

Geometrie im P^5 – Darstellung durch Kegelschnitte

Alexander Stolzenburg

31.08.2025

Grundlegende Vorbereitungen

Für projektive Teilräume T des P^n mit Dimension k , $\dim(T) = k$, schreiben wir kurz T^k . Dabei ist $-1 \leq k \leq n$. Für $k = 0$ hat man einen Punkt, für $k = 1$ eine Gerade, $k = 2$ eine Ebene u.s.w. bis zur Hyperebene T^{n-1} und zum T^n (oder vollen P^n) für $k = n$. Ein Sonderfall ist $k = -1$ für das Nichts oder den „Unpunkt“ $(0 : 0 : \dots : 0)$.

Für zwei Teilräume S und T interessieren oft der Schnitt – der größte Teilraum, der alle Elemente dieser Räume S und T enthält, bezeichnet mit $S \wedge T$, und weiter der kleinste beide umfassende Teilraum: der Verbindungsraum $S \vee T$ („meet“ und „join“)

Für deren Dimensionen i und k gilt dann $\dim(T^i \vee T^k) + \dim(T^i \wedge T^k) = i + k$. (*)
Dabei gilt natürlich: i, k und $i + k \leq n$.

Speziell im P^5 können windschief sein: Punkt T^0 und Hyperebene T^4 , Gerade T^1 und ein T^3 , zwei Ebenen T^2 . Diese Teilräume spannen bei geeigneter Lage den vollen P^5 auf.

Zwei verschiedene Ebenen (T^2) können aber auch einen T^0 oder einen T^1 gemeinsam haben; im ersten Fall spannen sie einen T^4 auf, im zweiten einen T^3 . Das alles und die anderen Möglichkeiten folgen leicht aus (*).

Dual zueinander im P^5 sind: P^0 und P^4 , weiter P^1 und P^3 sowie P^2 und P^2 .

Zur rechnerischen Darstellung verwendet man zweckmäßig die homogenen Koordinaten $(x_{00} : x_{01} : x_{02} : x_{11} : x_{12} : x_{22})$ bzw. den Koordinatenvektor $\mathbf{x} = (x_{00} \ x_{01} \ x_{02} \ x_{11} \ x_{12} \ x_{22})^T$. Dual haben Hyperebenen lineare Gleichungen $u_{00} \cdot x_{00} + u_{01} \cdot x_{01} + u_{02} \cdot x_{02} + u_{11} \cdot x_{11} + u_{12} \cdot x_{12} + u_{22} \cdot x_{22} = 0$ oder $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{x} = 0$ mit $\mathbf{u} = (u_{00} \ u_{01} \ u_{02} \ u_{11} \ u_{12} \ u_{22})^T$.

Es gibt also im P^5 ∞^5 Hyperebenen und ∞^5 Punkte. Jede Gerade schneidet eine beliebige Hyperebene (wenn sie ihr nicht angehört) in genau einem Punkt, und man erhält alle Geraden, wenn man alle Punkte zweier verschiedener Hyperebenen wechselseitig verbindet, also gibt es im P^5 insgesamt $\infty^5 \cdot \infty^5 = \infty^{10}$ Geraden und dual ∞^{10} T^3 -Räume.

Aus (*) folgt sofort: Jede Ebene T^2 schneidet eine feste Hyperebene T^4 (wenn nicht schon enthalten) in einer Geraden; und wenn man alle Geraden einer Hyperebene (die Geraden durch je zwei ihrer Punkte) mit allen Punkten des P^5 verbindet, erhält man alle Ebenen; davon gibt es also $(\infty^5)^2 \cdot \infty^5 = \infty^{15}$.

Kegelschnitte im P^2

In der Projektiven Ebene ist jeder Kegelschnitt bestimmt durch fünf Punkte. Er kann durch eine Gleichung in homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ beschrieben werden:

$$a_{00} \cdot x_0^2 + 2a_{01} \cdot x_0 x_1 + 2a_{02} \cdot x_0 x_2 + a_{11} \cdot x_1^2 + 2a_{12} \cdot x_1 x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 = 0,$$

oder in Matrizenform $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A}$ und dem Koeffizienten-

vektor $\mathbf{x} = (x_0 \ x_1 \ x_2)^T$, mit
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

(*) Der Dimensionssatz findet sich in jedem (nicht ganz alten) Lehrbuch zur Linearen Algebra.

wobei es auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, also nur fünf Parameter unabhängig wählbar sind.

Ein Büschel von Kegelschnitten im P^2 wird bekanntermaßen von zwei verschiedenen Kegelschnitten aufgespannt; diese haben vier Punkte A, B, C, D gemeinsam (unter denen auch zusammenfallende oder paarweise konjugiert-komplexe sein können), und durch diese ist das Büschel bestimmt. Das Büschel besteht aus allen Kegelschnitten (incl. der zerfallenden), die durch die vier Punkte gehen.

Analog ist ein Bündel durch drei Punkte bestimmt; es besteht aus allen Kegelschnitten, die diese drei Punkte enthalten (etwa A, B, C). Zwei Punkte bestimmen ein „Gebüsch“.

Man kann sich das auch in Gleichungsform denken:

Ein Büschel, aufgespannt von zwei Kegelschnitten a und b, hat die Büschelgleichung:

$$\lambda \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ (für } (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \text{)}.$$

Ein Bündel hat dann die Bündelgleichung $\lambda \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$, wobei die Buchstaben für einen Kegelschnitt stehen können oder die zugehörige Matrix. Analog ein Gebüsch: $\lambda \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \kappa \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = 0$.

Zuordnung zwischen dem P^2 und dem P^5 durch Kegelschnitte

Nun werde jedem Kegelschnitt des P^2 ein Punkt des 5-dimensionalen Projektiven Raumes P^5 umkehrbar eindeutig zugeordnet, etwa die Elemente der Matrix, die den Kegelschnitt beschreibt, den Koordinaten eines Punkt im P^5 . Der Kegelschnitt a zur Matrix **A** ist dann dem Punkt A($a_{00}:a_{01}:a_{02}:a_{11}:a_{12}:a_{22}$) bzw. dem Punktvektor $\mathbf{a} = (a_{00} \ a_{01} \ a_{02} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{22})^T$ zugeordnet.

Ein Kegelschnitt im P^2 ist durch 5 seiner Punkte bestimmt; deswegen ist jedem Quintupel von Punkten im P^2 ein Punkt im P^5 eindeutig zugeordnet; das Umgekehrte gilt nicht, weil der Kegelschnitt auch durch andere 5 seiner Punkte bestimmt ist.

Eine Gerade im P^5 verbindet zwei Punkte A und B, darstellbar durch $\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b}$, wobei A, B die Koordinaten **a** bzw. **b** hat. Genauso ist im P^2 durch $\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{A} + \mu \cdot \mathbf{B}$ ein Büschel von Kegelschnitten, aufgespannt von zwei Kegelschnitten a und b, beschrieben.

Das heißt: die Kegelschnittbüschel im P^2 sind den Geraden im P^5 wechselseitig eindeutig zugeordnet und analog die Kegelschnittbündel den Ebenen u.s.w.

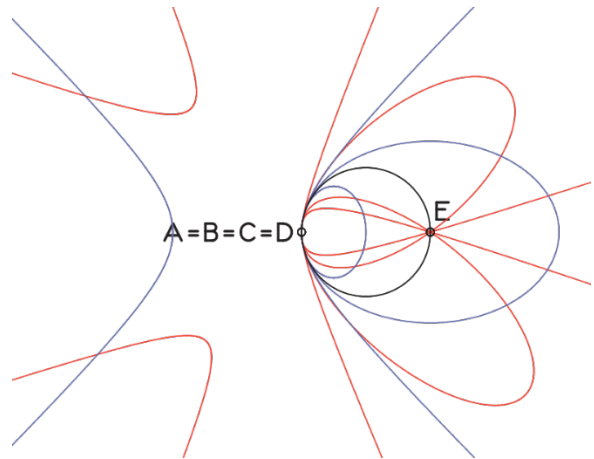
Als Schreibweise bietet sich an: Punkt P: (ABCDE), Gerade g: (ABCD), Ebene ε : (ABC) u.s.w.

Weiter gilt für z.B. irgendwelche Punkte A, B, C, ... des P^2 : Das Büschel (ABCD) und das Büschel (ABCE) haben den Kegelschnitt (ABCDE) und sie spannen das Bündel (ABC) auf. In Kurzform: $(ABCD) \wedge (ABCE) = (ABCDE)$ und $(ABCD) \vee (ABCE) = (ABC)$. Die Objekte unseres Geometrisierens sind aber Punkte, Gerade und die anderen Teilräume. Die Verwendung von Kegelschnitten ist ein Hilfsmittel, die Übersicht zu behalten. Die Punkte A, B, ... denke man sich in allgemeiner Lage. Wenn unter den vier ein Punkt doppelt vorkommt (AA..), müssen A und die Tangente in A bekannt sein, bei drei Punkten der Krümmungskreis und bei vieren der Scheitelkrümmungskreis.

Eine ganz andere Aufgabenstellung wird hier nicht verfolgt: Welche Eigenschaften von Kegelschnittbüscheln, -bündeln, ... folgen aus der Geometrie im P^5 ?

Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte P_1, P_2 :

Es seien $P_i: (A_i B_i C_i D_i E_i)$ für $i = 1, 2$. Die P^2 -Kegelschnitte dazu haben 4 Punkte A, B, C, D gemeinsam. Damit ist die P^5 -Gerade $\overline{P_1 P_2} : (ABCD)$ bestimmt. Die gegebenen Punkte können, ganz gleich, wie sie vorher charakterisiert waren, durch $(ABCDX_i)$ erfasst werden, wobei X_i einer der ursprünglichen Punkte A_i, B_i, C_i, D_i, E_i ist – der Einfachheit halber keiner der Punkte A, B, C, D.



In der Zeichnung ist die eine Gerade durch blaue, die andere durch rote Büschelkegelschnitte dargestellt: $(ABCD)$ und $(ABCE)$. Für deren Schnittpunkt steht der Kegelschnitt $(ABCDE)$, hier ein Kreis; er gehört beiden Büscheln an. (Das rote ist hier ein Oskulations-, das blaue ein Hyperoskulationsbüschel).

2 verschiedene Punkte des P^5 besitzen immer eine Verbindungsgerade, weil 2 Kegelschnitte immer 4 Punkte gemein haben (und seien es konjugiert-komplexe oder mehrfache).

Beispiele für Büschel, auch mit komplexen Trägerpunkten, findet man in <http://PaeFo.de/PG9>.

Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Geraden

Zwei verschiedene Geraden können windschief sein oder einen Punkt gemeinsam haben. Wenn Letzteres der Fall ist, spannen sie eine Ebene auf; und es existiert mindestens ein Punkt, der vom gemeinsamen Punkt verschieden ist und in der einen Geraden liegt. Die Ebene kann durch ein Bündel von Kegelschnitten repräsentiert werden, etwa (ABC) ; die beiden Geraden sind es dann durch $(ABCD)$ bzw. $(ABCE)$ – mit $D \neq E$ – und der Schnittpunkt dann durch $(ABCDE)$.

Ebenen

werden dargestellt durch Bündel – alle Kegelschnitte durch drei Punkte. Drei P^2 -Punkte A, B, C bestimmen eindeutig eine Ebene: (ABC) – und diese Darstellung der Ebene ist ebenfalls eindeutig. Die drei Verbindungsgeraden seien $g_1 = \overline{P_2 P_3}$, $g_2 = \overline{P_1 P_3}$, $g_3 = \overline{P_1 P_2}$. Für $i = 1, 2, 3$ gilt: Die Kegelschnitte k_i und k_j zu P_i und P_j haben die Punkte A, B, C, D_{ij} gemein. Dann ist $g_k: (ABCD_{ij})$, $k \neq i, j$. Die Punkte sind darstellbar als $P_1: (ABCD_{23}X_1)$, $P_2: (ABCD_{13}X_2)$ und $P_3: (ABCD_{12}X_3)$ für Punkte X_i auf dem Kegelschnitt k_i .

Zwei Ebenen: (ABC) und (DEF) sind i.A. windschief ($2 + 2 = 5 - 1$). Nur wenn sie einen der definierenden Punkte, etwa A, gemeinsam haben, also in derselben Hyperebene liegen, schneiden sie sich in einem Punkt: (ABC) und (AEF) in $(ABCEF)$. Die Ebenen (ABC) und (ABF) schneiden sich natürlich in der Geraden $(ABCF)$.

Ebene und Gerade haben nur dann einen Schnittpunkt, wenn sie im selben T^3 liegen als (ABC) und $(ABEF)$ in (AB) mit dem Schnittpunkt $(ABCEF)$ – wenn nicht schon die Gerade als $(ABCF)$ der Ebene angehört.

Jede Ebene schneidet einen festen T^3 in einem Punkt (das folgt sofort aus dem Dimensionssatz). Also existieren in jedem Punkt des P^5 ∞^3 Ebenen. Man kann auch so schließen: Ein Punkt ist durch 5 Punkte im P^2 bestimmt; 3 von ihnen legen eine Ebene fest.

Ganz entsprechend: Durch jede Gerade gehen ∞^2 Ebenen.

Ein T^3 – entspricht dem „Gebüsch“ aller Kegelschnitte durch zwei eindeutig bestimmte Punkte.

Eine Hyperebene T^4 wird dargestellt durch alle Kegelschnitte durch einen Punkt (A). Fünf verschiedene Hyperebenen treffen sich in einem Punkt: (A), (B), (C), (D), (E) in (ABCDE).

Faustregel: Gegeben seien zwei (A ...) und (B ...), A, B und die übrigen alle oder nur teilweise verschieden.

Schnittgebilde: man nehme alle verschiedenen, die insgesamt wenigstens einmal vorkommen.

Verbindungsräume: man nehme alle, die in beiden zugleich vorkommen.

So ist für (ABC) und (ABD) der Schnitt : (ABCD) und die Verbindung : (AB).

Wir werden diese Hinterlegung des P^5 durch Kegelschnitte als rationelle Darstellung einsetzen; das wird sich als praktisch und übersichtlich herausstellen – und mehr auch nicht.

Geometrie im P^4

Ganz entsprechend lässt sich die Geometrie im P^4 durch Kugeln des P darstellen. Kugeln im P^3 sind durch vier wesentliche Elemente bestimmt, wie aus der allgemeinen Gleichung $a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 \cdot x_1 + c \cdot x_0 \cdot x_2 + d \cdot x_1^2 + e \cdot x_2^2 = 0$ hervorgeht. Sie hat, da es auf einen Faktor nicht ankommt, 4 wesentliche Konstanten.

Auch zerfallende Kugeln sind möglich – ein Paar von Ebenen, deren eine die Fernebene ist.

Punkte des P^4 lassen sich dann darstellen durch (ABCD), Geraden durch (ABC) u.s.w.

Für die Konstruktion der Gerade durch 2 Punkte benötigt man 3 Punkte im P^3 , welche dort den 2 Kugeln angehören; diese existieren immer, sind aber (anders als die 4 Schnittpunkte zweier Kegelschnitte bei der entsprechenden Aufgabe im P^5) nicht eindeutig bestimmt.

Eine andere Möglichkeit: Man arbeitet im P^5 und beschränkt sich dort auf eine feste Hyperebene. Weiteres in A.Stolzenburg, Geometrie im P^5 Desargues, in Vorb.

Ausblick

Für die entsprechende Darstellung durch Quadriken und Büscheln, Bündeln ... von Quadriken bietet sich der P^9 an, da die Gleichungen 9 wesentliche Konstanten enthalten: $a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 x_1 + c \cdot x_0 x_2 + d \cdot x_0 x_3 + e x_1^2 + f \cdot x_1 x_2 + g \cdot x_1 x_3 + h \cdot x_2^2 + i \cdot x_2 x_3 + j \cdot x_3^2 = 0$.

9 wesentliche Konstanten sind auch maßgeblich für die Gleichungen der ebenen Kubiken c^3 : $a \cdot x_0^3 + b \cdot x_0^2 x_1 + c \cdot x_0^2 x_2 + d \cdot x_0 x_1^2 + e \cdot x_0 x_1 x_2 + f \cdot x_0 x_2^2 + g x_1^3 + h \cdot x_1^2 x_2 + i \cdot x_1 x_2^2 + j \cdot x_2^3 = 0$

D. h., es könnten z.B. Geraden durch Büschel von Quadriken oder durch Büschel von ebenen Kubiken repräsentiert werden.