

Perspektive mit drei Fluchtpunkten

Alexander Stolzenburg
01.06.2025

Das klassische Beispiel für Perspektive ist die 1-dimensionale: die Eisenbahnschienen, die auf einen Punkt, den Fluchtpunkt, hinzu zu laufen scheinen. Wohl bekannt auch der 2-dimensionale Fall, besonders auffällig bei Gebäuden: zwei Fluchtpunkte braucht man – leicht konstruiert oder frei auf der Horizontlinie gewählt – und man zeichnet dann die Bilder der Lotrechten senkrecht dazu. Die Hauptblickrichtung ist dann parallel zum Boden.

Betrachtet man den abzubildenden Gegenstand aber aus einiger Höhe oder von tief unten, dann ist die Blickrichtung nach unten oder oben geneigt. Oft begnügt man sich mit einem „gefühlsmäßig“ angenommenen 3. Fluchtpunkt unterhalb bzw. oberhalb und einigermaßen weit entfernt. Für eine exakte Konstruktion bedarf es Methoden, die wenig bekannt sind. Grundlage dafür ist die

Zentralprojektion

aus einem Zentrum auf eine beliebige Ebene – die Bildebene – im dreidimensionalen Raum. Wir schränken das gleich – ohne wesentlichen Verlust der Allgemeinheit – ein wenig ein für den Fall, dass ein betrachtendes Auge (oder Foto-Objektiv) die Welt oberhalb einer horizontalen, also der x-y-Ebene, betrachtet.

Für jeden Punkt P (außer Z) erhält man den Bildpunkt P^* als Schnittpunkt der Geraden $s = \overline{ZP}$ mit der Ebene (Bildebene) β – blau. Z steht für das Auge des Betrachters, darf also nicht in β liegen.

x^* , y^* sind die kartesischen Koordinaten von P^* (in der Ebene β), die in die Zeichnung des perspektivischen Bildes zu übertragen sind – zeichnerisch ermittelt oder durch Rechnung.

Damit wird hier als Beispiel die Ansicht eines Würfels gezeigt – in Frosch- und dann in Vogelperspektive.

Die rötlich oder grün angedeuteten Ebenen dienen der anschließenden rechnerischen Lösung der Aufgabe.

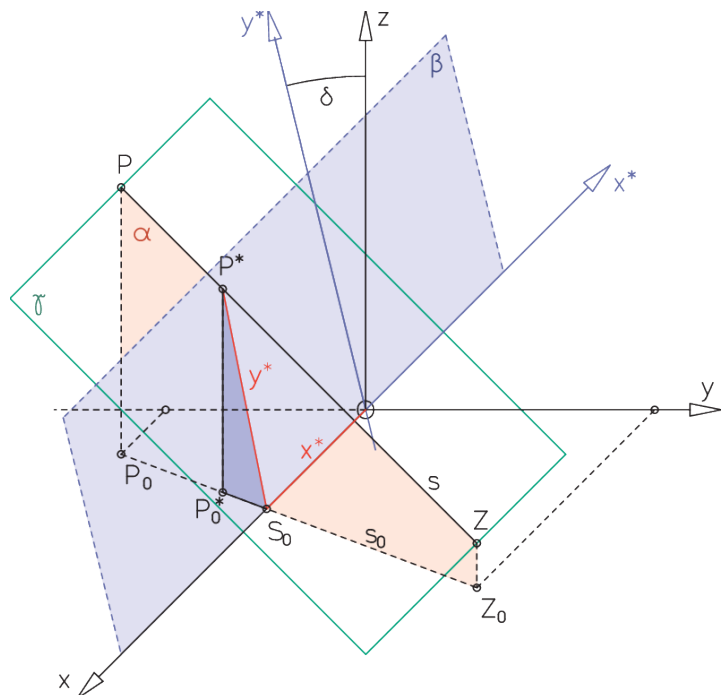


Abb. 1 – Übersicht über die Situation im Raum

Zeichnerische Lösung

Sie ist einfach und leicht nachzuvollziehen. Es bedarf einer gesonderten Konstruktionszeichnung. Diese zeigt die Situation in der unteren Hälfte im Grundriss, in der oberen im Aufriss, außerdem die Bildebene β und die Lage des Zentrums $Z(\alpha \mid d \mid h)$. Es wird also das perspektivische Bild (im Folgenden kurz: Bild) in der Ansicht von rechts dargestellt.

Beispiel 1: Bild eines Würfels in Froschperspektive

Gezeigt ist hier die Konstruktion des Bildpunktes D^* aus einem gegebenen Punkt D (im Grundriss D' und im Aufriss D''). Zuerst ergibt sich der Schnitt S'' eines Sehstrahl s mit der Bildebene β im Aufriss. Die Höhenlinie hl erscheint im Aufriss als ein Punkt (S'') und ist im Grundriss parallel zur x -Achse, die ergibt den Punkt im Grundriss (S'). Dann ist $D' = \overline{Z'S'} \cdot s'$. Die roten Strecken sind nun die Koordinaten des Bildpunktes D^* . Man kann sie übertragen in die Zeichnung des perspektivischen Bildes.

So kann man dann für alle Punkte des Würfels verfahren, Ergebnis: siehe Abb. 3.

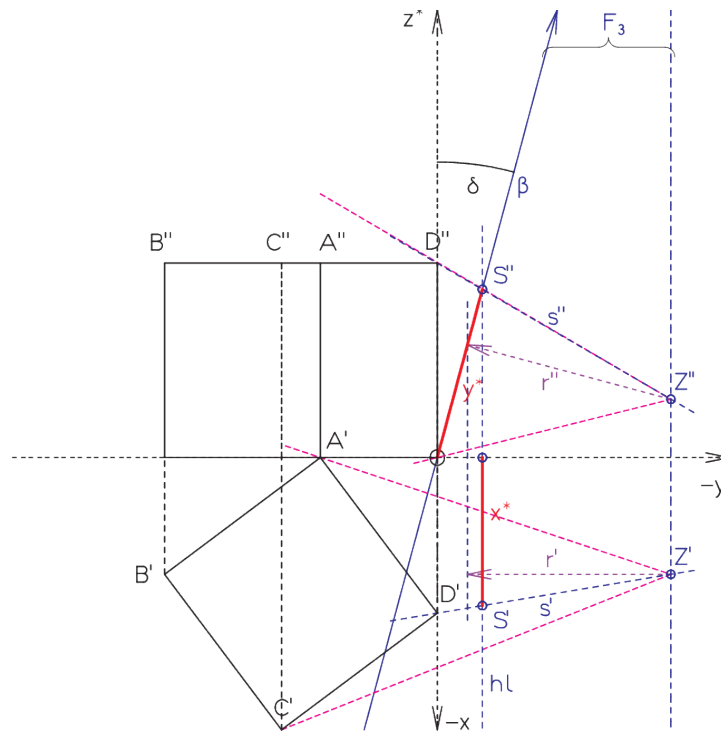


Abb. 2 – Konstruktion der nötigen Koordinaten

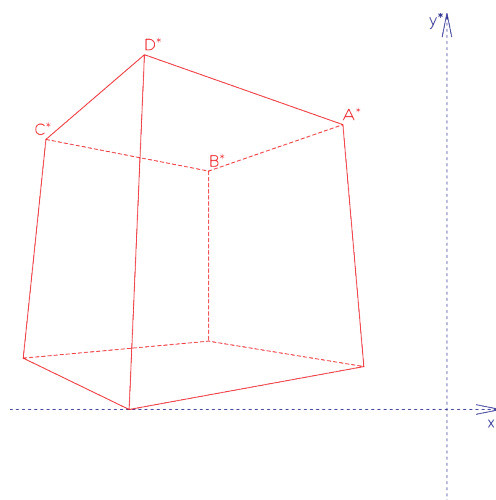


Abb. 3 – Ergebnis, im Maßstab 1 : 2 vergrößert

Man kann sich gelegentlich die Arbeit etwas vereinfachen, indem man Zentralkollineationen heranzieht. Erstens geht das Basisquadrat durch eine solche aus dem Grundriss hervor. Diesen muss man passend verdrehen entsprechend der Blickrichtung (von rechts nach links) und dann nach oben einklappen. (Nach unten ausklappen ist auch möglich, s. S. 4).

Aus Abb. 4 folgen Elemente dieser Zentralkollineation (grün); ihre Achse ist die x-Achse. Außerdem diejenigen einer zweiten, die das Basisquadrat in das des Deckquadrats abbildet (orange): deren Achse ist die Fluchtgerade der ersten, deren Zentrum der dritte Fluchtpunkt F_3 .

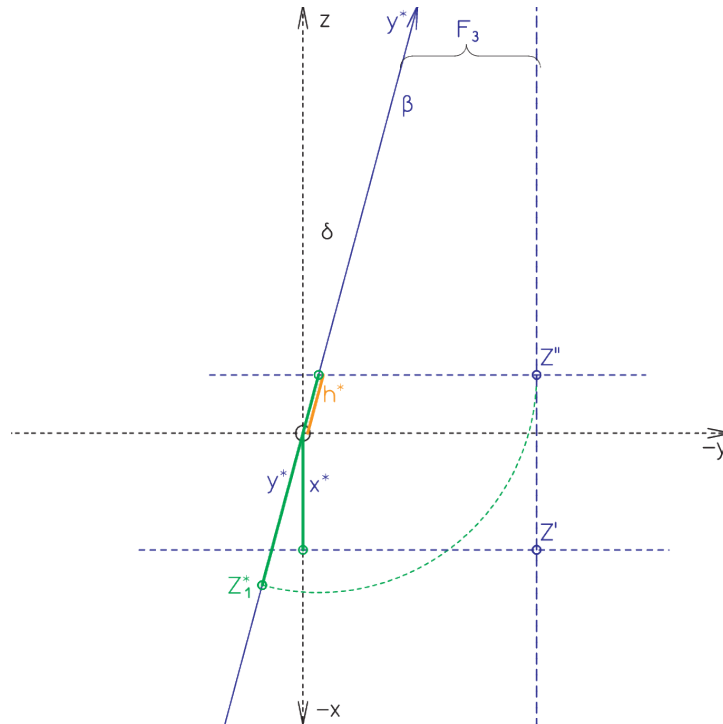


Abb. 4 – Hilfszeichnung für die Zentralkollineationen

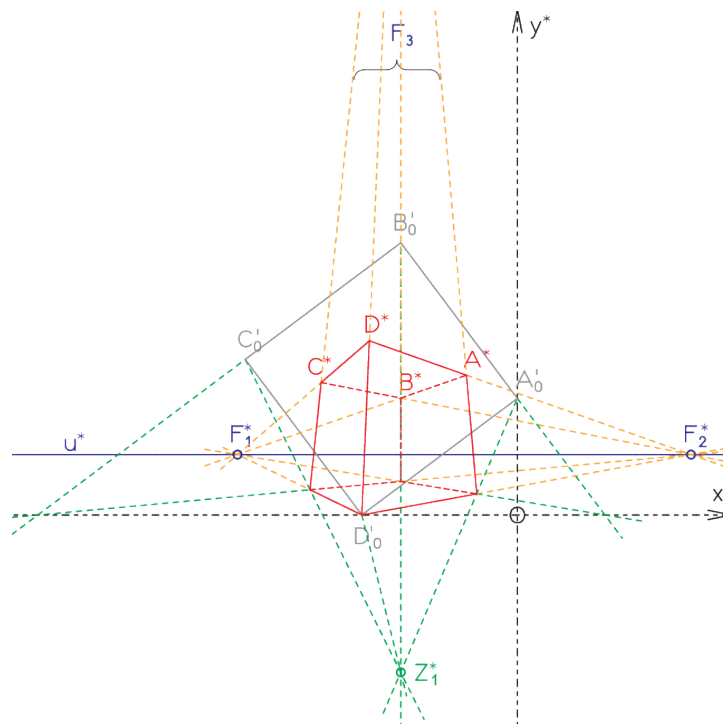


Abb. 5 – Konstruktion mithilfe der Zentralkollineationen bei eingeklapptem Grundriss

Nebenbemerkung: Der Pfeil $\mathbf{r}$ senkrecht zu β (siehe Abb. 2) gibt die Blickrichtung aus Z an. Der kleinste Kegel mit Spitze S und Achse $\mathbf{r}$, (angedeutet in magenta), der alle Originalpunkte in sich fasst, sollte einen Öffnungswinkel $< 90^\circ$ haben, um ein natürlich erscheinendes Bild zu erhalten. Die Spitze von $\mathbf{r}$ ist der sog. Hauptpunkt.

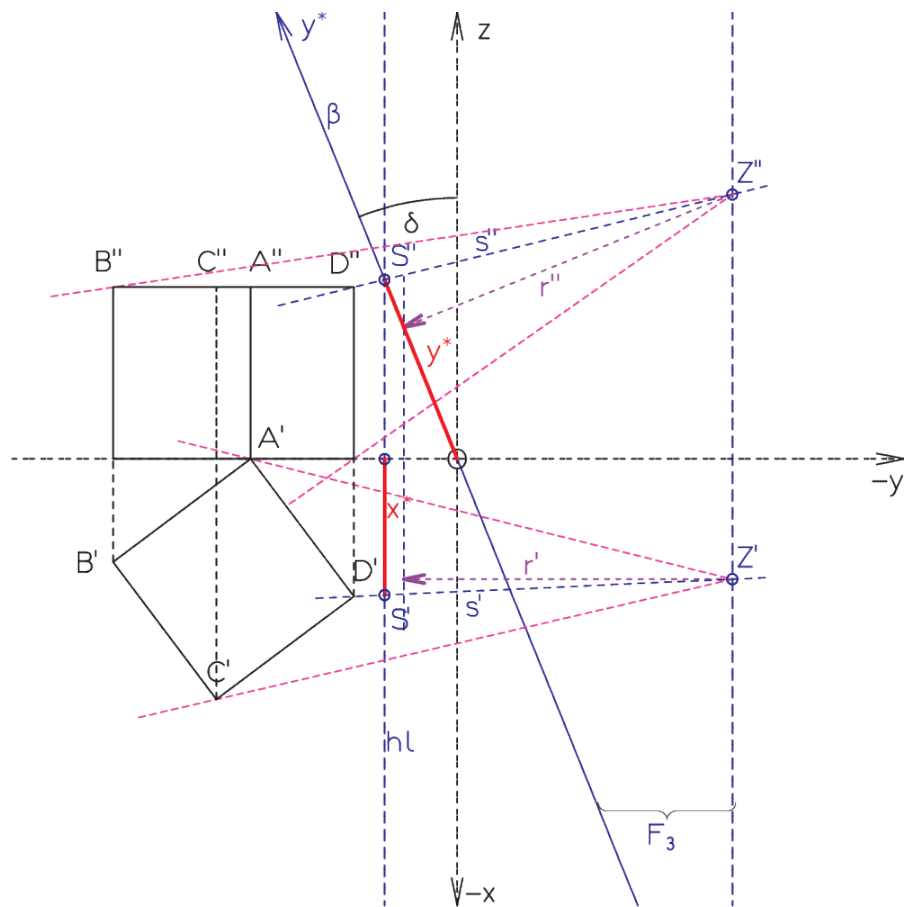
Beispiel 2: Bild eines Würfels in Vogelperspektive


Abb. 6 – Konstruktion der nötigen Koordinaten

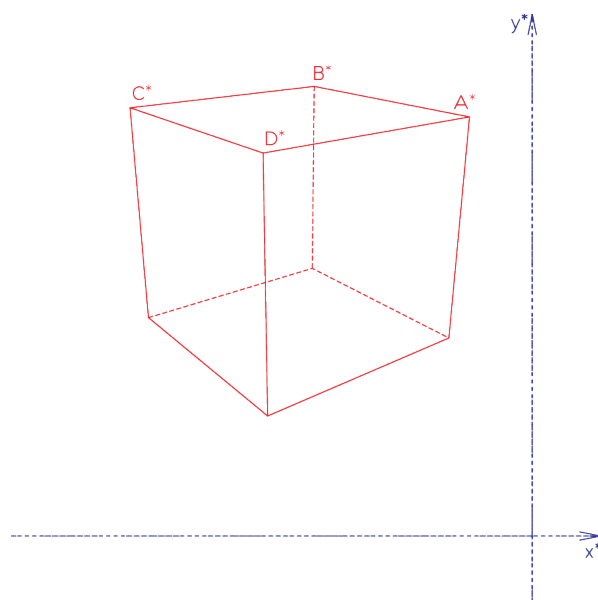


Abb. 7 – Ergebnis, im Maßstab 1 : 2 vergrößert

Die folgende Hilfszeichnung wird wieder nur benötigt, wenn man die Zentralkollationen wie oben bei der Konstruktion des Bildes verwenden will. Hier wird sie mit ausgeklapptem Grundriss realisiert, übersichtlicher, aber Platz brauchend.

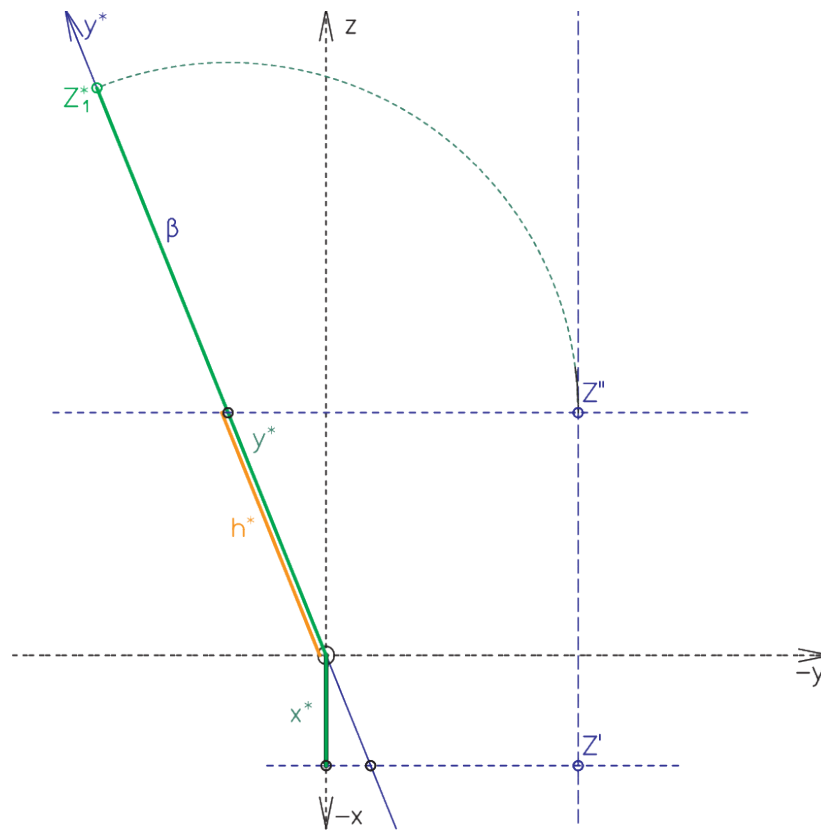


Abb. 8 – Hilfszeichnung für die Zentralkollineationen, wenn gewünscht

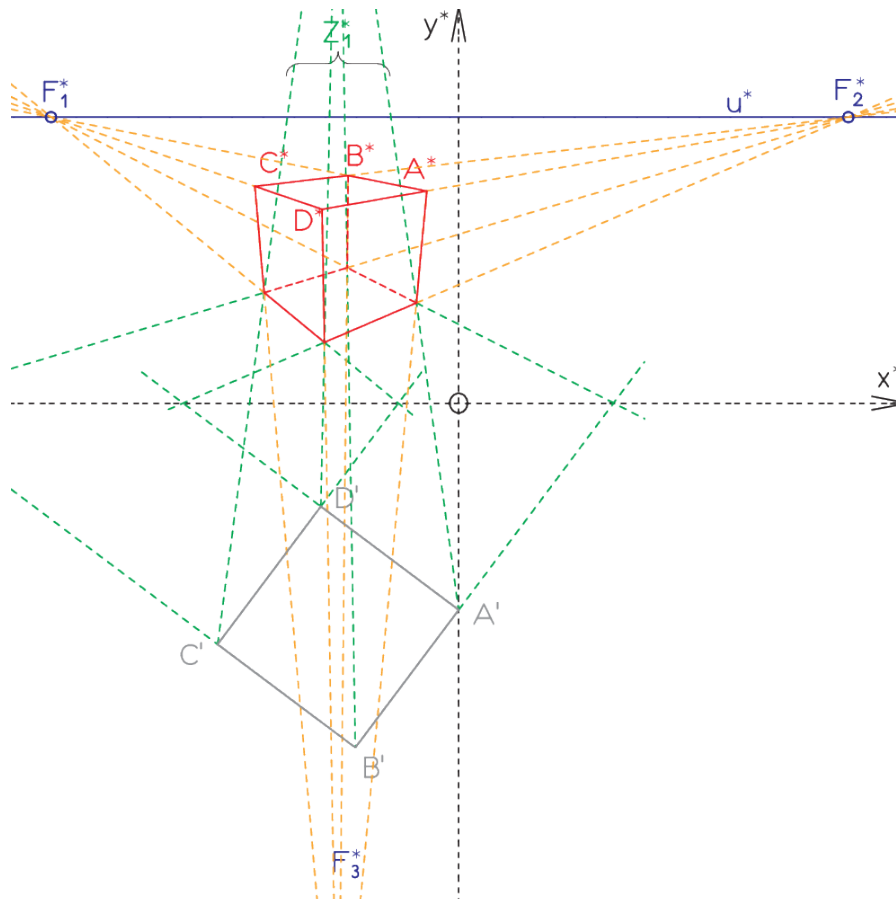


Abb. 9 – Konstruktion mithilfe der Zentralkollineationen bei eingeklapptem Grundriss

Rechnerische Lösung

Gegeben: Auge $Z(z_1 | z_2 | z_3)$ [in den Zeichnungen: (a | d | h)] und Grundebene ... $z = 0$ und der Winkel δ , um den die Bildebene β gegenüber der xz-Ebene um die x-Achse gekippt ist (blau) durch

$\beta : z = m \cdot y$ für $\delta \neq 0^\circ$ bzw.

$y = 0$ für $\delta = 0^\circ$ mit $m = \tan(90^\circ + \delta)$, $(-90^\circ < \delta < 90^\circ)$

Punkt $P(p_1 | p_2 | p_3)$. Siehe Zeichnung auf S. 1.

Sei α die Ebene durch Z und P , die senkrecht auf der Grundebene steht (rot), und γ die Ebene durch die Parallele zur x-Achse durch Z und durch P (grün).

Dann ist der Bildpunkt P' von P der Schnittpunkt der drei Ebenen α , β und γ .

$$\alpha \dots \frac{y - z_2}{x - z_1} = \frac{p_2 - z_2}{p_1 - z_1} \text{ oder } (y - z_2) \cdot (p_1 - z_1) - (x - z_1) \cdot (p_2 - z_2) = 0$$

$$-x \cdot (p_2 - z_2) + y \cdot (p_1 - z_1) = z_2 \cdot (p_1 - z_1) - z_1 \cdot (p_2 - z_2)$$

$$\beta \dots z - m \cdot y = 0 \text{ bzw. } y = 0 \text{ (für } \delta = 0)$$

$$\gamma \dots \frac{z - z_3}{y - z_2} = \frac{p_3 - z_3}{p_2 - z_2} \text{ oder } (z - z_3) \cdot (p_2 - z_2) - (y - z_2) \cdot (p_3 - z_3) = 0$$

$$z \cdot (p_2 - z_2) - y \cdot (p_3 - z_3) = z_3 \cdot (p_2 - z_2) - z_2 \cdot (p_3 - z_3)$$

Das führt – mit der Abkürzung $d_i = p_i - z_i$ – auf das lineare Gleichungssystem $\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{r}$ mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & -m & 1 \\ 0 & -d_3 & d_2 \end{pmatrix} \text{ für } \delta \neq 0 \text{ bzw. } \begin{pmatrix} -d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_2 \end{pmatrix} \text{ für } \delta = 0 \text{ und } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} z_2 d_2 \\ 0 \\ z_3 d_2 - z_2 d_3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ergibt den Bildpunkt $P^*(p_1^* | p_2^* | p_3^*)$ unter der Zentralprojektion.

Neue kartesische Koordinaten in der Bildebene:

Ferner seien $P_0(p_1 | p_2 | 0)$ und $Z_0(z_1 | z_2 | 0)$ die Grundrisspunkte von P und Z , s_0 die Gerade $\overline{Z_0 P_0}$, sie schneide die x-Achse in $S_0(p_1 | 0 | 0)$. Dann gilt für die durch die kartesischen Koordinaten $(x^* | y^*)$ beschriebene Bildebene für P^* : $x^* = p_1$ und $y^* = \text{Länge von } S_0 \text{ zu } P^* = \frac{p_3}{\cos(\delta)}$

3. Fluchtpunkt $F_3 =$ Schnittpunkt der Gerade durch Z und den Fernpunkt der z-Achse mit der Bildebene. Es gilt $F_3(z_1 | z_2 | -m \cdot z_2)$ und in der Bildebene $F_3^*(z_1 | -\frac{m \cdot z_2}{\cos(\delta)})$.