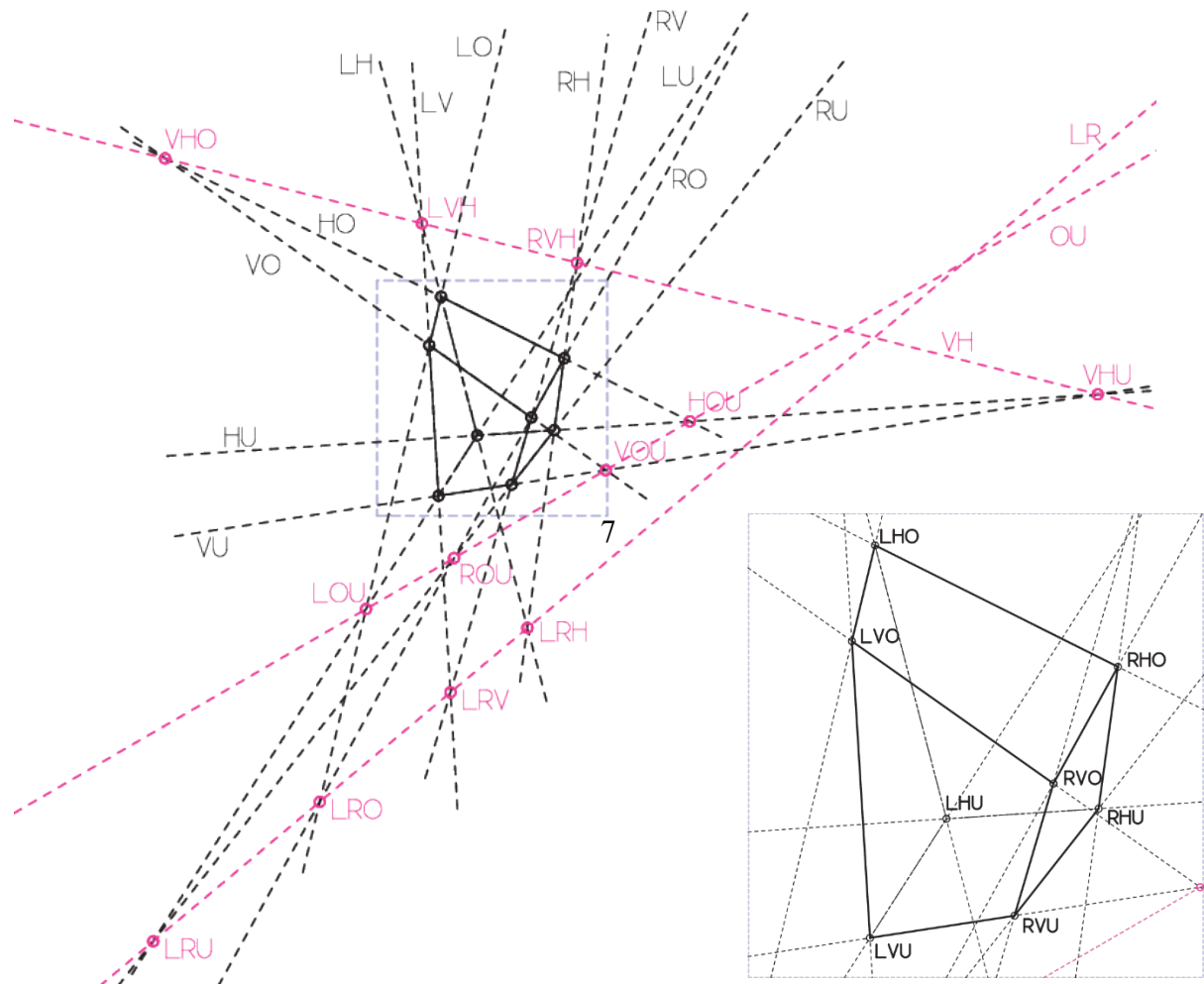
Für $\{A\}_k^m$ steht hier wieder nur $\{A\}_k$.

n	w	k	Anz	$\mathcal{Z}^*$	Beschreibungen
5	2	0	1	$T^3(\{A\}_0[X]_2)$	In einem T^3 (dem Schnitt von X_1X_2) ... (1)
		1	3	$T^2(\{A\}_1[X]_2)$	... 3 Ebenen ...
		2	3	$T^1(\{A\}_2[X]_2)$	... mit ihren 3 Schnittgeraden ...
		3	1	$T^0(\{A\}_3[X]_2)$	... mit ihrem 1 Schnittpunkt
	3	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_3)$	In einer Ebene ... (2)
		1	3	$T^1(\{A\}_1[X]_3)$	... 3 Geraden ...
		2	3	$T^0(\{A\}_2[X]_3)$	... mit ihren 3 Schnittpunkten
	4	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_4)$	Eine Gerade ...
		1	3	$T^0(\{A\}_1[X]_4)$	... mit 3 ihrer Punkte
	5	0	1	$T^0(\{A\}_0[X]_5)$	Der Schnittpunkt der 5 zusätzlichen Hyperebenen
6	2	0	1	$T^4(\{A\}_0[X]_2)$	In einem T^4 (dem Schnitt von X_1X_2) ...
		1	4	$T^3(\{A\}_1[X]_2)$	... 4 T^3 und ...
		2	6	$T^2(\{A\}_2[X]_2)$	... und 6 Ebenen und ...
		3	4	$T^1(\{A\}_3[X]_2)$	... und 4 Geraden und ...
		4	1	$T^0(\{A\}_4[X]_2)$	... und 1 Punkt
	3	0	1	$T^3(\{A\}_0[X]_3)$	In einem T^3 ... (3)
		1	4	$T^2(\{A\}_1[X]_3)$	... 4 Ebenen ...
		2	6	$T^1(\{A\}_2[X]_3)$	... und 6 Geraden ...
		3	4	$T^0(\{A\}_3[X]_3)$	... und 4 Punkten
	4	0	1	$T^2(\{A\}_0[X]_4)$	In einer Ebene ... (4)
		1	4	$T^1(\{A\}_1[X]_4)$	... 4 Geraden ...
		2	6	$T^0(\{A\}_2[X]_4)$	... mit allen 6 Schnittpunkten
	5	0	1	$T^1(\{A\}_0[X]_5)$	Eine Gerade ...
		1	4	$T^0(\{A\}_1[X]_5)$	... mit 4 ihrer Punkte
	6	0	0	$T^0(\{A\}_0[X]_6)$	Der Schnittpunkt der 6 zusätzlichen Hyperebenen

- (1) Ein räumliches Dreiflach/Dreikant mit 1 Ecke (s. Zeichnung)
- (2) Ein ebenes Dreieck mit seinen 3 Ecken
- (3) Ein räumlicher Tetraeder samt 4 Ecken und 6 Kanten
- (4) Ein ebenes Viereck mit seinen 6 Ecken



Soweit erst einmal. Die Ergebnisse sind ganz amüsant. Was folgt nicht alles aus wenig Geometrie und viel Kombinatorik! Und das könnte noch weitergetrieben werden, etwa um die Struktur eines $\mathcal{Z}^*$ bestimmen, hinsichtlich der Anzahl von Punkten, Geraden, ... in jedem T^j , der vorkommt, hinsichtlich der Anzahl der Gerade, Ebenen, ... durch jeden T^j .

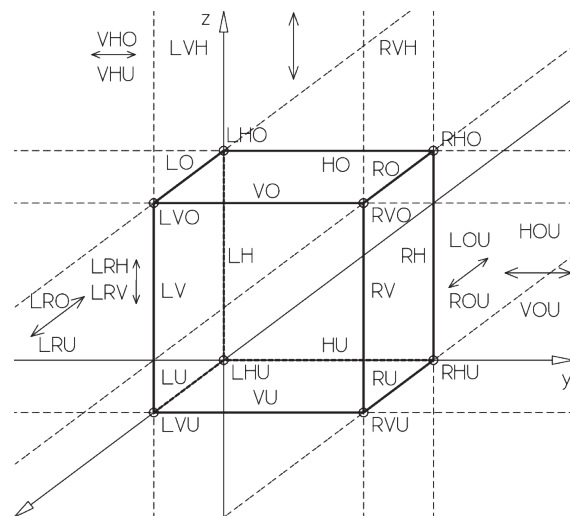


Drei Schnittgeraden der 6 Ebenen (hier in Magenta) sind herausgenommen (LR, VH, OU); sie mögen „Richtgeraden“ (für den einen in die Mitte gesetzten Hexaeder) genannt werden. Sie sind offenbar paarweise windschief. In ihnen wählt man je 4 „Richtpunkte“, welche die Kanten des Hexaeders bestimmen. Dabei ist eine Ecke als Anfangspunkt frei wählbar, ebenso die Längen der drei Kanten, die dort zusammentreffen – wobei sich ihre Richtungen aus den zuständigen Richtpunkten ergeben.

Bemerkung: Der zentrale Hexaeder hat eine Sonderrolle nur für die Erleichterung der folgenden Beschreibungen. Es könnte irgendein anderes Tripel von windschiefen Geraden als Richtgeraden gewählt werden, auch mit anderer Lage gegenüber der Ferngrade.

Beispiel mit Fernpunkten

Interessant ist auch die Verwendung eines Kubus als Hexaeder. Dann fallen in den Richtungen der drei Koordinatenachsen jeweils vier Richtpunkte in einen (Fern-)Punkt zusammen. Als Richtgeraden muss man hier die Ferngeraden der drei Koordinatenebenen ansehen. Sie sind nicht paarweise windschief zueinander.



Ähnliche Figuren

Nicht ganz gleich, aber in mancher Hinsicht ähnlich zu dieser Figur, sind der vollständige Hexaeder [S. 54] und die REYE-Konfiguration [S. 57].

$$Z = E - K + F = 20 - 60 + 66 = 26.$$

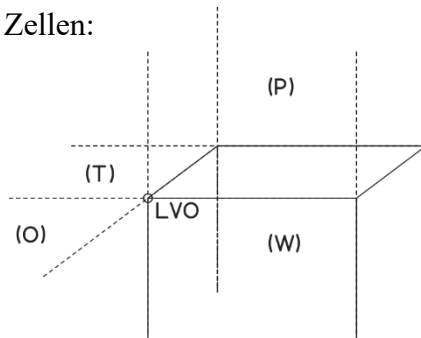
Für den Kubus als zentralem Hexaeder ergibt das Zählen:

Ecken: 8 Würfecken und 1 in jedem der 3 Fernpunkte, also existieren **11** Ecken.

Kanten: Da auf jeder der 12 Geraden 3 verschiedene Punkte, also auch 3 Kanten liegen, gibt es insgesamt **36** Kanten.

Flächen: Jede Ebene enthält 5 Geraden und diese gliedern die Ebene in 7 Felder. Die Oktanten an zwei in einer Würfebene gegenüberliegenden Ecken hängen dabei über die Fernebene hinweg zusammen. Somit gibt es im Ganzen $6 \cdot 7 =$ **42** Felder.

Zellen:



Das Innere des Würfels (W), über jeder Würfel­fläche eine Pyramide (P) mit einem Fernpunkt, über jedem Paar von gegenüberliegenden Kanten die über die Fernebene hinweg zusammenhängenden Quader (T) und zuletzt über jedem Paar von gegenüberliegenden Ecken die über die Fernebene hinweg zusammenhängenden Doppeltetraeder (O). Insgesamt gibt es also $1 + 6 + 6 + 4 =$ **17** Zellen.

Die EULER'sche Formel im P^3 bestätigt das: $11 - 36 + 42 - 17 = 0$.