

Geometrie im P^5 – DESARGUES-ähnliche Figuren

Alexander Stolzenburg

31.08.2025

Hintergrund ist die Darstellung der Punkte im P^5 durch Kegelschnitte im P^2 (bzw. 5 Punkte, die ihn festlegen), durch Büschel von Kegelschnitten, festgelegt durch 4 Punkte u.s.w.¹⁾.

Es stellt sich heraus, dass im P^5 Figuren ähnlich der DESARGUES'schen existieren – die Kombinatorik ergibt das. Außer Punkten und Geraden wie beim ebenen DESARGUES kommen hier auch Ebenen, 3-dimensionale Räume und Hyperebenen T^4 vor. Die Teilräume werden dabei durch die Grundpunkte von Kegelschnittbüscheln, -bündeln, ... charakterisiert.

Hintergrund für die Bezeichnungen sei eine gewöhnliche DESARGUES'sche Figur im P^3 mit einem Punkt Z' als Zentrum und 3 Ebenen α , β , und γ sowie 3 Geraden a , b und c durch Z' – ein Dreiflach oder Dreikant. Zwei Ebenen ξ_1 und ξ_2 , welche nicht durch Z gehen, schneiden das Dreiflach $\alpha\beta\gamma$ in den Seiten des Dreiseits $a_i b_i c_i$ ($i = 1$ oder 2) und schneiden den Dreikant abc in den Ecken des Dreiecks $A_i B_i C_i$. Die beiden Dreiseite/Dreiecke sind bzgl. Z zentriert.

Zwei weitere Ebenen ξ_1 und ξ_2 haben eine Gerade z gemeinsam. Die Ebenen α , β , γ schneiden z in Punkten A , B , C . Diese sind zugleich die Schnittpunkte zugeordneter Dreieckseiten: $a_1 \cdot a_2 = A$, $b_1 \cdot b_2 = B$ und $c_1 \cdot c_2 = C$ – alles drei Punkte von z .

An dieses Muster werden wir uns oft halten, wenn es ankommt bei den inneren Bedeutungen der jetzt zu entwickelnden Figuren, auch wenn Anzahlen und Dimensionen abweichen. Gegebenenfalls werden die Dimensionen durch Hochzahlen angedeutet. Beispiel „Drei- T^2 “ für ein Dreiflach, „Drei- T^1 “ für ein Dreikant.

1. Fall:

Wir gehen aus von einem ‚Punkt‘ Z' : (ABCDE) und 5 Geraden a , b , c , d , e durch Z :

a : (BCDE) b : (ACDE) c : (ABDE) d : (ABCE) e : (ABCD)

Von je zweien dieser Geraden werden Ebenen (T^2) aufgespannt, von je dreien T^3 -Räume, von je vierten Hyperebenen T^4 . Das sind, der Reihe nach:

aVb : (CDE)	aVc : (BDE)	aVd : (BCE)	aVe : (BCD)	bVc : (ADE)
bVd : (ACE)	bVe : (ACD)	cVd : (ABE)	cVe : (ABD)	dVe : (ABC)
$aVbVc$: (DE)	$aVbVd$: (CE)	$aVbVe$: (CD)	$aVcVd$: (BE)	$aVcVe$: (BD)
$aVdVe$: (CB)	$bVcVd$: (AE)	$bVcVe$: (AD)	$bVdVe$: (AC)	$cVdVe$: (AB)
$aVbVcVd$: (E)	$aVbVcVe$: (D)	$aVbVdVe$: (C)	$aVcVdVe$: (B)	$bVcVdVe$: (A)

Es liegt ein „Fünf- T^4 “ vor mitsamt den von diesen T^4 erzeugten Schnitträumen T^1 , T^2 , T^3 . Oder: ein „Fünf- T^1 “ (Fünfkant) mitsamt den möglichen Verbindungsräumen T^2 , T^3 , T^4 .

Fall 1.a

Nun wählt man zwei Hyperebenen ξ_i : (X_i), die nicht durch Z gehen ($i = 1$ oder 2).

Diese haben den T^3 : ($X_1 X_2$) gemeinsam.

¹⁾ [A. Stolzenburg, Geometrie im P^5 – Darstellung durch Kegelschnitte, erscheint in PaeFo.de/PG]

Sie schneiden die Teilräume durch Z: die T^1 in Punkten, die T^2 in Geraden u.s.w.

Die ξ_i schneiden die T^1 in je 5 Punkten für ($i = 1$ oder 2) – die $A_i, B_i, \dots$

$a \wedge \xi_i: (BCDEX_i)$ $b \wedge \xi_i: (ACDEX_i)$ $c \wedge \xi_i: (ABDEX_i)$ $d \wedge \xi_i: (ABCEX_i)$ $e \wedge \xi_i: (ABCDX_i)$

Die ξ_i schneiden die T^2 in je 10 Geraden: $a_i, b_i, \dots$ (zugleich die Geraden durch die Punkte)

$a \vee b \wedge \xi_i: (CDEX_i)$ $a \vee c \wedge \xi_i: (BDEX_i)$ $a \vee d \wedge \xi_i: (BCEX_i)$ $a \vee e \wedge \xi_i: (BCDX_i)$ $b \vee c \wedge \xi_i: (ADEX_i)$

$b \vee d \wedge \xi_i: (ACEX_i)$ $b \vee e \wedge \xi_i: (ABDX_i)$ $c \vee d \wedge \xi_i: (ABEX_i)$ $c \vee e \wedge \xi_i: (ABDX_i)$ $d \vee e \wedge \xi_i: (ABCX_i)$

... die 10 T^3 in 10 Ebenen, zugleich Ebenen durch die Geraden und Punkte („ $\vee$ “ weggelassen):

$abc \wedge \xi_i: (DEX_i)$ $abd \wedge \xi_i: (CEX_i)$ $abe \wedge \xi_i: (BDX_i)$ $acd \wedge \xi_i: (BCX_i)$ $ace \wedge \xi_i: (BDX_i)$

$ade \wedge \xi_i: (BCX_i)$ $bcd \wedge \xi_i: (AEX_i)$ $bce \wedge \xi_i: (ADX_i)$ $bde \wedge \xi_i: (ACX_i)$ $cde \wedge \xi_i: (ABX_i)$

... die 5 Hyperebenen (T^4) in 5 T^3 :

$abcd \wedge \xi_i: (EX_i)$ $abce \wedge \xi_i: (DX_i)$ $abde \wedge \xi_i: (CX_i)$ $acde \wedge \xi_i: (BX_i)$ $bcde \wedge \xi_i: (AX_i)$

Zugeordnet seien nun diejenigen Teilräume, die dieselben Bestimmungsstücke des „Fünf- T^4 “ enthalten, aber sonst in verschiedenen der ξ -Hyperebenen liegen:

Die zugeordneten Geraden haben die 10 Schnittpunkte $(ABCX_1X_2), (ABDX_1X_2), \dots$ über alle Kombinationen zu je 3 aus ABCDE – mit festgehaltenen X_1X_2 .

Die zugeordneten Ebenen haben die 10 Schnittgeraden $(ABX_1X_2), (ACX_1X_2), \dots$ über alle Kombinationen zu je 2 aus ABCDE – mit festgehaltenen X_1X_2 .

Die zugeordneten T^3 -Räume haben die 5 Schnittebenen $(AX_1X_2), (BFX_1X_2), \dots, (EX_1X_2)$.

Alle diese Schnittelemente sind enthalten in dem $T^3: (X_1X_2)$, welcher dem „ z “ entspricht.

„ z “ ist eine räumliche DESARGUES'sche Figur innerhalb dieses T^3 mit 10 Punkten, 10 Geraden und 5 Ebenen. In jeder Geraden liegen 3 Punkte, durch jeden Punkt gehen 3 Geraden.

Insgesamt enthält die Figur im Fünf- T^4 : 1 Punkt Z, 5 Geraden a, ... e, 10 von je 2 dieser Geraden aufgespannten T^2 , 10 von je 3 Geraden aufgespannten T^3 , 5 T^4 ; weiter die 2 $T^4 \xi_1, \xi_2$ und darin als Spuren der a, b, ... je 5 Punkte, je 10 T^1 , je 10 T^2 und je 5 T^3 : dann als die Schnitte der zugeordneten Teilräume (und in z liegend: siehe oben) 10 Punkte, 10 Geraden und 5 Ebenen in 1 $T^3 (z)$, zusammen 119 Teilräume $T^k, 0 \leq k \leq 4$.

Fall 1.b

Man geht aus vom selben „Fünf- T^4 “ in Z: (ABCDE), wählt aber jetzt 3 Hyperebenen, die nicht durch Z gehen: $\xi_i: (X_i), i = 1, 2$ oder 3 .

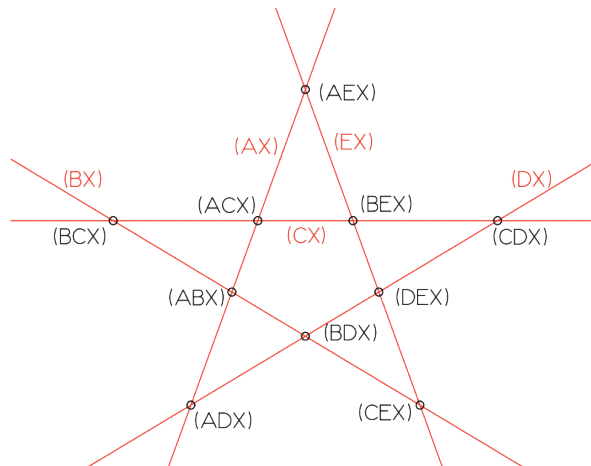
Zugeordnete Elemente, die sich schneiden, sind jetzt Ebenen und T^3 .

Die Ebenen treffen sich in 10 Punkten $(ABX_1X_2X_3), (ACX_1X_2X_3), \dots$ [über die Kombinationen zu je 2 für die ersten Plätze] aus ABCDE und die T^3 schneiden sich in den 5 Geraden $(AX_1X_2X_3), (BX_1X_2X_3), \dots, (EX_1X_2X_3)$ – alles innerhalb der Ebene z: $(X_1X_2X_3)$.

Die Schnittelemente bilden dort eine ebene Figur aus 5 Geraden und 10 Punkten, von denen je 4 in einer der Geraden liegen.

„ z “ ist ein ebenes Pentagramm.

(s. Zeichnung Seite 3; dort ist X eine Abkürzung für $X_1X_2X_3$.)



Fall 1.c

Zum selben Z : $(ABCDE)$ und „Fünf- T^4 “ werden nun 4 Hyperebenen genommen, die nicht durch Z gehen, : $\xi_i: (X_i)$, $(i = 1, \dots, 4)$. Als zuordenbare Teilräume hat man jetzt nur die Punkte $(AX_1X_2X_3X_4)$, $(BX_1X_2X_3X_4)$, $(CX_1X_2X_3X_4)$, $(DX_1X_2X_3X_4)$, $(EX_1X_2X_3X_4)$, die in der einen Gerade $z: (X_1X_2X_3X_4)$ liegen.

„ z' ist eine Gerade mit 5 Punkten.

Fall 1.d

5 Hyperebenen $\xi_i: (X_i)$, $i = 1, \dots, 5$, haben genau den einen Punkt $(X_1X_2X_3X_4X_5)$ gemein, der hier die Rolle von z einnimmt.

„ z' ist ein Punkt.

2. Fall:

Das Zentrum sei jetzt eine Gerade „ Z' : $(ABCD)$ “. und durch Z werden 4 Ebenen gewählt:

(ABC) , (ABD) , (ACD) , (BCD)

diese spannen auf: 6 T^3 : (AB) , (AC) , (AD) , (BC) , (BD) , (CD)

und 4 T^4 : (A) , (B) , (C) , (D) und bilden einen „Vier- T^3 “.

Fall 2.a

Der „Vier- T^3 “ wird ergänzt durch 2 Hyperebenen (X_1) und (X_2) .

Die schneiden die T^2 in je 4 Geraden $(ABCX_i)$, $(ABDX_i)$, $(ACDX_i)$, $(BCDX_i)$,

und die T^3 in je 6 T^2 (ABX_i) , (ACX_i) , (ADX_i) , (BCX_i) , (BDX_i) , (CDX_i) ,

die T^4 in je 4 T^3 : (AX_i) , (BX_i) , (CX_i) , (DX_i) .

Zugeordnete T^1 treffen sich in den 4 Punkten:

$(ABCX_1X_2)$, $(ABDX_1X_2)$, $(ACDX_1X_2)$, $(BCDX_1X_2)$,

zugeordnete T^2 in den 6 Geraden:

(ABX_1X_2) , (ACX_1X_2) , (ADX_1X_2) , (BCX_1X_2) , (BDX_1X_2) , (CDX_1X_2) ,

zugeordnete T^3 in den 4 Ebenen:

(AX_1X_2) , (BX_1X_2) , (CX_1X_2) , (DX_1X_2) , – und diese alle liegen im $T^3: (X_1X_2)$.

„ z' ist ein dreidimensionaler Tetraeder.

Fall 2.b

Der „Vier- T^3 “ wird ergänzt durch 3 Hyperebenen (X_1) , (X_2) und (X_3) .

Zuordenbar sind die Geraden, sie treffen sich in den 6 Punkten:

$$(ABX_1X_2X_3), (ACX_1X_2X_3), (ADX_1X_2X_3), (BCX_1X_2X_3), (BDX_1X_2X_3), (CDX_1X_2X_3),$$

weiter die T^2 in den Schnittgraden:

$$(AX_1X_2X_3), (BX_1X_2X_3), (CX_1X_2X_3), (DX_1X_2X_3),$$

und die T^3 ergeben die Schnittebene $(X_1X_2X_3)$, auf der die Geraden und die Punkte liegen.

,z' ist ein ebenes Vierseit mit seinen 6 Ecken.

Fall 2.c

Der „Vier- T^3 “ wird ergänzt durch 4 Hyperebenen $(X_1), \dots, (X_4)$.

Zuordenbar sind die Geraden, sie treffen sich in den 6 Punkten:

$$(AX_1X_2X_3X_4), (BX_1X_2X_3X_4), (CX_1X_2X_3X_4), (DX_1X_2X_3X_4), (EX_1X_2X_3X_4), (FX_1X_2X_3X_4),$$

weiter die T^2 mit den Schnittgraden:

$$(AX_1X_2X_3), (BX_1X_2X_3), (CX_1X_2X_3), (DX_1X_2X_3),$$

und die T^3 ergeben die Schnittgerade $z: (X_1X_2X_3X_4)$, auf der auch die Punkte liegen.

,z' ist eine Gerade mit 4 Punkten.

Fall 2.d

,z' ist ein Punkt – s. o.

3. Fall:

Wir wählen als „Zentrum“ eine Zentralebene $Z^2 = Z$ und als a^3, b^3, c^3 (kurz a, b, c) je einen 3-dimensionalen Teilraum, der Z enthält. Zu je zweien schneiden diese sich in Z und spannen sie Hyperebenen auf.

In Kurzform:

$,Z': (ABC)$	$,a': (BC)$	$,b': (AC)$	$,c': (AB)$
Verbindungs- T^4	$\gamma = a \vee b : (C)$	$\beta = a \vee c : (B)$	$\alpha = b \vee c : (A)$

Dieses Gebilde nennen wir ein „Drei- T^4 “.

3.a:

Es werde durch zwei Hyperebenen $\xi_1: (X_1), \xi_2: (X_2)$ ergänzt, die mit Z nicht mehr als eine Gerade gemein haben (weniger ist nicht möglich), das heißt, dass sie Z nicht enthalten.

Diese schneiden den „Drei- T^4 “ in je 3 T^2 und T^3 :

$,A_i' = a \wedge \xi_i : (BCX_i)$	$,B_i' = b \wedge \xi_i : (ACX_i)$	$,C_i' = c \wedge \xi_i : (ABX_i)$
$,a_i' = (a \vee b) \wedge \xi_i : (CX_i)$	$,b_i' = (a \vee c) \wedge \xi_i : (BX_i)$	$,c_i' = (b \vee c) \wedge \xi_i : (AX_i)$

4Zugeordnet seien nun die Teilräume, die sich nur in den Hyperebenen ξ_1 und ξ_2 unterscheiden. Ihre Verbindungsräume sind erstens die Geraden

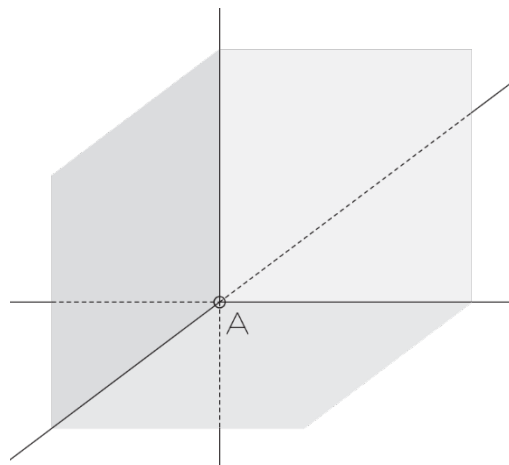
$$a: (BCX_1X_2) \quad b: (ACX_1X_2) \quad c: (ABX_1X_2)$$

zweitens die Ebenen

$$\alpha: (AX_1X_2) \quad \beta: (BX_1X_2) \quad \gamma: (CX_1X_2),$$

mit dem gemeinsamen Punkt $A: (ABCX_1X_2)$.

,z' ist ein Dreiflach/Dreikant in einem Punkt.



3.b

Derselbe „Drei- T^4 “ werde jetzt durch 3 Hyperebenen $\xi_i: (X_i)$, $i = 1, 2, 3$, ergänzt.

Zugeordnet seien nun die Teilräume, die sich nur in den Hyperebenen ξ_i unterscheiden. Ihre Verbindungsräume sind

und die Geraden a: $(AX_1X_2X_3)$ b: $(BX_1X_2X_3)$, c : $(CX_1X_2X_3)$

die Punkte C: $(ABX_1X_2X_3)$, B: $(ACX_1X_2X_3)$, C: $(BCX_1X_2X_3)$

„z“ ist ein ebenes Dreieck/Dreiseit.

3.c

Derselbe „Drei- T^4 “ werde nun durch 4 Hyperebenen $\xi_i: (X_i)$, $i = 1, \dots, 4$, ergänzt.

Als Schnitte der Verbindungen zugeordneter Teilräume verbleiben

die Punkte $(AX_1X_2X_3X_4)$ $(BX_1X_2X_3X_4)$ $(CX_1X_2X_3X_4)$

Sie liegen alle in der Geraden $(X_1X_2X_3X_4)$.

„z“ ist eine Gerade mit 4 Punkten.

3.d

„z“ ist ein Punkt.

Nachtrag

Nach alter Gewohnheit kann in einer klassischen DESARGUES'schen Konfiguration jeder Punkt, jede Ebene, ... jede Rolle übernehmen: hier gezeigt an Fall 3.a.

Beispiel (BX_1X_2) als ‚Zentrum‘:

Dann sind die Räume durch Z die T^3 (BX_1) , (BX_2) , (X_1X_2) , ihre Verbindungen (B) , (X_1) , (X_2) . Die weiteren Hyperebenen sind (A) und (C)

Die zugeordneten ‚Dreiecke‘ sind $(ABX_1)(ABX_2)(AX_1X_2)$ in (A) und $(BCX_1)(BCX_2)(CX_1X_2)$ in (C) und die entsprechenden Seiten (AB) und (BC) schneiden sich in (ABC) und genauso (AC) und (CX_1) in (ACX_1) sowie (AX_2) und (CX_2) in (ACX_2) ; und diese Treffräume liegen alle in (AC) .

Zusammenfassung

1. „Z“: T^0 und Fünf- T^4 mit 2 Hyperebenen ergeben „z“: T^3 mit räumlichem DESARGUES.
2. „Z“: T^0 und Fünf- T^4 mit 3 Hyperebenen ergeben „z“: T^2 mit einem ebenen Pentagramm.
3. „Z“: T^0 und Fünf- T^4 mit 4 Hyperebenen ergeben „z“: T^1 eine Gerade und 5 ihrer Punkte.
4. „Z“: T^1 und Vier- T^3 mit 2 Hyperebenen ergeben „z“: T^3 mit einem räumlichen Tetraeder.
5. „Z“: T^1 und Vier- T^3 mit 3 Hyperebenen ergeben „z“: T^2 mit einem Viereck.
6. „Z“: T^1 und Vier- T^3 mit 4 Hyperebenen ergeben „z“: T^1 eine Gerade und 4 ihrer Punkte.
7. „Z“: T^2 und Drei- T^4 mit 2 Hyperebenen ergeben „z“: T^3 mit einem Dreikant/Dreiflach.
8. „Z“: T^2 und Drei- T^4 mit 3 Hyperebenen ergeben „z“: T^2 mit ebenem Dreieck/Dreiseit.
9. „Z“: T^2 und Drei- T^4 mit 4 Hyperebenen ergeben „z“: T^1 eine Gerade und 3 ihrer Punkte.

Desargues im P^4

Als P^4 kann man eine Hyperebene im P^5 wählen und dann versuchen, eine DESARGUES-ähnliche Figur innerhalb des P^4 : (R) aufzubauen, eingebettet in den P^5 :

Gegeben seien ein Punkt $,Z'$ (R ABCD) und 4 Geraden durch $,Z'$:

$$,a': (R BCD), \quad ,b': (R ACD), \quad ,c': (R ABD), \quad ,d': (R ABC)$$

Zu je zweien spannen diese Geraden eine Ebene auf, insgesamt 6:

$$,ab': (R CD) \quad ,ac': (R BD) \quad ,ad': (R BC) \quad ,bc': (R AD) \quad ,bd': (R AC) \quad ,cd': (R AB)$$

und zu je dreien einen T^3 , insgesamt 4:

$$,abc': (R D) \quad ,abd': (R C) \quad ,acd': (R B) \quad ,bcd': (R A)$$

Zusammengenommen: ein „Drei- T^2 “ oder Dreiflach im P^4 (R).

Fall 1:

Nun wählt man dazu zwei P^4 -Hyperebenen $,\xi_1': (R X_1)$, $,\xi_2': (R X_2)$ [T^3 -Räume im P^5] Diese schneiden die Geraden $,a'$ u.s.w. in den Punkten

$$,A_i': (R BCDX_i) \quad ,B_i': (R ACDX_i) \quad ,C_i': (R ABDX_i) \quad ,D_i': (R ABCX_i),$$

und die Ebenen in den Geraden

$$(R CDX_i), (R BDX_i), (R BCX_i), (R ADX_i), (R ACX_i), (R ABX_i),$$

ferner die T^3 in den Ebenen

$$(R DX_i), (R CX_i), (R BX_i), (R AX_i), (i = 1 \text{ oder } 2).$$

Diese Schnitträume sind zentral-perspektiv bzgl. $,Z'$.

Die Schnittgeraden der zugeordneten Ebenen

$$(R DX_1X_2), (R CX_1X_2), (R BX_1X_2), (R AX_1X_2),$$

sind alles Geraden in (X_1X_2) .

Die Schnittpunkte der zugeordneten Geraden:

$$(R CDX_1X_2), (R BDX_1X_2), (R BCX_1X_2), (R ADX_1X_2), (R ACX_1X_2), (R ABX_1X_2)$$

sind die Ecken dieses Vierseits in der Ebene (X_1X_2) .

,z' ist also ein Vierseit mit seinen sechs Ecken.

Fall 2:

Dasselbe Dreiflach werde nun geschnitten von 3 Hyperebenen des P^4 $(R X_1)$, $(R X_2)$, $(R X_3)$.

Schnittpunkte der zugeordneten Ebenen:

$$(R AX_1X_2X_3) \quad (R BX_1X_2X_3) \quad (R CX_1X_2X_3) \quad (R DX_1X_2X_3)$$

Das sind 4 Punkte in der Gerade $(R X_1X_2X_3)$.

,z' ist also eine Gerade mit vier Punkten.

Die dreidimensionale DESARGUES-Konfiguration im P^5

Mit derselben Idee kann man auch die gewöhnliche DESARGUES-Figur im 3-dimensionalen P^3 erzeugen, indem wir nämlich die Betrachtungen auf einen T^3 -Teilraum (RS) beschränken.

Gegeben 1 Punkt Z in (RS): (RS ABC)

drei Geraden a, b, c durch Z: a: (RS BC), b: (RS AC), c: (RS AB).

Diese spannen 3 Ebenen auf:

$$\alpha = b \vee c: (RS A), \beta = a \vee c: (RS B), \gamma = a \vee b: (RS C).$$

Dieser Dreikant $\alpha\beta\gamma$ werde geschnitten von 2 beliebigen Ebenen innerhalb (RS) :

$$\xi_i: (RS X_i) \text{ für } i = 1, 2.$$

Schnittpunkte $A_i = a \wedge \xi_i: (RS BCX_i)$, $B_i = b \wedge \xi_i: (RS ACX_i)$, $C_i = c \wedge \xi_i: (RS ABX_i)$, $i = 1, 2$, das sind 2 zentral-perspektive Dreiecke/-seite.

Die Seiten der Dreiecke sind $a_i = (RS AX_i)$, $b_i = (RS BX_i)$, $c_i = (RS CX_i)$.

Die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten:

$$A = a_1 \wedge a_2 = (RS AX_1 X_2), B = b_1 \wedge b_2 = (RS BX_1 X_2), C = c_1 \wedge c_2 = (RS CX_1 X_2),$$

liegen alle auf der Geraden z: (RS $X_1 X_2$).

Dort schneiden sich auch die Ebenen α, β, γ .

Die Dreiecke/-seite sind auch axial-perspektiv.

Insgesamt: 5 Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \xi_1, \xi_2$,
 10 Geraden z, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a, b, c$.
 10 Punkte Z, $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A, B, C$,

In jeder Ebene gibt es 3 Punkte und 3 Geraden, durch jeden Punkt gehen 3 Ebenen und 3 Geraden.