

Skizze der polareuklidischen Geometrie

Peter Baum*

*p.baum@posteo.de am 13.08.2023 in der Fassung vom 01.02.2026

Inhaltsverzeichnis

1	Projektive Geometrie	7
1.1	Inzidenz und Grundgebilde	7
1.2	Elementarbewegungen	8
1.3	Pol-Polare Beziehung am Kreis	9
1.4	Involution	10
1.5	Dualitätsprinzip	11
2	Polareuklidische Geometrie	13
2.1	Polarität	13
2.2	Orthogonalität und Winkel	15
3	Die polareuklidische Geometrie in der Ebene	17
3.1	Strecke und Fächer	18
3.2	Parallelogramm und Zentrigramm	18
3.3	Mittelpunkt und Mittelstrahl	20
3.4	Koordinaten und das Doppelverhältnis	22
3.4.1	Koordinaten in der polareuklidischen Ebene	25
3.4.2	Abstand und Weite	26
3.5	Dreiecke und Dreiseite	28
3.5.1	Ähnlichkeit und Verwandtschaft	29
3.5.2	Schwerpunkt und Leichtgerade	30
3.5.3	Die Höhensätze	31
3.5.4	Winkelhalbierende	32
3.5.5	Simsongerade	33
3.5.6	Mittelsenkrechte	33
3.5.7	Ceva und Menelaos	35
3.5.8	Umkreis, Inkreis, Ankreis	36
3.6	Kreisgeometrie	38
3.6.1	Peripheriewinkel	38
3.6.2	Satz des Thales	39
3.6.3	Chordale	42
3.6.4	Orthogonale Kreisbüschel	43
3.6.5	Ähnlichkeitszentren und Ähnlichkeitslinien	49
3.7	Die Bildkurven von Kegelschnitten	51
3.7.1	Brennpunkt und Leitlinie	51
3.7.2	Weitere Eigenschaften der Konstruktion	54
3.7.3	Das Bild eines Kegelschnitts	56

3.7.4	Konstruktion der Achspunkte nach Rytz	58
3.7.5	Konstruktion der Achspunkte im Fall einer Parabel	59
3.7.6	Näherungskonstruktionen	60
3.8	Abbildungen	62
3.8.1	Spiegelung	62
3.8.2	Drehung	63
3.8.3	Translation	64
3.9	Ausblick	65
3.10	Anhang	66

Zusammenfassung. Die moderne Mathematik beruht auf der Axiomatik. Seit 1899, als DAVID HILBERT (1862 – 1943) sein Buch *Grundlagen der Geometrie* herausgab, ist es üblich, die Beschreibung von mathematischen Gegenständen auf eine Reihe von Grundsätzen zu stützen, die nicht weiter hinterfragt werden. An ein Axiomensystem werden seitdem drei Anforderungen gestellt:

- Unabhängigkeit,
- Vollständigkeit,
- Widerspruchslosigkeit.

Die Prüfung dieser Anforderungen erfolgt dann an Hand von sogenannten Modellen. Das sind Bereiche der Mathematik, deren Inhalte dem Axiomensystem genügen.

Die euklidische Geometrie handelt von Punkten, Geraden und Ebenen. Dabei ist es für den logischen Formalismus des Axiomensystems unerheblich, was man sich von diesen Elementen vorstellt.

Das gilt jedoch nicht für den Geometrieunterricht in der Schule. In der Waldorfschule wird schon in der ersten Klasse zwanglos die geometrische Anschauung aktiviert durch die Einführung von Gerade und Krumme, und in den weiteren Klassen durch das Formenzeichnen. So entsteht in jedem Kind ein Anschauungsraum, mit dem dann später die euklidische Geometrie verknüpft wird.

OSKAR PERRON (1888 – 1975) formuliert in seinem Buch *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene* auf Seite 11 in erfrischender Weise, bevor er seine Axiome einführt:

Definition. Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt.

Wir legen in dieser Skizze unseren Anschauungsraum zugrunde, ebenso wie LOUIS LOCHER-ERNST (1906 – 1962), der in der Vorrede seines Buches *Urphänomene der Geometrie* diese Bezeichnung begründet. Aus ihnen ergibt sich das Dualitätsgesetz, das in einem projektiven Raum aus dem Axiomensystem folgt. So ist z.B. die Kugel mit den Durchmessern als „Punkte“ und den Großkreisen als „Geraden“ ein Modell der projektiven Ebene, in dem es keine besonderen Durchmesser und keinen besonderen Großkreis gibt. In unserem Anschauungsraum der projektiven Ebene gibt es allerdings die besonderen Fernpunkte als Geradenrichtungen und die besondere Ferngerade als Ebenenstellung, und das Dualitätsgesetz gilt dort nur dann, wenn man auf diese Besonderheit verzichtet.

Will man aber im dreidimensionalen projektiven Anschauungsraum mit den Grundelementen Punkt, Gerade und Ebene auf die Besonderheit der Fernelemente nicht verzichten, weil sie ja im Modell des Anschauungsraums existiert, muss man für sie besondere duale Elemente einführen, um das Dualitätsgesetz zu retten.

LOUIS LOCHER-ERNST (1906 – 1962) hat in seinem 1940 in Zürich erschienenen Buch *Projektive Geometrie* diesen Gedanken wohl als Erster aufgegriffen und in den letzten beiden Kapiteln auf 45 Seiten anfänglich bearbeitet. Er führte als duales Element der Fernebene den *absoluten Mittelpunkt* ein.

Es ist das Verdienst von IMMO DIENER, die polareuklidische Geometrie (PEG) in seinem 2021 bei Springer Spectrum erschienenen Buch *Polareuklidische Geometrie* entscheidend vertieft zu haben. Er erzeugt durch konsequente Anwendung des Dualitätsprinzips aus der euklidischen Geometrie (EG) eine dualeuklidische Geometrie (DEG). So entwickelt er in einer außerordentlich ausführlichen und elementar verständlichen Weise aus einem Begriff der EG (e-Begriff) einen dualen d-Begriff der DEG. Diese Unterscheidung in „e-Ding“ (es enthält keine Fernelemente) und das duale „d-Ding“ (es enthält keine Nahelemente) ist ein didaktischer Kniff und wird ab S. 66 seines Buches konsequent durchgeführt.

Dieser Skizze legen wir den Polareuklidischen Raum zugrunde. Es handelt sich um dem projektiven Anschauungsraum mit den besonderen Fernelementen, der durch einen beliebigen im Endlichen liegenden *Nahpunkt* als duales Element der Fernebene und den mit ihm inzidierenden *Nahebenen* als duale Elemente der Fernpunkte ergänzt wird. Durch die Polarität am Einheitskreis, in dessen Mittelpunkt sich der Nahpunkt befindet, wird dann zu jeder geometrischen Figur eine polare Figur erzeugt.

1 Projektive Geometrie

1.1 Inzidenz und Grundgebilde

Die projektive Geometrie hat sich aus dem Anschauungsraum der euklidischen Geometrie entwickelt. In der gegenseitigen Lage der Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene gibt es das anschauliche Phänomen der Inzidenz. Aus ihr ergeben sich sieben Grundgebilde:

Zu einer Geraden gehören unbegrenzt viele Punkte, die mit ihr inzidieren, sie bilden eine *Punktreihe*.

Zu einem Punkt gehören unbegrenzt viele Geraden, die mit ihm inzidieren, sie bilden ein *Geradenbündel*.

Zu einem Punkt gehören unbegrenzt viele Ebenen, die mit ihm inzidieren, sie bilden ein *Ebenenbündel*.

Zu einer Geraden gehören unbegrenzt viele Ebenen, die mit ihr inzidieren, sie bilden ein *Ebenenbüschel*.

Zu einer Ebene gehören unbegrenzt viele Geraden, die mit ihr inzidieren, sie bilden ein *Geradenfeld*.

Zu einer Ebene gehören unbegrenzt viele Punkte, die mit ihr inzidieren, sie bilden ein *Punktfeld*.

Zu einer Ebene und einem in ihr liegenden Punkt gehören unbegrenzt viele Geraden, die sowohl mit dem Punkt als auch mit der Ebene inzidieren, sie bilden ein *Geradenbüschel*.

Wir stellen noch folgendes fest:

- Zwei Geraden eines Feldes haben entweder einen gemeinsamen Punkt oder eine gemeinsame Richtung.
- Zwei Geraden, die keine Ebene gemeinsam haben, sind windschief. Sie haben dann auch keinen Punkt gemeinsam.
- Zwei verschiedene gleichartige Grundelemente können nicht inzidieren.

Die Untersuchung der Inzidenz verschiedenartiger Grundelemente führt zunächst zur Einführung der *Fernelemente*, also den Geradenrichtungen als *Fernpunkte*, den Ebenenstellungen als *Ferngeraden* und der Gesamtheit der Fernpunkte und Ferngeraden als *Fernebene*.¹

Jedes Bündel von parallelen Geraden bestimmt genau einen Fernpunkt, und jedes Büschel von parallelen Ebenen bestimmt genau eine Ferngerade. Da zwei Ferngeraden stets genau einen gemeinsamen Fernpunkt haben, weil ihre Repräsentanten, die beiden Büschel von parallelen Ebenen, sich in lauter parallelen Geraden schneiden, hat die Gesamtheit der Ferngeraden und Fernpunkte die Struktur einer Ebene.

¹G.K.C. v. STAUDT: *Geometrie der Lage*, Nürnberg 1847, §5, S.23

1 Projektive Geometrie

Hieraus ergeben sich nun folgende Urphänomene als Inzidenzaxiome des *projektiven Raumes*:²

Zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert.

Drei Punkte, die nicht in derselben Punktreihe liegen, bestimmen genau eine Ebene, die mit ihnen inzidiert.

Ein Punkt und eine Gerade, die nicht inzidieren, bestimmen genau eine Ebene, die mit ihnen inzidiert.

Zwei Ebenen bestimmen genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert.

Drei Ebenen, die nicht in demselben Ebenbüschel liegen, bestimmen genau einen Punkt, der mit ihnen inzidiert.

Eine Ebene und eine Gerade, die nicht inzidieren, bestimmen genau einen Punkt, der mit ihnen inzidiert.

Die entsprechenden Inzidenzaxiome in einer projektiven Ebene lauten:

Zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert.

Zwei Geraden bestimmen genau einen Punkt, der mit ihnen inzidiert.

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit ihren Seiten abc und $a'b'c'$ so beschaffen sind, dass die drei Geraden AA' , BB' und CC' mit einem Punkt Z inzidieren, dann inzidieren auch die drei Punkte aa' , bb' und cc' mit einer Geraden z .

Das letzte Axiom fordert die Gültigkeit des Satzes von Desargues, der zwar aus den Inzidenzaxiomen des Raumes folgt, nicht aber aus den Inzidenzaxiomen der Ebene.

Bemerkung 1. Jede Gerade ist ein Repräsentant von genau einem Fernpunkt. Jede zu ihr parallele Gerade repräsentiert *denselben* Fernpunkt. Denn parallele Geraden haben eine gemeinsame Richtung, und es empfiehlt sich, dass man sich eine solche Richtung vorstellt, wenn von einem Fernpunkt die Rede ist.

Jede Ebene ist ein Repräsentant von genau einer Ferngeraden. Jede zu ihr parallele Ebene repräsentiert *dieselbe* Ferngerade. Denn parallele Ebenen haben eine gemeinsame Stellung, und es empfiehlt sich, dass man sich eine solche Stellung vorstellt, wenn von einer Ferngeraden die Rede ist.

1.2 Elementarbewegungen

Punkte, Geraden und Ebenen können sich in vielfältiger Weise im Raum bewegen. Es gibt aber für jedes dieser Grundelemente besonders einfach geordnete Bewegungen, die wir *Elementarbewegung* nennen:

²Der projektive Anschauungsraum enthält alle Elemente der euklidischen Geometrie und die Fernelemente. Durch die nachfolgenden Axiome wird ein projektiver Raum definiert, der auch andere Interpretationsmöglichkeiten der Begriffe Punkt, Gerade und Ebene und damit ein anderes Modell zulässt als dasjenige des Anschauungsraumes. Eindrucksvolle Beispiele findet man in A. BEUTELSPACHER, U. ROSENBAUM: *Projektive Geometrie*, Wiesbaden 1992

Ein Punkt wandert in einer festen Geraden.	Eine Ebene dreht sich um eine feste Gerade.
--	---

Eine Gerade dreht sich in einer festen Ebene um einen festen Punkt.

Man kann sich die sieben Grundgebilde durch Elementarbewegungen erzeugt denken:³

Die Elementarbewegung eines Punktes erzeugt eine Punktreihe mit der festen Geraden als Träger.	Die Elementarbewegung einer Ebene erzeugt ein Ebenenbüschel mit der festen Geraden als Träger.
--	--

Die Elementarbewegung einer Geraden erzeugt ein Geradenbüschel mit dem festen Punkt und der festen Ebene als Träger.

Die Elementarbewegung des Trägers einer Punktreihe erzeugt ein Punktfeld.	Die Elementarbewegung des Trägers eines Ebenenbüschels erzeugt ein Ebenenbündel.
---	--

Die Elementarbewegung des Trägerpunktes eines Geradenbüschels in einer Büschelgeraden erzeugt ein Geradenfeld.	Die Elementarbewegung der Trägerebene eines Geradenbüschels um eine Büschelgerade erzeugt ein Geradenbündel.
--	--

1.3 Pol-Polare Beziehung am Kreis

Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M . Er gliedert die Punkte der Ebene in äußere Punkte, Kreispunkte und innere Punkte, und die Geraden der Ebene in Sekanten, Tangenten und Passanten. Wir stellen fest:

Ein innerer Punkt inzidiert mit keiner Passante, keiner Tangente und beliebig vielen Sekanten.	Eine Passante inzidiert mit keinem inneren Punkt, keinem Kreispunkt und beliebig vielen äußeren Punkten.
Ein Kreispunkt inzidiert mit keiner Passante, genau einer Tangente und beliebig vielen Sekanten.	Eine Tangente inzidiert mit keinem inneren Punkt, genau einem Kreispunkt und beliebig vielen äußeren Punkten.
Ein äußerer Punkt inzidiert mit beliebig vielen Passanten, genau zwei Tangenten und beliebig vielen Sekanten.	Eine Sekante inzidiert mit beliebig vielen inneren Punkten, genau zwei Kreispunkten und beliebig vielen äußeren Punkten.

Diese Inzidenzbeziehungen gelten für jeden Kegelschnitt. Offenbar gibt es folgende Entsprechungen:

innere Punkte	$\longleftrightarrow$	Passanten
Kreispunkte	$\longleftrightarrow$	Tangenten
äußere Punkte	$\longleftrightarrow$	Sekanten

³Diesen Gedanken hat schon FEDERIGO ENRIQUES (1871 – 1946) in seinen 1903 erschienenen *Vorlesungen über projektive Geometrie* (S. 7) formuliert.

Man kann sogar jedem Punkt genau eine Gerade zuordnen und umgekehrt:

Ist A ein äußerer Punkt, so gehen durch ihn genau zwei Tangenten mit den Berührungspunkten K_1 und K_2 . Die Sekante $p_A = K_1K_2$ ist dann durch A eindeutig bestimmt, sie heißt *Polare* von A, und A heißt *Pol* von a.

Die Sekante trifft die Gerade MA in einem inneren Punkt A'. Die durch A gehende Orthogonale zu MA ist dann die eindeutig bestimmte Polare $p_{A'}$ von dem inneren Punkt A'.

Ist K ein Kreispunkt, so ist seine Tangente die eindeutig bestimmte Polare von K.

Der Hauptsatz der Polarentheorie lautet:

Satz. Wandert ein Punkt P auf einer Geraden g, so dreht sich seine Polare p um den Pol G von g.

Aus ihm folgt: Liegt ein Punkt A in der Polaren b eines Punktes B, so liegt B auch in der Polaren a von A. In diesem Fall heißen A und B *konjugierte Punkte* und a und b *konjugierte Geraden* in Bezug auf den Kreis.

Die Pol-Polare Beziehung gibt es offenbar bei jedem Kegelschnitt. Allerdings ist dort die Polare eines inneren Punktes bekanntlich anders definiert als oben beim Kreis notiert.

Nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck ATM in der Abb. 1.1 ist

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = r^2$$

Die Zuordnung $A \leftrightarrow A'$ nennt man *Spiegelung* oder *Inversion am Kreis*. Ist k der Einheitskreis, so ist $r = 1$ und

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = 1$$

1.4 Involution

Ist k ein Kegelschnitt und g eine Passante oder Sekante von k und P ein Punkt in g, so trifft die Polare p von P in Bezug auf k die Gerade g in einem Punkt P'. Die Polare p' von P' geht dann nach dem Hauptsatz durch P. Dadurch ist in g eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $P \longleftrightarrow P'$ definiert, also eine Involution (Abb. 1.2).

Bewegt sich P auf einer Sekante, so bewegt sich P' in entgegengesetzter Richtung und beide Punkte treffen sich in den Schnittpunkten A und B der Sekante mit dem Kegelschnitt, es gibt also die Fixpunkte $A' = A$ und $B' = B$ und die Involution heißt hyperbolisch.⁴

⁴Die Bezeichnung hat ihren Grund in dem Umstand, dass die Ferngerade eine Sekante der Hyperbel ist. Wandert ein Hyperbelpunkt P auf einem Hyperbelast in einen der Fernpunkte, so wird seine Polare eine Asymptote als Tangente und es ist $P' = P$ ein Fixpunkt.

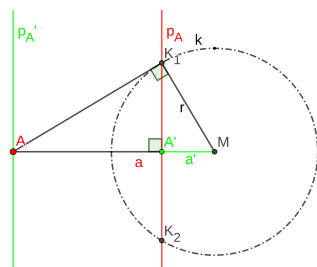


Abbildung 1.1: Pol-Polare

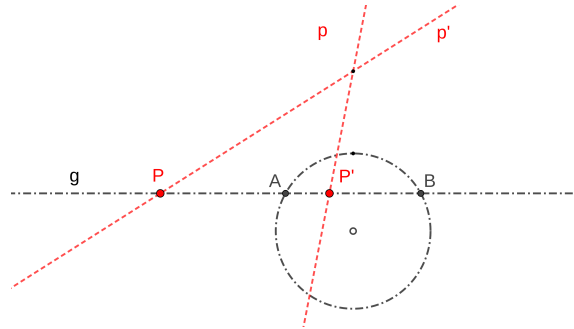


Abbildung 1.2: Involution

Bewegt sich P auf einer Passante, so bewegt sich P' in derselben Richtung, es gibt keine Fixpunkte und die Involution heißt elliptisch.⁵

1.5 Dualitätsprinzip

Die Darstellung der sieben Grundgebilde und den Inzidenzbeziehungen im Abschnitt 1.3 in zwei Textspalten ist einer der schönsten Gesetzmäßigkeiten in der Geometrie, dem *Dualitätsprinzip* geschuldet. Es folgt direkt aus den Inzidenzaxiomen der projektiven Geometrie und kann so formuliert werden:

Gilt in einem projektiven Raum ein Satz, der in den Grundbegriffen Punkt, Gerade und Ebene und der Inzidenz formuliert ist, so gilt auch der durch Vertauschen der Wörter Punkt und Ebene aus ihm sinngemäß entstehende duale Satz unter Beibehaltung des Wortes Gerade.

Gilt in einer projektiven Ebene ein Satz, der in den Grundbegriffen Punkt, Gerade und der Inzidenz formuliert ist, so gilt auch der durch Vertauschen der Wörter Punkt und Gerade aus ihm sinngemäß entstehende duale Satz.

In den folgenden Ausführungen wird oftmals zu einem Sachverhalt in einer linken Spalte der entsprechende duale Sachverhalt in der rechten Spalte formuliert. Wenn die linke Aussage stimmt, dann stimmt auf Grund des Dualitätsprinzip auch die duale rechte Aussage und muss nicht noch extra bewiesen werden.

Duale Grundgebilde sind

$$\begin{aligned} \text{Punktreihe} &\longleftrightarrow \text{Ebenenbüschel} \\ \text{Punktfeld} &\longleftrightarrow \text{Ebenenbündel} \\ \text{Geradenfeld} &\longleftrightarrow \text{Geradenbündel} \end{aligned}$$

und das Geradenbüschel ist zu sich selbst dual.

⁵Weil die Ferngerade eine Passante der Ellipse ist.

2 Polareuklidische Geometrie

Damit das Dualitätsprinzip im anschaulichen projektiven Raum ohne Einschränkung gilt, dürfen die Fernelemente keine Sonderstellung haben. Will man aber an ihrer Sonderstellung, die ja anschaulich vorhanden ist, festhalten, so kann die uneingeschränkte Gültigkeit des Dualitätsprinzips nur dann gerettet werden, wenn man zu den Fernelementen besondere duale Nahelemente einführt: Dual zu der Fernebene als Träger eines Feldes von Ferngeraden und Fernpunkten zeichnet man einen beliebigen im Endlichen liegenden Punkt als *Nahpunkt* aus. Dieser ist Träger eines Geradenbündels, den *Nahstrahlen*, und Träger eines Ebenenbündels, den *Nahebenen*. Somit hat man folgende duale Entsprechungen im Raum:

Fernebene	$\longleftrightarrow$	Nahpunkt
Ferngerade	$\longleftrightarrow$	Nahstrahl
Fernpunkt	$\longleftrightarrow$	Nahebene

Auf diesem Weg entsteht die Polareuklidische Geometrie (PEG). Diesen so mit den ausgezeichneten Nahelementen ergänzten projektiven Anschauungsraum nennen wir den *Polareuklidischen Raum*.

2.1 Polarität

Wenn wir anschauliche Geometrie treiben, befinden wir uns stets in einem konkreten Raum. Die euklidische Geometrie hat zur Grundlage den Anschauungsraum ohne Fernelemente. Die anschauliche projektive Geometrie hat zur Grundlage den Anschauungsraum einschließlich der Fernelemente, ohne deren Sonderstellung zu berücksichtigen. Und die PEG hat zur Grundlage den Anschauungsraum einschließlich der ausgezeichneten Fernelemente und der ausgezeichneten Nahelemente. Die gewöhnlichen Grundelemente werden in der PEG von den ausgezeichneten Fern- und Nahelementen unterschieden. Daher treffen wir folgende Vereinbarung:

Definition:¹ Mit den Worten *Punkt*, *Gerade* und *Ebene* bezeichnen wir nur solche Grundelemente des polareuklidischen Raumes, die weder Fernelemente noch Nahelemente sind. Den Nahpunkt bezeichnen wir stets mit *N*.

Ob eine Aussage über Punkte, Geraden und Ebenen jeweils auch für Fern- oder Nahelemente gültig ist, muss dann geprüft werden.

¹Ich folge hier LOCHER-ERNST: *Projektive Geometrie*, S. 244, 259

2 Polareuklidische Geometrie

HILBERT hat in seinem Buch *Grundlagen der Geometrie* ein Axiomensystem formuliert, welches im Prinzip auch auf andere Modelle als den Anschauungsraum anwendbar ist. Im Gegensatz dazu ist eine Geometrie im Anschauungsraum nur dann sinnvoll, wenn wir die geometrischen Aussagen auch visualisieren. Zu einem Satz der Geometrie und dem dualen Satz zeichnen wir also entsprechende Figuren.

Hierzu ein Beispiel aus der ebenen PEG:

Gegeben seien zwei Geradenpaare mit der Eigenschaft, dass die Geraden eines Paares jeweils durch denselben Fernpunkt gehen.

Gegeben seien zwei Punktpaare mit der Eigenschaft, dass die Punkte eines Paares jeweils auf demselben Nahstrahl liegen.

Den linken Satz können wir visualisieren, indem wir ein beliebiges Parallelogramm zeichnen. Die duale Figur eines Parallelogramms ist dann ein beliebiges Viereck mit der Eigenschaft, dass zwei Diagonalen durch den Nahpunkt gehen. Es ist offensichtlich, dass es nicht nur zu einem bestimmten Parallelogramm unendlich viele duale Figuren gibt, sondern dass dies immer bei der Visualisierung dualer Sätze der Fall ist.

Nun spielen in der anschaulichen Geometrie die projektiven Abbildungen, insbesondere die Polaritäten eine wichtige Rolle. Letztere sind involutorische Korrelationen, die im Raum jedem Punkt als Pol umkehrbar eindeutig eine Ebene als seine Polare und jeder Geraden umkehrbar eindeutig eine Gerade als Polare zuordnet. In der PEG der Ebene wird durch eine Polarität jedem Punkt als Pol eine Gerade als Polare und jedem Fernpunkt einen Nahstrahl umkehrbar eindeutig zugeordnet. Der Pol der Ferngerade ist der Nahpunkt.

Eine Polarität liefert also zu jeder geometrischen Figur unter den unendlich vielen dualen Figuren eine ganz bestimmte, wir nennen sie die polare Figur.

Beispiele für solche Polaritäten sind

- im Raum die Pol-Polare Beziehung an der Einheitskugel mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt,
- in der Ebene die Pol-Polare Beziehung am Einheitskreis mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt (siehe Abschnitt 1.3),
- in der Ebene die Pol-Polare Beziehung an einer Ellipse oder Hyperbel mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt,
- in der Ebene die Pol-Polare Beziehung durch ein beliebiges Dreieck ABC in allgemeiner Lage, dessen Ecken A, B, C seine Seiten a, b, c als Polaren zugeordnet sind, und einem weiteren Pol-Polare-Paar (P,p).²

Nun gibt es jedoch außer den Inzidenzen geometrische Begriffe wie Parallel, orthogonal, Abstand zweier Punkte, Winkelbeziehungen usw., deren duales Äquivalent definiert werden muss und zweckmäßiger Weise neu bezeichnet wird. Diese Definitionen und Bezeichnungen sind nicht mit allen Polaritäten kompatibel sondern haben als Grundlage eine bestimmte Polarität. Am fruchtbarsten scheint in dieser Hinsicht in der ebenen PEG die Polarität am Einheitskreis zu sein.

²Dadurch ist dann auch jedem Punkt der Ebene eine bestimmte Gerade der Ebene als Polare zugeordnet, siehe H.S.M.COXETER: *Reelle projektive Geometrie der Ebene*, München 1955, S. 66.

Wie schon LOCHER-ERNST und IMMO DIENER sind wir vielfach genötigt, für die dualen Sachverhalte neue Namen zu erfinden. Diese werden *kursiv* notiert.

Im Raum der PEG liefert jede Polarität folgende Zuordnungen:

Nahpunkt $\leftrightarrow$ Fernebene	Nahebene $\leftrightarrow$ Fernpunkt	Nahstrahl $\leftrightarrow$ Ferngerade
Punkt $\leftrightarrow$ Ebene		Gerade $\leftrightarrow$ Gerade

In der PEG der Ebene liefert jede Polarität die Zuordnungen

Nahpunkt $\leftrightarrow$ Ferngerade	Punkt $\leftrightarrow$ Gerade	Nahstrahl $\leftrightarrow$ Fernpunkt
---------------------------------------	--------------------------------	---------------------------------------

Bemerkung 2. Die Polarität an einem Kegelschnitt ordnet jeder Tangente ihren Berührungspunkt als Pol zu. Im Fall der Parabel ist der Pol der Ferngeraden der Fernpunkt der Parabelachse. Dieser kann als Fernpunkt kein Nahpunkt sein, daher scheidet die Polarität an einer Parabel in unserer Betrachtung aus.³

DIENER bezeichnet die Menge aller zu Sätzen der EG dualen Sätze als DEG. Solche Sätze können aber inhaltlich ebenfalls Sachverhalte der EG beschreiben. Wir verzichten auf diese Unterscheidung, da ja irgend eine geometrische Figur F im Raum der PEG außer Punkten, Geraden und Ebenen auch Fernelemente und Nahelemente enthalten kann und auch dann vermöge einer Polarität stets eine eindeutig bestimmte Bildfigur $F' \leftrightarrow F$ besitzt.

Beispiel:

Es sei in der Ebene A irgend ein Punkt und B irgend ein Fernpunkt. Dann ist mit dem Nahpunkt N durch ABN ein Dreieck gegeben. Das duale Gebilde ist dann ein Dreieck mit einer Geraden a als Polare von A , einem Nahstrahl b als Polare von B und der Ferngeraden n als Polare von N . Jedes der beliebig vielen solcher Dreiecke ABN und jedes der beliebig vielen solcher Dreiecke abn sind dann duale Figuren im polareuklidischen Raum. Weitere Aussagen über ein Dreieck abn als duale Figur eines Dreiecks ABN können erst gemacht werden, wenn feststeht, welche Polarität zugrunde liegt.

Wir stellen fest:

Jeder Nahstrahl inzidiert mit genau einem Fernpunkt. Jede Nahebene inzidiert mit genau einer Ferngeraden.		Jeder Fernpunkt inzidiert mit genau einem Nahstrahl. Jede Ferngerade inzidiert mit genau einer Nahebene.
--	--	---

2.2 Orthogonalität und Winkel

In der Geometrie gibt es das Phänomen des rechten Winkels oder der Orthogonalität. Wir betrachten die in einem Bündel versammelten Nahelemente. In der linken Spalte

³Dass der analog der Fernebene im Raum oder der Ferngerade in der Ebene ausgezeichnete absolute Mittelpunkt oder Nahpunkt kein Fernpunkt sein darf, ist mathematisch nicht zwingend. Man könnte also auch eine ebene Geometrie untersuchen, bei der die Polarität an einer Parabel zugrunde liegt und das Dualitätsgesetz gültig bleibt.

formulieren wir den Sachverhalt der Orthogonalität im Nahbündel, und in der rechten Spalte den dualen Sachverhalt in Bezug auf eine Polarität. Man sollte sich von der Richtigkeit der rechten Aussagen auch dadurch überzeugen, dass man sich jeweils Punkte, Geraden und Ebenen als Repräsentanten der Fernelemente vorstellt.

Zu jedem Nahstrahl gibt es genau eine orthogonale Nahebene und somit auch genau eine orthogonale Ferngerade.

Zu jeder Ebene oder Nahebene gibt es genau einen orthogonalen Nahstrahl und somit genau einen orthogonalen Fernpunkt.

Zwei Ebenen oder Nahebenen sind orthogonal, wenn ihre Ferngeraden orthogonal sind.

Zu jeder Ferngeraden gibt es genau einen orthogonalen Fernpunkt und somit auch genau einen orthogonalen Nahstrahl.

Zu jedem Punkt oder Fernpunkt gibt es genau eine orthogonale Ferngerade und somit genau eine orthogonale Nahebene.

Zwei Punkte oder Fernpunkte sind orthogonal, wenn ihre Nahstrahlen orthogonal sind.

Die Orthogonalität zeichnet nun

- in jeder Ebene E des polareuklidischen Raumes einen besonderen Punkt O ihres Punktfeldes aus, nämlich den Schnittpunkt der Ebene mit dem zu ihr orthogonalen Nahstrahl,
- in jeder Geraden g des polareuklidischen Raumes einen besonderen Punkt O ihrer Punktreihe aus, nämlich den Schnittpunkt der Geraden mit der zu ihr orthogonalen Nahebene.

Wir nennen O den *Orthopunkt* der Ebene E bzw. der Geraden g und E die *Orthoebene* des Punktes O .

Analog hierzu gibt es in jeder Geraden g der polareuklidischen Ebene einen Orthopunkt, nämlich den Schnittpunkt des zu g orthogonalen Nahstrahls mit g .

Winkel

Zwei Nahstrahlen oder zwei zu ihnen parallele Geraden bilden stets vier Winkel. Jeder Winkel hat zwei Nebenwinkel und einen gleich großen Scheitelwinkel. Sind die Nahstrahlen orthogonal, so sind alle vier Winkel rechte Winkel.

Wir definieren:

- Die Winkel zweier Punkte oder Fernpunkte sind die Winkel ihrer Nahstrahlen.
- Die Winkel zweier Ebenen oder Nahebenen sind die Winkel ihrer orthogonalen Nahstrahlen.
- Die Winkel zweier Ferngeraden sind die Winkel ihrer orthogonalen Nahstrahlen.

Wir stellen fest:

Zu den Winkeln zweier Nahstrahlen a und b gehören zwei Nahstrahlen w und w' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal.

Zu den Winkeln zweier Ferngeraden a und b gehören zwei Ferngeraden w und w' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

In der projektiven Ebene sind Punkt und Gerade zueinander duale Elemente. Wir ergänzen auch hier die Fernelemente der Ebene durch einen beliebigen ausgezeichneten Punkt als Nahpunkt, den Träger des Nahstrahlenbüschels. Die Polarität am Einheitskreis k_e mit dem Nahpunkt N als Mittelpunkt liefert

- zu jedem Punkt der Ebene genau eine Gerade und umgekehrt,
- zu jedem Fernpunkt der Ebene genau einen Nahstrahl und umgekehrt,
- zu der Ferngerade den Nahpunkt und umgekehrt.

Die Sachverhalte der Orthogonalität sind folgende:

Zu jedem Nahstrahl gibt es genau einen orthogonalen Nahstrahl.	Zu jedem Fernpunkt gibt es genau einen orthogonalen Fernpunkt.
Zu jeder Geraden gibt es genau einen orthogonalen Nahstrahl.	Zu jedem Punkt gibt es genau einen orthogonalen Fernpunkt.

Für die Winkel gilt entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.2:

Zu den Winkeln zweier Nahstrahlen a und b gehören zwei Nahstrahlen w und w' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal.	Zu den Winkeln zweier Fernpunkte A und B gehören zwei Fernpunkte W und W' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal.
Die Winkel zweier Punkte sind die Winkel ihrer Nahstrahlen.	Die Winkel zweier Geraden sind die Winkel ihrer Fernpunkte.

Definition. Eine Polarität π in der Ebene ist winkeltreu, wenn die Winkel zweier Geraden a und b ebenso groß sind wie die Winkel ihrer Pole $A = \pi(a)$ und $B = \pi(b)$.

Satz. Die Polarität am Einheitskreis k_e ist winkeltreu.

Beweis. Bei der Polarität am Einheitskreis ist der Nahstrahl des Pols A einer Geraden a stets orthogonal zu a . Somit stimmen die Winkel zweier Geraden a und b mit den Winkeln ihrer Pole überein. $\square$

Hieraus folgt insbesondere:

Satz. Die Orthogonalität ist in Bezug auf die Polarität am Einheitskreis eine Invariante.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Bemerkung 3. Der Polarität am Einheitskreis entspricht im Raum die Polarität an der Einheitskugel. Dort ist die Polare eines Punktes eine Ebene und der Pol einer Ebene ein Punkt. Die Winkel zwischen zwei Ebenen sind die Winkel ihrer orthogonalen Nahstrahlen, auf denen auch die Pole der Ebenen liegen. Daher ist die Polarität an der Einheitskugel in Bezug auf die Ebenen bzw. Punkte ebenfalls winkeltreu. Die Polaren von Geraden sind aber ebenfalls Geraden, und man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Winkel zweier Geraden keineswegs mit den Winkeln ihrer Polaren identisch sein müssen.

Ist z.B. a eine Tangente der Kugel mit dem Berührungspunkt A , dann ist die Polare a' von a die zu a orthogonale Tangente im Berührungspunkt A . Alle Polaren a' von Tangenten a , die in derselben Großkreisebene liegen, sind also parallel, obwohl die Tangenten a keineswegs parallel sind.

Bemerkung 4. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Polarität an einer Ellipse oder Hyperbel nicht winkeltreu ist.

Aus diesem Grunde beschränken wir uns in dieser Skizze auf die Polarität am Einheitskreis.

Allerdings ist die Polarität am Einheitskreis nicht die einzige winkeltreue Polarität. Ist P' der am Mittelpunkt des Einheitskreises k_e gespiegelte Punkt eines Punktes P und p' seine Polare, so nennt man p' die *Antipolare* von P und die hierdurch definierte ebenfalls winkeltreue Polarität die *Antipolarität*.

3.1 Strecke und Fächer

Zwei Punkte einer Geraden zerlegen diese in zwei Teile, also zwei Segmente einer Punktreihe. Entsprechend zerlegen zwei Geraden eines Geradenbüschels dieses in zwei Teile, also zwei Segmente des Geradenbüschels.

Ist die Gerade g der Träger einer Punktreihe und G_∞ ihr Fernpunkt und sind $A \in g$ und $B \in g$ zwei Punkte von g , dann wird die Punktreihe durch A und B in zwei Segmente zerlegt. Dasjenige Segment, das G_∞ nicht enthält, nennen wir die Strecke $\overline{AB}$.

Ist der Punkt G der Träger eines Geradenbüschels und $g_0 = GN$ sein Nahstrahl und sind $a \in G$ und $b \in G$ zwei Büschelgeraden von G , dann wird das Geradenbüschel durch a und b in zwei Segmente zerlegt. Dasjenige Segment, das g_0 nicht enthält, nennen wir den *Fächer* $\overline{ab}$.

3.2 Parallelogramm und Zentrigramm

Zwei Geraden p_1 und p_2 sind parallel, wenn ihr gemeinsamer Punkt $S = p_1p_2$ ein Fernpunkt ist.

Es sei $P_1P_2P_3P_4$ ein Viereck mit den Seiten $p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{41}$, den Diagonalen p_{13}, p_{24} und dem Nebendreieck $Q_1 = p_{41}p_{23}$,

Zwei Punkte P_1 und P_2 sind *zentriert*, wenn ihre gemeinsame Gerade $s = P_1P_2$ ein Nahstrahl ist.

Es sei $p_1p_2p_3p_4$ ein Vierseit mit den Ecken $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}$, den *Diapunkten* P_{13}, P_{24} und dem Nebendreieck $q_1 = P_{41}P_{23}$,

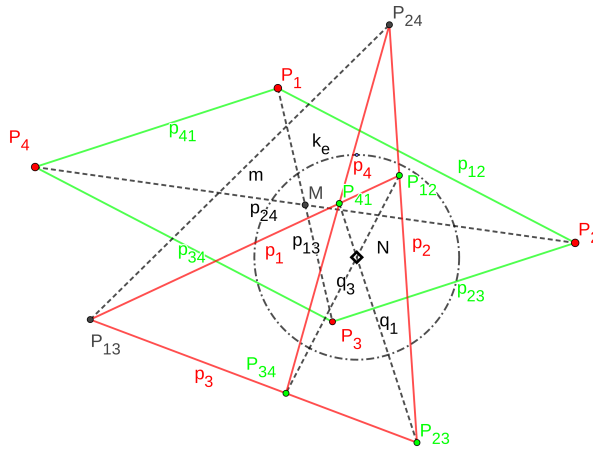


Abbildung 3.1: Parallelogramm und Zentrigramm

$Q_2 = p_{24}p_{13}$ und $Q_3 = p_{34}p_{12}$.	$q_2 = P_{24}P_{13}$ und $q_3 = P_{34}P_{12}$.
Das Viereck ist ein Parallelogramm, falls Q_1 und Q_3 Fernpunkte sind.	Das Vierseit ist ein <i>Zentrigramm</i> , falls q_1 und q_3 Nahstrahlen sind.
Das Parallelogramm ist ein Rechteck, falls p_{12} und p_{23} orthogonal sind.	Das Zentrigramm ist ein <i>Rechtseit</i> , falls P_{12} und P_{23} orthogonal sind.
Das Rechteck ist ein Quadrat, falls auch p_{13} und p_{24} orthogonal sind.	Das Rechtseit ist ein <i>Polarquadrat</i> , falls auch P_{13} und P_{24} orthogonal sind.

In Abb. 3.1 sind die Geraden p_{12} , p_{34} und p_{23} , p_{41} jeweils parallel, die beiden Punkte $p_{12}p_{34} = Q_3$ und $p_{23}p_{41} = Q_1$ also Fernpunkte und $Q_2 = M$ der Mittelpunkt. Daher sind die Geraden $q_3 = P_{12}P_{34}$ und $q_1 = P_{23}P_{41}$ Nahstrahlen.

In Abb. 3.2 sind außerdem noch die Fernpunkte Q_1 und Q_3 orthogonal, d.h auch die Nahstrahlen q_1 und q_3 sind orthogonal.

In Abb. 3.3 sind außerdem noch die Diagonalen p_{13} und p_{24} orthogonal, also auch die Punkte P_{13} und P_{24} .

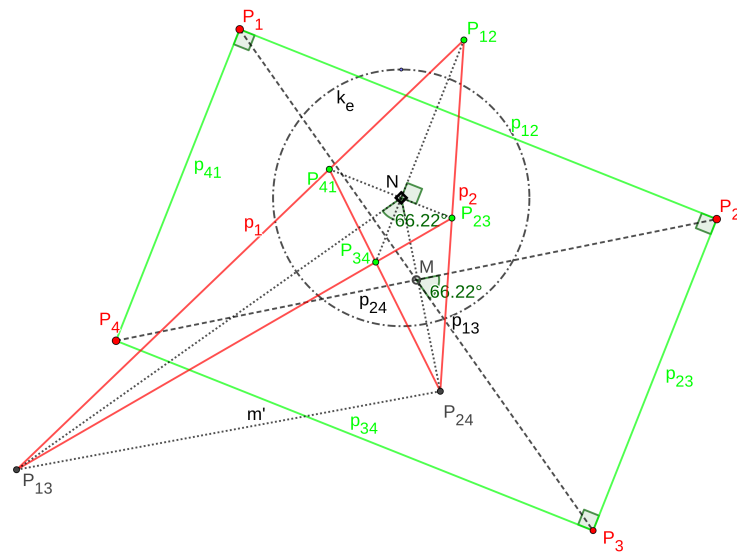


Abbildung 3.2: Rechteck und Rechtseit

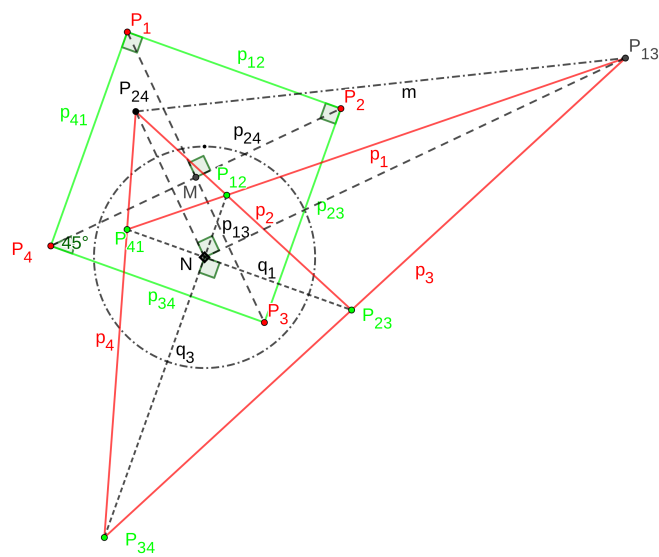


Abbildung 3.3: Quadrat und Polarquadrat

3.3 Mittelpunkt und Mittelstrahl

In Abb. 3.4 wird eine Gerade s mit zwei Punkten A und B und dem Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ durch die Polarität am Einheitskreis k_e abgebildet. Der Mittelpunkt von k_e

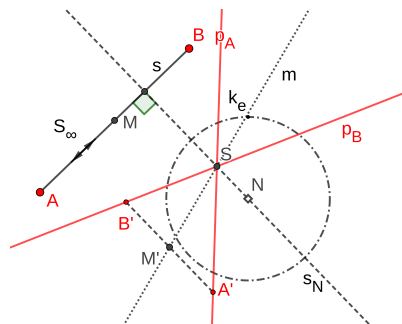


Abbildung 3.4: Mittelpunkt und Mittelstrahl

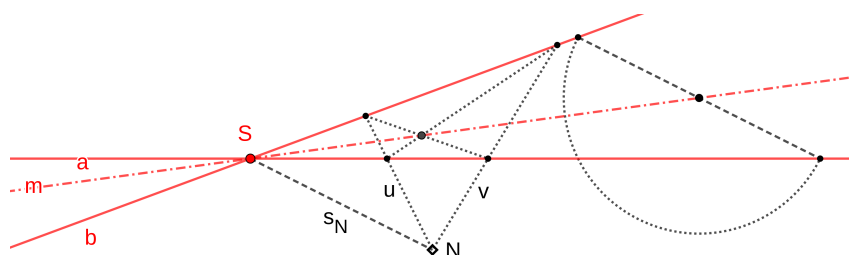


Abbildung 3.5: Mittelstrahl zweier Geraden

sei der Nahpunkt N . Die duale Figur besteht dann aus dem Pol S von s und den Polaren p_A und p_B von A und B und der Polaren m von M . Die Polare des Fernpunktes S_∞ von s ist der mit S inzidierende Nahstrahl s_N , der wegen der Pol-Polare Beziehung orthogonal zu s verläuft.

Da das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Punktreihe sich bei projektiven Abbildungen nicht ändert, wird ein harmonischer Punktwurf durch die Polarität in einen harmonischen Geradenwurf abgebildet. Es ist also $DV(p_A p_B s_N m) = DV(ABS_\infty M) = -1$ und die zu p_A, p_B, s_N vierte harmonische Gerade des Geradenbüschels (S) nennen wir den *Mittelstrahl* von p_A und p_B . Dieser kann durch eine Parallele zum Nahstrahl s_N konstruiert werden, die die Polaren p_A und p_B in den Punkten A' und B' und den Mittelstrahl $m = SM'$ im Mittelpunkt M' der Strecke $\overline{A'B'}$ trifft. Eine weitere Konstruktion ergibt sich mit zwei beliebigen durch N gehenden Geraden u und v gemäß Abb. 3.5.

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Mittelpunkten M_{AC} und M_{BC} .

Dann sind die Geraden $s = M_{AC}M_{BC}$ und c parallel.

Gegeben ist ein Dreieck abc mit den Ecken A, B, C und den Mittelstrahlen m_{ac} und m_{bc} .

Dann sind die Punkte $S = m_{ac}m_{bc}$ und C zentriert (Abb. 3.6).

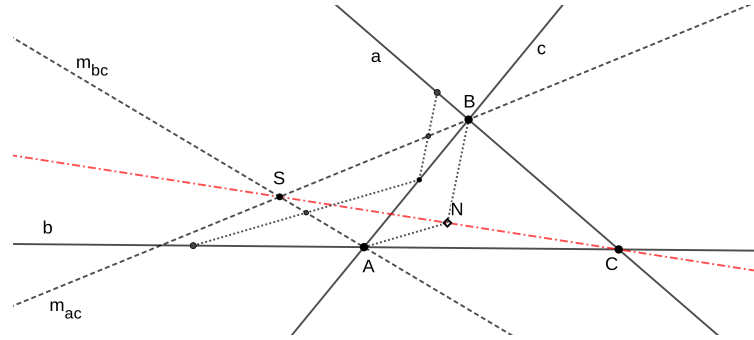


Abbildung 3.6: S und C sind zentriert

3.4 Koordinaten und das Doppelverhältnis

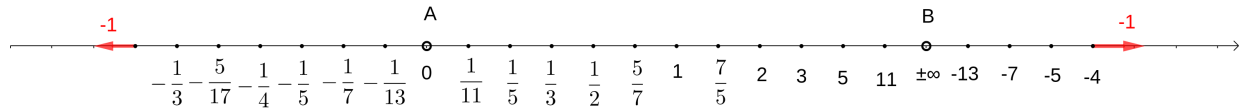


Abbildung 3.7: Verhältnisskala

In der Abb. 3.7 ist die x-Achse dargestellt mit dem Ursprung A. Der Punkt P hat die Koordinate x und der Punkt B hat die Koordinate $x_B = 12$. Unter jeden Gitterpunkt P ist das Verhältnis

$$\lambda_P = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x}{12 - x}$$

notiert. Es sind die Verhältniskoordinaten des Punktes P in Bezug auf die Strecke $\overline{AB}$. Sie sind invariant gegenüber affinen Abbildungen, bei denen ja die Ferngerade eine Fixgerade ist. Interessant ist, dass der Fernpunkt der x-Achse sowohl bei Annäherung nach links als auch bei Annäherung nach rechts die Verhältniskoordinate -1 erhält, weil eben eine Gerade nur *einen* Fernpunkt hat.

Ist E ein weiterer Punkt auf der x-Achse und ist $\lambda_E = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$ seine Verhältniskoordinate in Bezug auf dieselbe Strecke $\overline{AB}$, so ist $DV(ABPE) = \lambda_P : \lambda_E$ das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, P, E in Bezug auf die Strecke $\overline{AB}$. Das Doppelverhältnis ist invariant gegenüber projektiven Abbildungen, insbesondere gegenüber Polaritäten.

In der Abbildung 3.8 ist oberhalb der x-Achse das Doppelverhältnis

$$DV(ABPE) = \lambda_P : \lambda_E$$

$$DV(ABPE) = \frac{x}{12 - x} : \frac{1}{12 - 1}$$

$$DV(ABPE) = \frac{11x}{12 - x}$$

3.4 Koordinaten und das Doppelverhältnis

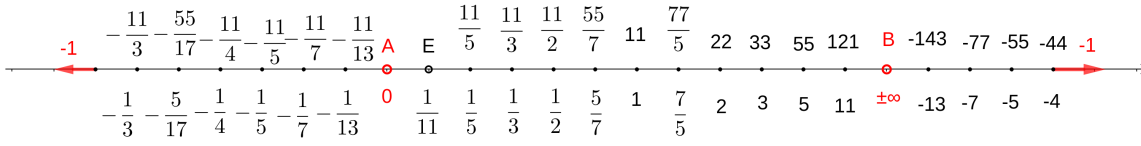


Abbildung 3.8: Doppelverhältnis

für die äquidistanten Gitterpunkte P mit $x_E = 1$ notiert.

Allgemein ist

$$DV(ABPE) = \frac{x}{x_B - x} : \frac{1}{x_B - 1}$$

$$DV(ABPE) = x \frac{(x_B - 1)}{x_B - x}$$

$$DV(ABPE) = x \frac{1 - \frac{1}{x_B}}{1 - \frac{x}{x_B}}$$

Für $x_B \rightarrow \infty$ wird B zum Fernpunkt der x-Achse und das Doppelverhältnis $DV(ABPE) = x$ liefert die übliche x-Koordinate von P im kartesischen Koordinatensystem.

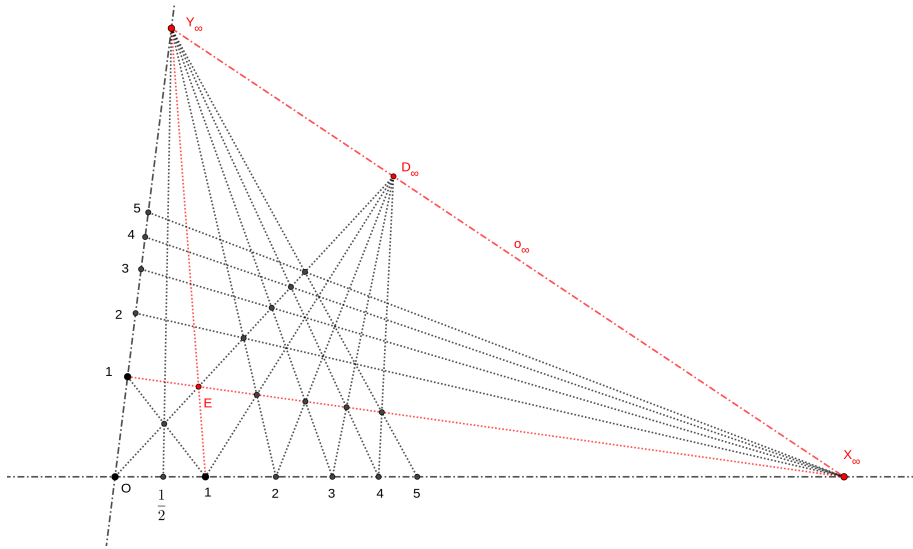


Abbildung 3.9: Projektive Skala

Abb. 3.9 enthält eine projektive Abbildung des Koordinatengitters eines kartesischen Koordinatensystems als Teil eines Möbiusnetzes. Punkt O ist der Ursprung, X_∞ das Bild des Fernpunktes der x-Achse und Y_∞ das Bild des Fernpunktes der y-Achse. Die Zahlen auf den Achsen sind die Doppelverhältnisse $DV(OX_\infty PE_x)$ bzw. $DV(OY_\infty PE_y)$ der Punkte auf den Achsen, wenn E_x bzw. E_y die Einheitspunkte auf den Achsen sind.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Das Doppelverhältnis

$$\lambda = DV(OX_\infty PE_x)$$

$$\lambda = \frac{\overline{OP}}{\overline{PX_\infty}} : \frac{\overline{OE_x}}{\overline{EX_\infty}}$$

liefert auf der x-Achse die Maßzahlen der projektiven Koordinaten des Punktes P vom Punkt O aus gemessen. Vertauscht man die Grundpunkte O und X_∞ der Bezugsstrecke, so erhält man die Koordinaten des Punktes P von X_∞ aus gemessen, die sogenannten *Fernkoordinaten* von P, weil X_∞ das Bild eines Fernpunktes ist.

Es ist nun

$$DV(X_\infty OPE_x) = \frac{\overline{X_\infty P}}{\overline{PO}} : \frac{\overline{X_\infty E_x}}{\overline{E_x O}}$$

$$DV(X_\infty OPE_x) = \frac{\overline{PX_\infty}}{\overline{OP}} : \frac{\overline{E_x X_\infty}}{\overline{OE_x}}$$

$$DV(X_\infty OPE_x) = \frac{\overline{OE_x}}{\overline{E_x X_\infty}} : \frac{\overline{OP}}{\overline{PX_\infty}}$$

$$DV(X_\infty OPE_x) = \frac{1}{\lambda}$$

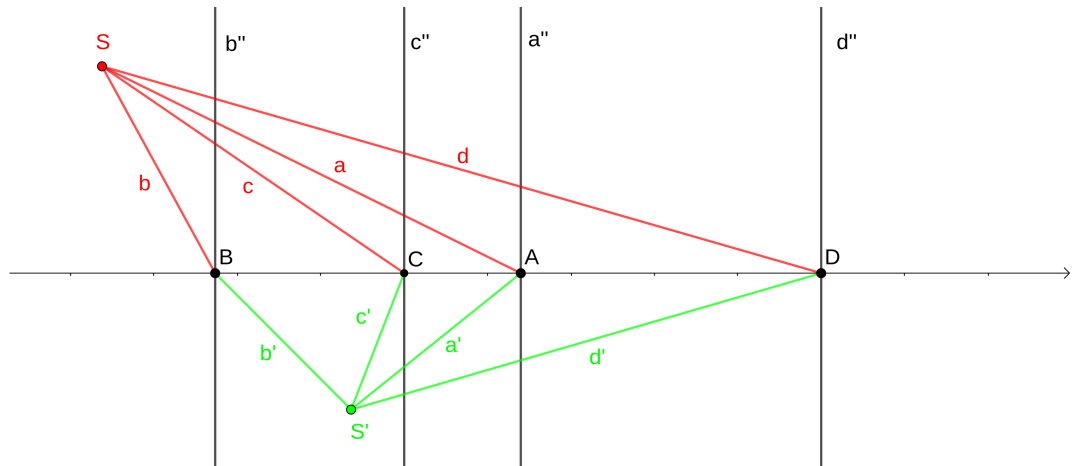


Abbildung 3.10: Doppelverhältnis von Geraden

Bekanntlich ist das Doppelverhältnis von vier Geraden eines Geradenbüschels gleich dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte dieser Büschelgeraden mit irgend einer Geraden, die nicht dem Büschel angehört. In Abb. 3.10 sind drei Geradenbüschel mit jeweils vier Geraden dargestellt, deren Doppelverhältnisse identisch sind:

$$DV(ABCD) = DV(abcd) = DV(a'b'c'd') = DV(a''b''c''d'')$$

Zwei Geraden a und b schließen die Winkel α und $180^\circ - \alpha$ miteinander ein. Wegen $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ ist $\sin(ab)$ eindeutig bestimmt. Bekanntlich ist dann in einem halben orientierten Geradenbüschel $(ba) = -(ab)$ und mit einem Punkt S als Träger

$$DV(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}$$

auch dem Vorzeichen nach eindeutig bestimmt.

Analog den Koordinaten von Punkten in einer Punktreihe können wir auch Koordinaten von Geraden in einem Geradenbüschel definieren. Sind n , u , a und e vier Geraden eines Büschels, so ist

$$\lambda_a = DV(nuae)$$

die Koordinate der Gerade a in Bezug auf die Grundgeraden n und u und der Einheitsgeraden e .

Bemerkung 5. In der Abb. 3.9 entsteht das Möbiusnetz durch die Festlegung der vier Punkte O , E , X_∞ und Y_∞ und damit der rationalen Zahlen auf den Geraden OX_∞ und OY_∞ , unabhängig von einer starren Länge. Somit kann man auch unabhängig von einem auf dem gewöhnlichen Abstand beruhendem Doppelverhältnis Koordinaten einführen.

3.4.1 Koordinaten in der polareuklidischen Ebene

Auf Grund der Darstellungen im vorigen Abschnitt können wir nun folgende Koordinaten von Punkten und Geraden definieren:

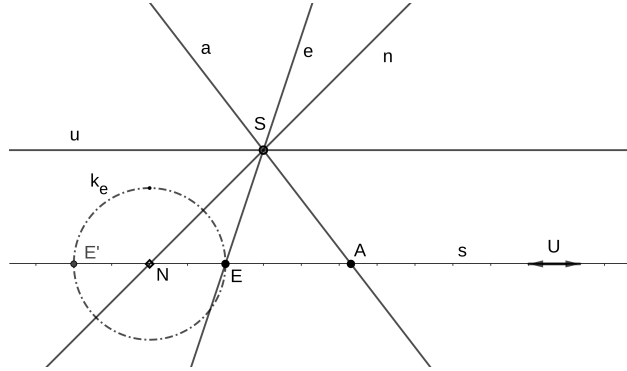


Abbildung 3.11: Koordinaten

Definition. Es sei k_e der Einheitskreis mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt und dem beliebigen Einheitspunkt E auf k_e . Es sei A irgendein Punkt in dem Nahstrahl $s = NE$ und U der Fernpunkt von s . Dann ist $\lambda_A = DV(NUAE)$ die Nahkoordinate des Punktes A und $\frac{1}{\lambda_A} = DV(UNAE)$ die Fernkoordinate des Punktes A in der Punktreihe (s) (Abb. 3.11).

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Ist nun irgendein Punkt S der Träger eines Strahlenbüschels mit den Geraden $n = NS$, $e = ES$, $u = US$ und $a = AS$, so ist $\lambda_a = DV(nuae)$ die Nahkoordinate der Gerade a und $\frac{1}{\lambda_a} = DV(unae)$ die Fernkoordinate der Gerade a im Geradenbüschel (S) . Die Gerade u ist als Orthogonale zu n im Trägerpunkt S eindeutig bestimmt und s ist die Parallele zu u durch N .

Bemerkung 6. Sind E und E' die Schnittpunkte eines Nahstrahls mit dem Einheitskreises, dann sind die Koordinaten durch die Angabe $\overline{NE} = 1$ gerichtet und die Gerade hat eine Orientierung oder einen Durchlaufungssinn. So ist z.B. $\overline{EN} = -1$ und $\overline{NE'} = -1$ und der Abstand $\overline{E'E}$ ist $\overline{E'E} = \overline{NE} - \overline{NE'} = 1 - (-1) = 2$.

3.4.2 Abstand und Weite

Durch den Einheitskreis ist auf jeder Geraden der Ebene eine Maßeinheit gegeben, so dass jeder gerichteten Strecke $\overline{AB}$ eine positive oder negative Maßzahl $|AB|$ als Länge oder Abstand zugeordnet werden kann. Dies geschieht durch die Festlegung zweier Punkte O und E auf der Geraden mit $|OE| = 1$ und $|EO| = -1$.

Zwei Punkte A und B werden durch eine Polarität in ihre beiden Polaren a und b abgebildet. Was wird dabei aus dem Abstand $|AB|$ der beiden Punkte? Gibt es eine dem Abstand entsprechende *Weite* $|ab|$ ihrer Polaren in dem Fächer $\overline{ab}$?

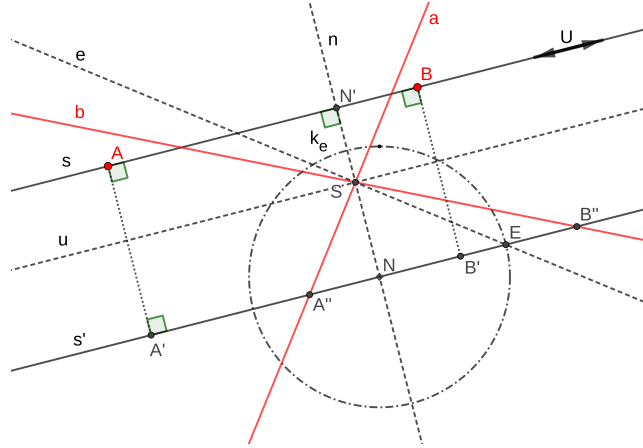


Abbildung 3.12: Abstand der Polaren

In Abb. 3.12 sind in einer Geraden s zwei Punkte A und B gezeichnet. Ihre Polaren a und b in Bezug auf den Einheitskreis k_e schneiden sich im Pol S von s und treffen den zu s parallelen Nahstrahl s' in den Punkten A'' und B'' . Die durch A und B gehenden Orthogonalen zu s treffen s' in den Punkten A' und B' , es ist also $|AB| = |A'B'|$. Ist U der Fernpunkt von s und s' , so sind $\lambda_{A'} = DV(NUA'E)$ und $\lambda_{B'} = DV(NUB'E)$ die Nahkoordinaten von A' und B' und es ist

$$|A'B'| = \lambda_{B'} - \lambda_{A'}$$

3.4 Koordinaten und das Doppelverhältnis

Wir ergänzen das Polarenbüschel durch den Nahstrahl $n = NS$, die Einheitsgerade $e = ES$ und die Parallele $u = US$ zu s . Dann sind $\lambda_a = DV(nuae)$ und $\lambda_b = DV(nube)$ die Nahkoordinaten von den Polen a und b und $\frac{1}{\lambda_a} = DV(unae)$ bzw. $\frac{1}{\lambda_b} = DV(unbe)$ die Fernkoordinaten der Polen a bzw. b .

Die Schnittpunkte der fünf Büschelgeraden n , u , a , b und e mit dem Nahstrahl s' sind die Punkte N , U , A'' , B'' und E , daher ist

$$\begin{aligned} DV(nuae) &= DV(NUA''E) & DV(nube) &= DV(NUB''E) \\ \lambda_a &= \lambda_{A''} & \lambda_b &= \lambda_{B''} \end{aligned}$$

d.h. die Nahkoordinaten der Polen sind mit den gerichteten Nahkoordinaten $\lambda_{A''} = |NA''|$ und $\lambda_{B''} = |NB''|$ identisch. Diese sind aber die Kehrwerte der Nahkoordinaten der Punkte A' und B' . Denn da A'' auf der Polaren a von A liegt, geht die Polare a'' von A'' durch A und trifft s' orthogonal in A' . Es ist also $|NA''| \cdot |NA'| = 1$, also $\lambda_{A''} = \frac{1}{\lambda_{A'}}$. (siehe Abschnitt Pol und Polare Beziehung auf Seite 9). Ebenso ist $\lambda_{B''} = \frac{1}{\lambda_{B'}}$. Der Abstand $|AB|$ läßt sich daher auch durch die Koordinaten λ_a und λ_b der Polen a und b darstellen:

$$\begin{aligned} |AB| &= |A'B'| \\ |AB| &= \lambda_{B'} - \lambda_{A'} \\ |AB| &= \frac{1}{\lambda_{B''}} - \frac{1}{\lambda_{A''}} \\ |AB| &= \frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{\lambda_a} \end{aligned}$$

Somit bietet sich folgende Definition des Abstandes zweier Geraden a und b mit dem Schnittpunkt $ab = S$ an:

Definition. Der Abstand $|ab| = \frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{\lambda_a}$ zweier Geraden a und b ist die Differenz ihrer gerichteten Fernkoordinaten im Geradenbüschel ab .

Mit dieser Definition gilt der

Satz. Der Abstand zweier Geraden a und b ist gleich dem Abstand ihrer Pole A und B in Bezug auf die Polarität am Einheitskreis: $|ab| = |AB|$.

Bemerkung 7. Gehören zwei Geraden a und b einem Geradenbüschel an, dessen Träger ein Fernpunkt ist, so sind die Nahkoordinaten λ_a und λ_b die gewöhnlichen Abstände der beiden Geraden vom Nahpunkt N , und es ist $|ab| = \frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{\lambda_a}$ der gewöhnliche Abstand der beiden parallelen Geraden.

Formel von IMMO DIENER:

Satz. Sind A' und B' die Orthopunkte zweier Geraden a und b , dann ist $|ab| = \frac{|A'B'|}{|NA'| \cdot |NB'|}$

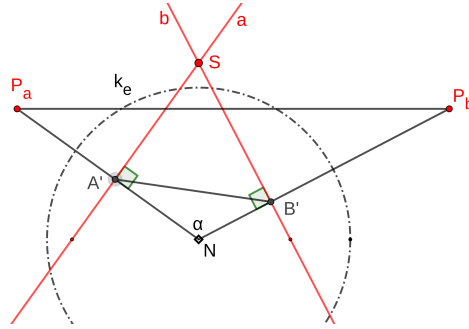


Abbildung 3.13: Abstand

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus der Polarität am Einheitskreis (Abb. 3.13) mit dem Kosinussatz in den beiden Dreiecken NAB und NP_aP_b nach Eliminierung von $\cos \alpha$ und den Beziehungen

$$|ab| = |P_a P_b| \qquad |NP_a| \cdot |NA'| = 1 \qquad |NP_b| \cdot |NB'| = 1 \qquad (3.1)$$

Denn aus (3.1) folgt

$$\frac{|NP_a|}{|NP_b|} = \frac{|NB'|}{|NA'|} \quad \frac{|NP_b|}{|NP_a|} = \frac{|NA'|}{|NB'|} \quad \frac{|NP_a|}{|NP_b|} + \frac{|NP_b|}{|NP_a|} = \frac{|NB'|}{|NA'|} + \frac{|NA'|}{|NB'|}$$

und aus dem Kosinussatz im Dreieck NP_aP_b folgt

$$2 \cos \alpha = \frac{|NP_a|}{|NP_b|} + \frac{|NP_b|}{|NP_a|} - \frac{|P_a P_b|^2}{|NP_a| \cdot |NP_b|}$$

und aus dem Kosinussatz im Dreieck NAB folgt

$$2 \cos \alpha = \frac{|NA'|}{|NB'|} + \frac{|NB'|}{|NA'|} - \frac{|A'B'|^2}{|NA'| \cdot |NB'|}$$

Somit ist auch

$$\frac{|P_a P_b|^2}{|NP_a| \cdot |NP_b|} = \frac{|A' B'|^2}{|NA'| \cdot |NB'|}$$

$$|P_a P_b|^2 = \frac{|A' B'|^2}{|NA'|^2 \cdot |NB'|^2}$$

und schließlich folgt mit $|ab| = |P_a P_b|$ die Behauptung $|ab| = \frac{|A'B'|}{|NA'| \cdot |NB'|}$.

3.5 Dreiecke und Dreiseite

Über Dreiecke gibt es eine Vielzahl von eindrucksvollen Sätzen über Inzidenzen. Wir untersuchen den jeweils dualen Satz im Dreieck.

3.5.1 Ähnlichkeit und Verwandtschaft

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Fernpunkte der Seiten des einen Dreiecks jeweils dieselben Winkel miteinander bilden wie die Fernpunkte der Seiten des anderen Dreiecks.

Zwei Dreiseite sind *verwandt*, wenn die Nahstrahlen der Eckpunkte des einen Dreiseits jeweils dieselben Winkel miteinander bilden wie die Nahstrahlen der Eckpunkte des anderen Dreiseits.

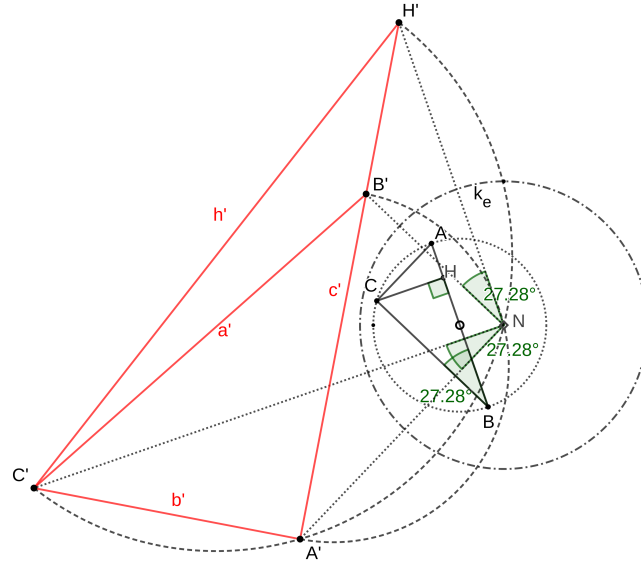


Abbildung 3.14: Verwandte Dreiseite

In Abb. 3.14 liefert das rechtwinklige Dreieck ABC mit der Höhe h_c die drei ähnlichen Dreiseite ABC, BCH, ACH, die in die drei verwandten Dreiecke $A'B'C'$, $B'C'H'$, $A'C'H'$ abgebildet werden. Da die Seiten a und b und die Seiten c und h_c orthogonal sind, sind auch die Punkte A' und B' sowie C' und H' orthogonal, was durch die beiden Thaleskreise angedeutet ist. Da die Seiten a und c sowie die Seiten b und h_c jeweils den gleichen Winkel bilden, sind auch die Winkel der Punkte A' und C' sowie B' und H' jeweils gleich groß. Alle drei Tripel stimmen also in zwei Winkeln überein und sind daher verwandt.

Hat ein Dreiseit abc die zwei gleichen Winkel $(ac) = (bc)$, dann hat es auch die zwei gleichen Abstände $|AC'| = |BC'|$.

Hat ein Dreieck $A'B'C'$ die zwei gleichen Winkel $(A'C') = (B'C')$, dann hat es auch die zwei gleichen Abstände $|a'c'| = |b'c'|$.

In Abb. 3.15 wurde der Nahpunkt N in den Punkt C eines Dreiseits mit den gleichen Basiswinkeln $(ac) = (bc)$ gelegt. Dadurch ist die Polare c' von C die Ferngerade und die Pole A' und B' von a und b sind Fernpunkte. Die Nahkoordinaten $\lambda_{a'} = |NA''|$ und $\lambda_{b'} = |NB''|$ der Seiten a' , b' sind dann die Abstände der Seiten a' und b' vom Nahpunkt

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

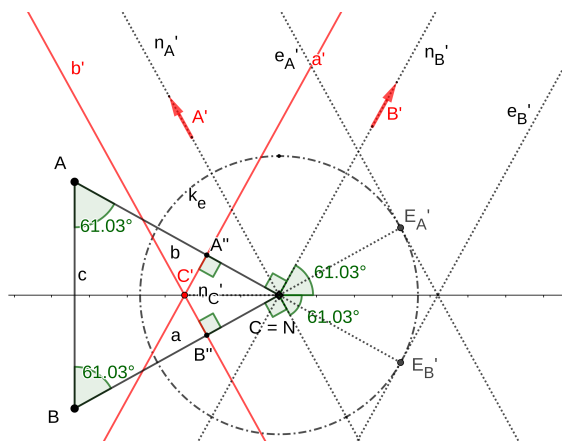


Abbildung 3.15: Basiswinkel

N (siehe Bemerkung 7 auf Seite 27). Es ist also

$$\begin{aligned} |c'a'| &= \frac{1}{\lambda_{a'}} - \frac{1}{\lambda_{c'}} & |c'b'| &= \frac{1}{\lambda_{b'}} - \frac{1}{\lambda_{c'}} \\ |c'a'| &= \frac{1}{\lambda_{a'}} & |c'b'| &= \frac{1}{\lambda_{b'}} \end{aligned}$$

da $\frac{1}{\lambda_{c'}} = 0$ wegen $\lambda_{c'} = \infty$.

Die beiden Dreiecke $NC'A''$ und $NC'B''$ sind kongruent, weil sie in der Seite NC' und zwei Winkeln übereinstimmen, daher ist $|NA''| = |NB''|$ und somit auch $|c'a'| = |c'b'|$.

3.5.2 Schwerpunkt und Leichtgerade

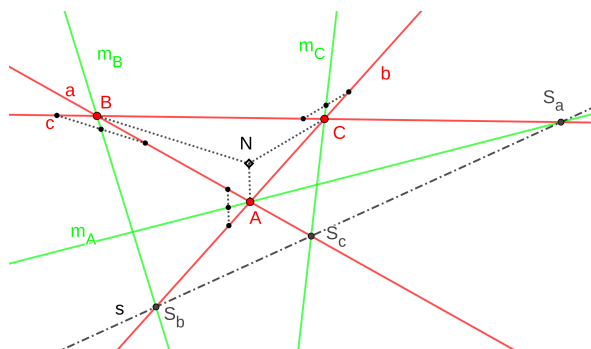


Abbildung 3.16: Leichtgerade

Schwerpunkt

Sind M_a , M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten a , b und c eines Dreiecks ABC , so

Leichtgerade (Abb. 3.16)

Sind m_A , m_B und m_C die Mittelstrahlen der Ecken A , B und C eines Dreiecks abc ,

gehen die Verbindungsgeraden $s_a = AM_a$, $s_b = BM_b$ und $s_c = CM_c$ durch den Schwerpunkt S des Dreiecks.

so liegen die Schnittpunkte $S_A = am_A$, $S_B = bm_B$ und $S_C = cm_C$ in der *Leichtgeraden* s des Dreiseits.

3.5.3 Die Höhensätze

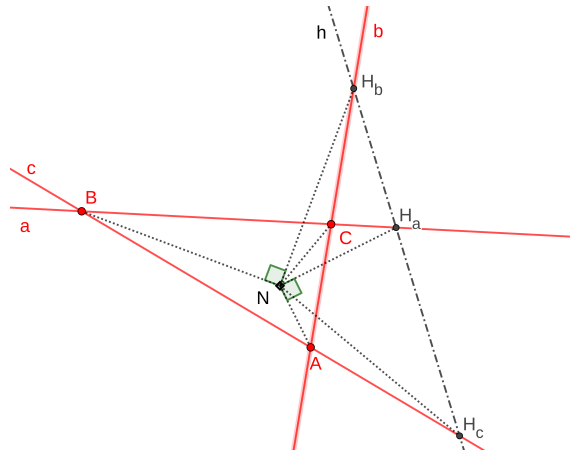


Abbildung 3.17: Duale Höhen im Dreieck

Höhensatz

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c, so ist die mit A inzidierende zu a orthogonale Gerade h_A eindeutig bestimmt, ebenso h_B und h_C , und die drei Geraden h_A , h_B und h_C inzidieren mit einem Punkt H.

Dualer Höhensatz

Ist abc ein Dreieck mit den Ecken A, B, C, so ist der mit a inzidierende zu A orthogonale Punkt H_a eindeutig bestimmt, ebenso H_b und H_c , und die drei Punkte H_a , H_b und H_c inzidieren mit einer Geraden h (Abb. 3.17).

Bemerkung 8. Welche Lagen können der Höhenschnittpunkt H und dual dazu die Gerade h einnehmen? Dies findet man z.B. heraus durch die besonderen Lagen der Punkte B und C bzw. der Seiten b und c in der dualen Figur.

Wir halten im Dreieck die Seiten b und c fest und bewegen zunächst C auf b und schließlich auch B auf c. Dann gibt es drei besondere Lagen:

1. a und b sind orthogonal,
2. C ist der Fernpunkt von b.
3. C ist der Fernpunkt von b und B ist der Fernpunkt von c.

Im ersten Fall ist $H = C$, er ist in Abb. 3.18 links dargestellt.

Wir halten im Dreieck die Ecken B und C fest und drehen zunächst c um B und schließlich auch b um C. Dann gibt es drei besondere Lagen:

1. A und B sind orthogonal,
2. c ist der Nahstrahl von B,
3. c ist der Nahstrahl von B und b ist der Nahstrahl von C.

Im ersten Fall ist $h = c$, er ist in Abb. 3.18 rechts dargestellt.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Im zweiten Fall ist H der zu C orthogonale Fernpunkt, er ist in Abb. 3.19 links dargestellt.

Im dritten Fall ist a die Ferngerade und H ist nicht mehr eindeutig bestimmt.

Im zweiten Fall ist h der zu c orthogonale Nahstrahl, er ist in Abb. 3.19 rechts dargestellt.

Im dritten Fall ist A der Nahpunkt und h ist nicht mehr eindeutig bestimmt.

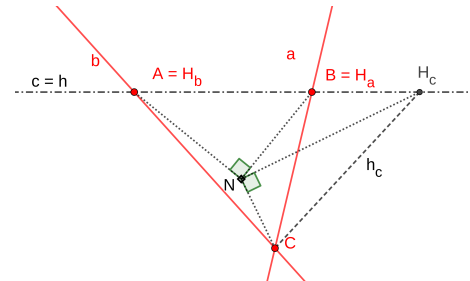
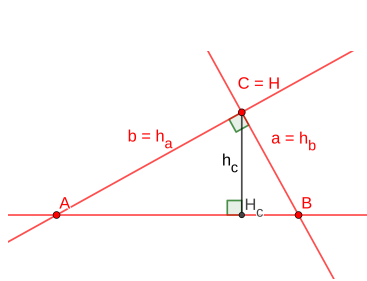


Abbildung 3.18: Grenzlage orthogonal

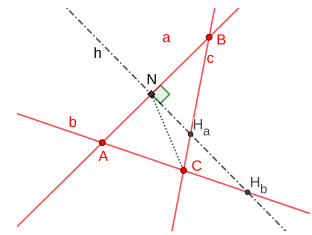
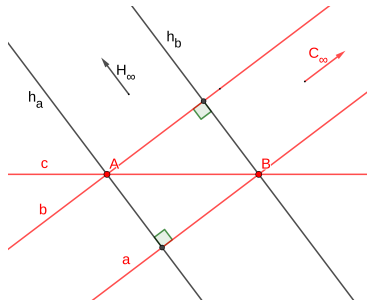


Abbildung 3.19: Grenzlage Fernpunkt

3.5.4 Winkelhalbierende

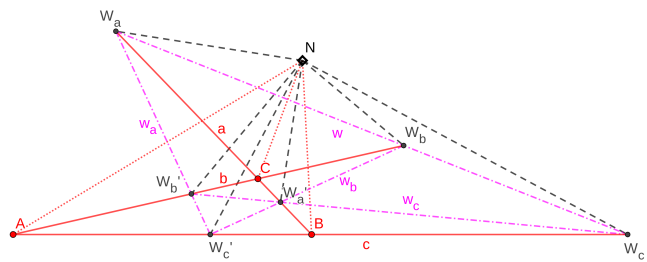
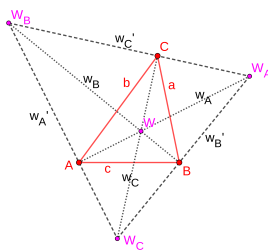


Abbildung 3.20: Winkelhalbierer

Winkelhalbierende (Abb. 3.20 links)

Winkelhalbierer (Abb. 3.20 rechts)

Im Dreiseit abc mit den Ecken A, B, C halbieren die zueinander orthogonalen Geraden w_A und w'_A die Winkel zwischen den Seiten b und c , analoges gilt für w_B, w'_B und w_C, w'_C .

Dann inzidieren

$$w_A w_B w_C = W, \quad w_B w_C w'_A = W_A, \\ w_C w_A w'_B = W_B, \quad w_A w_B w'_C = W_C.$$

Im Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c halbieren die zueinander orthogonalen Punkte W_a und W'_a , die Winkel zwischen den Punkten B und C , analoges gilt für W_b, W'_b und W_c, W'_c .

Dann inzidieren

$$W_a W_b W_c = w, \quad W_b W_c W'_a = w_a, \\ W_c W_a W'_b = w_b, \quad W_a W_b W'_c = w_c.$$

3.5.5 Simsongerade

Simson- oder Wallace-Gerade:

Ist k der Umkreis eines Dreiecks ABC mit den Seiten a, b und c und ist D ein weiterer beliebiger Punkt von k , so gibt es genau eine mit D inzidierende Gerade l_a , die orthogonal zu a ist, ebenso l_b und l_c .

Dann inzidieren die drei Schnittpunkte $L_a = al_a$, $L_b = bl_b$ und $L_c = cl_c$ mit einer Geraden, der Simsongerade des Punktes D (Abb. 3.21, Beweis im Anhang).

Simson-oder Wallace-Punkt:

Ist k der In- oder Ankegelschnitt eines Dreiseits abc mit den Ecken A, B und C und ist d eine weitere beliebige Tangente von k , so gibt es genau einen mit d inzidierenden Punkt L_A , der orthogonal zu A ist, ebenso L_B und L_C .

Dann inzidieren die drei Verbindungsgeraden $l_a = AL_A$, $l_b = BL_B$ und $l_c = CL_C$ mit einem Punkt, dem *Simsonpunkt* von d (Abb. 3.22).

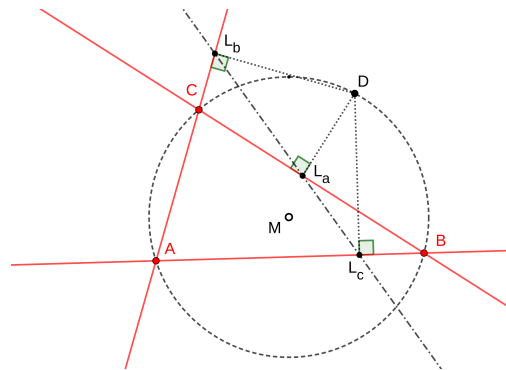


Abbildung 3.21: Simsongerade

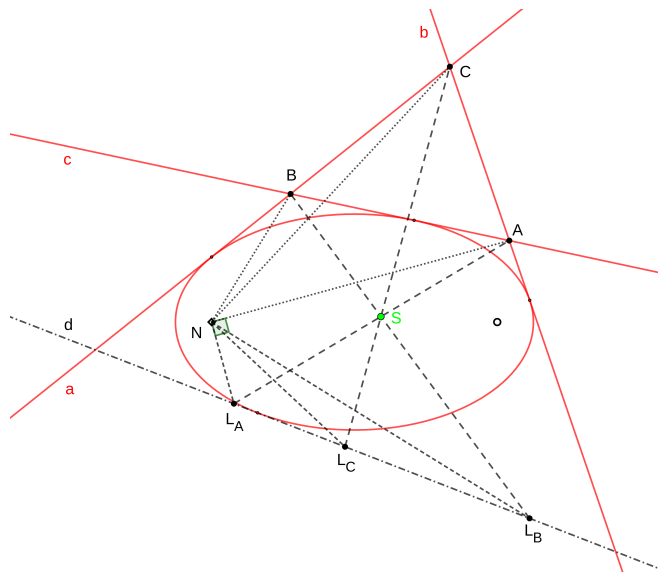
3.5.6 Mittelsenkrechte

Mittelsenkrechtenbüschel

Ist abc ein Dreiseit mit den Ecken A, B und C , so ist die mit dem Mittelpunkt M_a inzidierende zu a orthogonale Gerade g_a eindeutig bestimmt, ebenso g_b und g_c , und die

Orthogonalpunktreihe (Abb. 3.23)

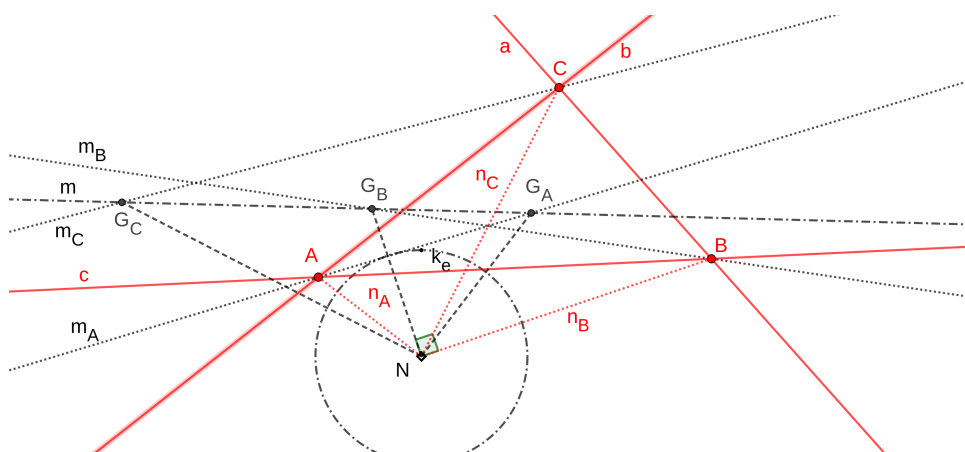
Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b und c , so ist der mit dem Mittelstrahl m_A inzidierende zu A orthogonale Punkt G_A eindeutig bestimmt, ebenso G_B und G_C ,



Abbildungung 3.22: Simsonpunkt

drei Geraden g_a, g_b, g_c inzidieren mit einem Punkt M.

und die drei Punkte G_A, G_B und G_C inzidieren mit einer Geraden m.



Abbildungung 3.23: Orthogonalpunktreihe

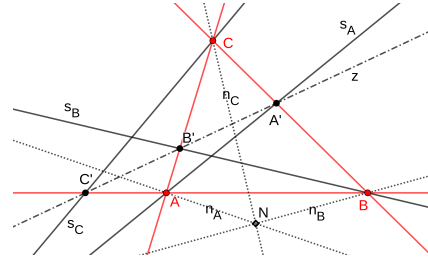
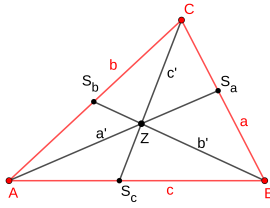


Abbildung 3.24: Satz des Ceva

3.5.7 Ceva und Menelaos

Satz des Ceva (Abb. 3.24 links):

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und Z ein beliebiger Punkt, der nicht mit den Seiten inzidiert, dann ist der Schnittpunkt S_a der Geraden $AZ = a'$ mit der Seite a eindeutig bestimmt, ebenso S_b und S_c . Sind U_a, U_b und U_c die Fernpunkte der Seiten a, b und c , dann gilt

$$\lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \lambda_c = 1$$

mit

$$\lambda_a = DV(BCS_aU_a)$$

$$\lambda_b = DV(CAS_bU_b)$$

$$\lambda_c = DV(ABS_cU_c)$$

Dualer Satz des Ceva (Abb. 3.43 rechts):

Ist abc ein Dreiseit mit den Ecken A, B, C und z eine beliebige Gerade, die nicht mit den Ecken inzidiert, dann ist die Verbindungsgerade s_A des Punktes $az = A'$ mit der Ecke A eindeutig bestimmt, ebenso s_B und s_C . Sind n_A, n_B und n_C die Nahstrahlen der Ecken A, B und C , dann gilt

$$\lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \lambda_c = 1$$

mit

$$\lambda_a = DV(bcs_An_A)$$

$$\lambda_b = DV(cas_Bn_B)$$

$$\lambda_c = DV(abs_Cn_C)$$

Konventionelle Beweisidee:

Alle 9 Geraden treffen die Gerade z in 9 Punkten (Abb. 3.24 rechts). Die Doppelverhältnisse der Geraden sind identisch mit den Doppelverhältnissen der entsprechenden Punkte in z . Dort erhält man Streckenverhältnisse, deren Produkt 1 ergeben muss.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Satz des Menelaos:

Ist abc ein Dreieit mit den Ecken A, B, C und z eine beliebige Gerade, die nicht mit den Ecken inzidiert, dann ist der Schnittpunkt $S_a = az$ eindeutig bestimmt, ebenso S_b und S_c . Sind U_a, U_b, U_c die Fernpunkte der Seiten a, b, c , dann gilt

$$\lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \lambda_c = -1$$

mit

$$\begin{aligned}\lambda_a &= DV(BCS_aU_a) \\ \lambda_b &= DV(CAS_bU_b) \\ \lambda_c &= DV(ABS_cU_c)\end{aligned}$$

Dualer Satz des Menelaos:

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und Z ein beliebiger Punkt, der nicht mit den Seiten inzidiert, dann ist die Verbindungsgerade $s_A = AZ$ eindeutig bestimmt, ebenso s_B und s_C . Sind n_A, n_B, n_C die Nahstrahlen der Ecken A, B, C , dann gilt

$$\lambda_A \cdot \lambda_B \cdot \lambda_C = -1$$

mit

$$\begin{aligned}\lambda_A &= DV(bcs_An_A) \\ \lambda_B &= DV(cas_Bn_B) \\ \lambda_C &= DV(abs_Cn_C)\end{aligned}$$

3.5.8 Umkreis, Inkreis, Ankreis

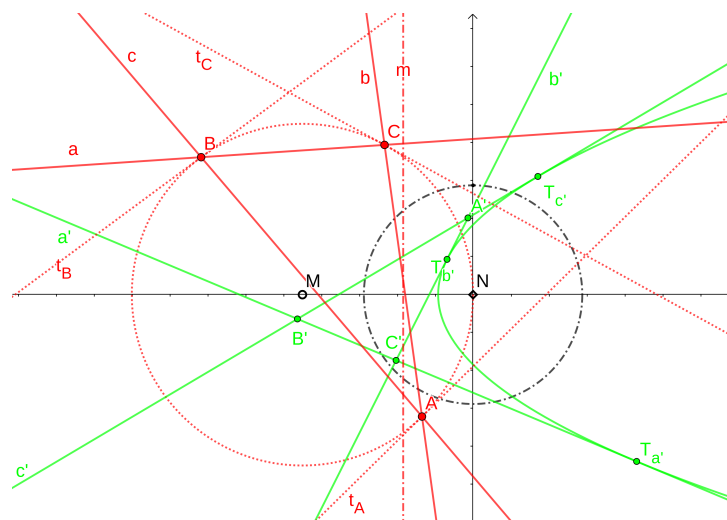


Abbildung 3.25: Umkreis $\leftrightarrow$ Ankurve

Eine Polarität bildet ein Dreieck in ein Dreieit und ein Dreieit in ein Dreieck ab. Der Umkreis des Dreiecks wird dabei in eine Inkurve oder Ankurve des Bilddreieits in Form eines Kegelschnitts abgebildet. Um welchen Kegelschnitt es sich dabei handelt, hängt völlig von der Lage des Polarisators ab.

Der Inkreis und die drei Ankreise des Dreieits werden dabei jeweils in eine Umkurve des Bilddreiecks in Form eines Kegelschnitts abgebildet. Es gibt also fünf Bildkurven, nämlich vier Umkurven des Bilddreiecks und eine In- oder Ankurve des Bilddreieits, deren Gestalt jeweils wiederum von der Lage des Polarisators in Bezug auf das Dreieck

mit dem Dreiseit abhängt.

Es gilt folgender Satz:

Satz. Die Polarität am Einheitskreis bildet einen Kreis in einen Kegelschnitt ab mit dem Nahpunkt als einem Brennpunkt. Das Bild des Mittelpunktes des Kreises ist die zum Brennpunkt gehörende Leitlinie.

Beweis. Die auf Inzidenzen beruhende Pol-Polare Beziehung an einem Kegelschnitt ist gegenüber der Polarität am Einheitskreis invariant: Ist (P, p) ein Pol-Polare-Paar, so ist auch ihr Bild (p', P') ein Pol-Polare-Paar der Bildkurve. Insbesondere ist auch die auf Inzidenzen beruhende Eigenschaft, Brennpunkt und Leitlinie zu sein, invariant in Bezug auf die Polarität am Einheitskreis. Diese bildet nun immer einen Brennpunkt in eine Leitlinie der Bildkurve und eine Leitlinie in einen Brennpunkt der Bildkurve ab. Da die Ferngerade die Leitlinie des Mittelpunktes eines Kreises ist, folgt die Behauptung. $\square$

Alle Kegelschnitte, die die Bildkurven eines Kreises sind, haben also den Nahpunkt als einen gemeinsamen Brennpunkt.

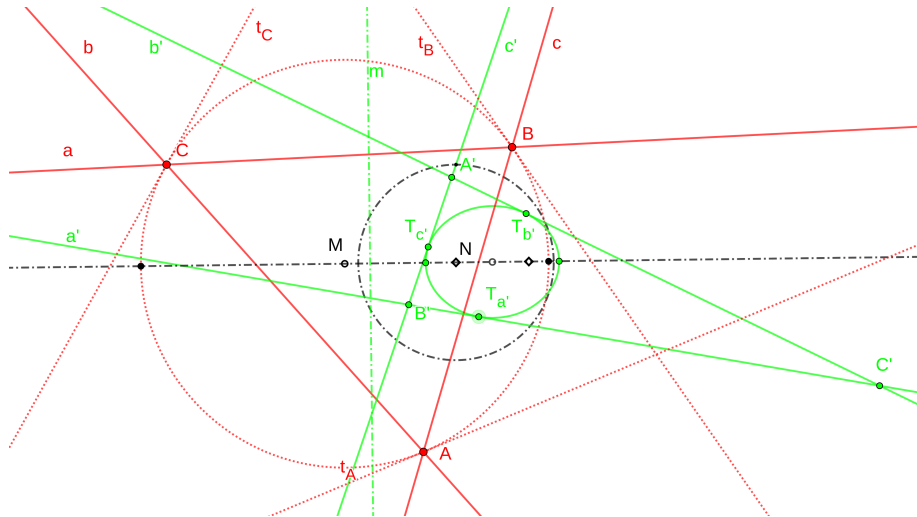


Abbildung 3.26: Umkreis $\leftrightarrow$ Inkurve

In Abb. 3.25 wird der Umkreis des Dreiecks ABC in eine Parabel als Ankurve des Bilddreiseits $a'b'c'$ abgebildet, weil der Umkreis durch den Nahpunkt geht und daher die Ferngerade Tangente der Bildkurve ist.

In Abb. 3.26 wird der Umkreis des Dreiecks ABC in eine Ellipse als Inkurve des Dreiseits $a'b'c'$ abgebildet, weil der Nahpunkt im Inneren des Umkreises liegt und daher alle Nahstrahlen Kreissekanten sind. Somit gehen durch alle Fernpunkte jeweils zwei Tangenten der Bildkurve, und diese ist eine Ellipse.

In Abb. 3.27 wird der Inkreis des Dreiseits abc in eine Ellipse als Umkurve des Dreiecks $A'B'C'$ abgebildet, weil der Nahpunkt im Inneren des Inkreises liegt.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Ist der Nahpunkt ein äußerer Punkt eines In- oder An- oder Umkreises eines Dreiecks, so ist die Bildkurve eine Hyperbel, die dann entweder eine Umkurve des Bilddreiecks $A'B'C'$ oder eine Ankurve des Bilddreiseits $a'b'c'$ ist.

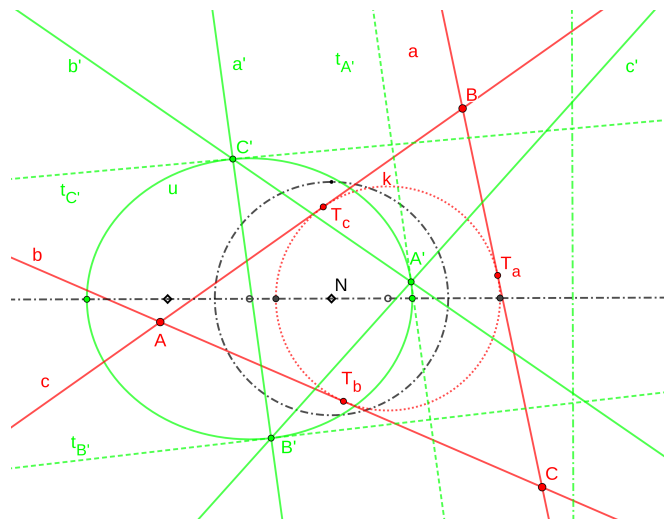


Abbildung 3.27: Inkreis $\leftrightarrow$ Umkurve

Bemerkung 9. Es könnte interessant sein, die verschiedenen Möglichkeiten der Um- In- und Ankurven zu untersuchen, insbesondere auch für pathologische Dreiecke (ein oder zwei Ecken sind Fernpunkte) oder solche mit dem Nahpunkt als einem Eckpunkt.

3.6 Kreisgeometrie

Es sei nochmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die folgenden Aussagen in der jeweils rechten Textspalte sowohl für Ellipsen als auch Parabeln als auch Hyperbeln gelten, weil das Bild eines Kreises je nach Lage des Nahpunktes sowohl eine Ellipse als auch eine Parabel als auch eine Hyperbel sein kann, mit jeweils dem Nahpunkt als Brennpunkt. Dies ist eine Stärke der PEG, sie bringt die Verwandtschaft der Kegelschnitte mit ihren Eigenschaften in Erscheinung.

3.6.1 Peripheriewinkel

Peripheriewinkel (Abb. 3.28 links)

Es sei k ein Kreis mit zwei beliebigen festen Punkten A und B von k , ihren Tangenten t_A und t_B und der Geraden $AB = c$.

Dann teilen die Punkte A und B den Kreis in zwei Kurvenbögen.

Zentriwinkel (Abb. 3.28 rechts)

Es sei k ein Kegelschnitt mit zwei beliebigen festen Tangenten a und b von k , ihren Berührungspunkten T_a und T_b und dem Schnittpunkt $ab = C$.

Dann teilen die Tangenten a und b den Kegelschnitt in zwei Kurvenbögen.

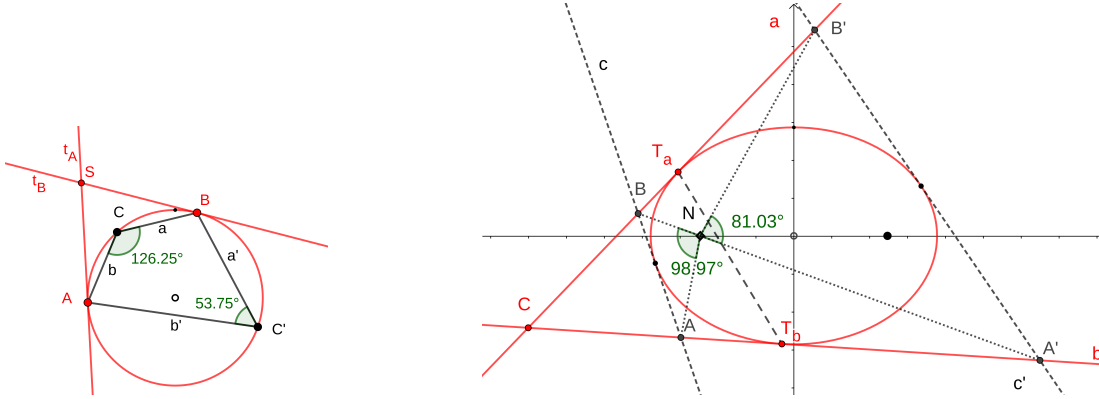


Abbildung 3.28: Peripherie- und Zentriwinkel

Es sei C ein beweglicher Punkt auf dem einen Kurvenbogen mit den Seiten $AC = b$, $BC = a$ und C' ein beweglicher Punkt auf dem anderen Kurvenbogen mit den Seiten $AC' = b'$, $BC' = a'$.

Dann sind die Winkel $\sphericalangle ab$ und $\sphericalangle a'b'$ konstant und es ist $\sphericalangle ab + \sphericalangle a'b' = 180^\circ$.

Es sei c eine bewegliche Tangente auf dem einen Kurvenbogen mit den Punkten $ac = B$, $bc = A$ und c' eine bewegliche Tangente auf dem anderen Kurvenbogen mit den Punkten $ac' = B'$, $bc' = A'$.

Dann sind die Winkel $\sphericalangle AB$ und $\sphericalangle A'B'$ konstant und es ist $\sphericalangle AB + \sphericalangle A'B' = 180^\circ$.

3.6.2 Satz des Thales

Satz des Thales (Abb. 3.29 links)

Ist der Schnittpunkt $S = t_A t_B$ ein Fernpunkt, so ist $\sphericalangle ab = \sphericalangle a'b' = 90^\circ$

Dualer Satz des Thales (Abb. 3.29 rechts)

Ist die Verbindungsgerade $s = T_a T_b$ ein Nahstrahl, so ist $\sphericalangle AB = \sphericalangle A'B' = 90^\circ$.

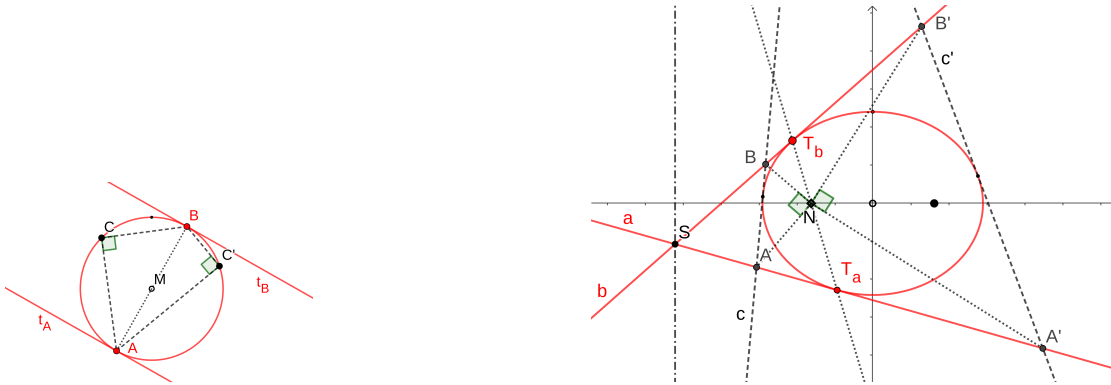


Abbildung 3.29: Satz des Thales

In Abb. 3.30 seien A und B zwei beliebige Punkte eines Kreises mit ihren Tangenten a und b .

In Abb. 3.30 seien a und b zwei beliebige Tangenten eines Kegelschnitts mit ihren Berührungspunkten A und B .

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

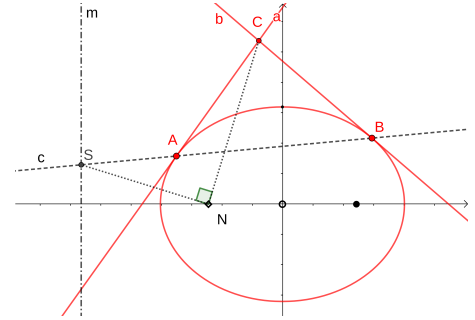
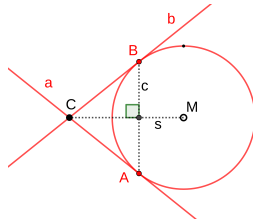


Abbildung 3.30: Orthogonale Punkte

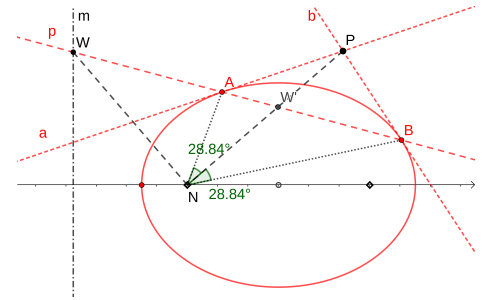
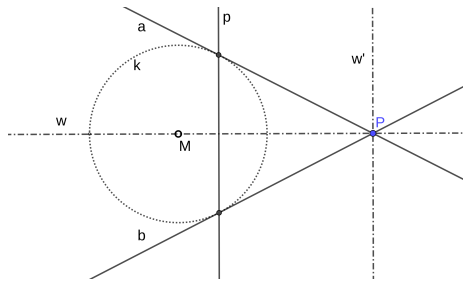


Abbildung 3.31: Winkelhalbierende in Kreis und Ellipse

Es sei $C = ab$ der Schnittpunkt der Tangenten. Dann ist die Verbindungsgerade $s = CM$ von C mit dem Mittelpunkt M orthogonal zur Geraden $c = AB$. C kann auch ein Fernpunkt sein.

Es sei $c = AB$ die Verbindungsgerade der Berührungspunkte. Dann ist der Schnittpunkt $S = cm$ von c mit der Leitlinie m orthogonal zum Punkt $C = ab$. c kann auch ein Nahstrahl sein.

Winkelhalbierende (Abb. 3.31 links)
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und zwei Tangenten a und b von k mit dem Schnittpunkt $P = ab$. Dann ist die Gerade $w = PM$ und ihre durch P gehende orthogonale Gerade w' jeweils eine Winkelhalbierende der Tangenten a und b .

Winkelhalbierender (Abb. 3.31 rechts)
Gegeben sei ein Kegelschnitt k mit der Leitlinie m und zwei Punkten A und B von k mit der Verbindungsgeraden $p = AB$. Dann ist der Punkt $W = pm$ und sein in p liegender orthogonaler Punkt W' jeweils ein Winkelhalbierender der Punkte A und B .

Hieraus folgt mit dem Sachverhalt der Abb. 3.30, dass $P = ab$ auf der Geraden NW' liegt und somit der Nahstrahl von P die Winkelhalbierende der Brennstrahlen von A und B ist.

In Abb. 3.32 sind die Winkelhalbierer in Parabel und Hyperbel dargestellt.



Abbildung 3.32: Winkelhalbierer in Parabel und Hyperbel

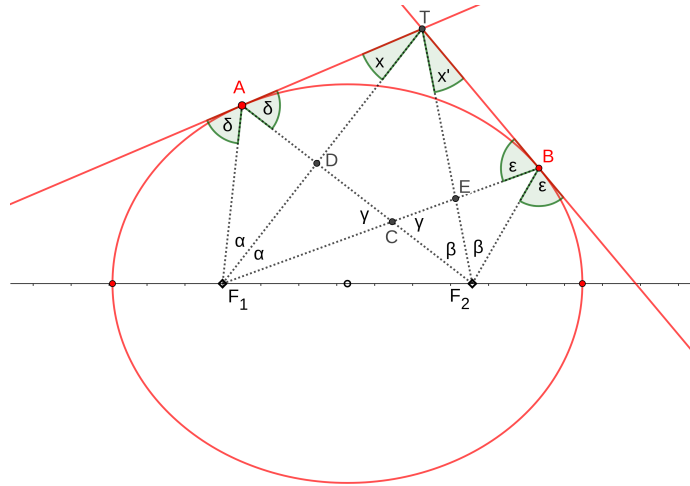


Abbildung 3.33: Satz von Diener

Satz von Diener

Satz. Sind A und B die Berührungspunkte zweier Tangenten einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 , die sich im Punkt T schneiden, so sind die Winkel $\sphericalangle ATF_1 = \sphericalangle BTF_2$ gleich groß.

Beweis. Bekanntlich halbiert bei einer Ellipse die Normale einer Tangente im Berührungspunkt den Winkel zwischen den Brennstrahlen, daher sind die Winkel bei A und die Winkel bei B in der Abb. 3.33 jeweils gleich groß.

Durch Dualisierung der Winkelhalbierenden zweier Kreistangenten (siehe Abb. 3.31) sieht man, dass in Abb. 3.33 die Winkel bei F_1 und F_2 jeweils gleich groß sind.

Aus dem Satz vom Außenwinkel in den Dreiecken DAT und DCF_1 einerseits und den Dreiecken EBT und ECF_2 andererseits (Abb. 3.33) folgt

$$\begin{aligned} x + \delta &= \alpha + \gamma & x' + \varepsilon &= \beta + \gamma \\ x - \gamma &= \alpha - \delta & x' - \gamma &= \beta - \varepsilon \end{aligned}$$

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Es ist also zu zeigen: $\alpha - \delta = \beta - \varepsilon$, denn dann ist auch $x = x'$.

Dies ist aber nach dem Satz vom Nebenwinkel in den Dreiecken CAF_1 und CBF_2 der Fall, da

$$2\alpha + (180^\circ - 2\delta) = 2\beta + (180^\circ - 2\varepsilon)$$

$$\alpha - \delta = \beta - \varepsilon$$

□

3.6.3 Chordale

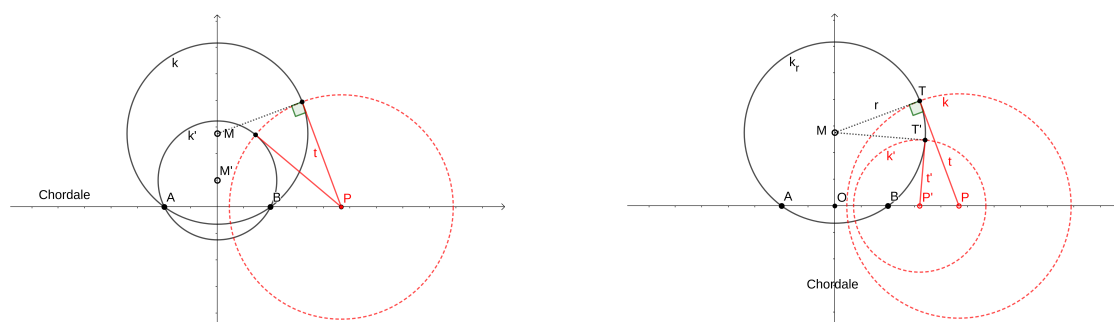


Abbildung 3.34: Chordale

Zu zwei Kreisen gehört stets eine besondere Gerade, die Chordale. Schneiden oder berühren sich die Kreise, so ist die Chordale die gemeinsame Sekante oder Tangente.

Die Chordale heißt auch *Potenzlinie*, da jeder ihrer Punkte die gleiche *Potenz* in Bezug auf die beiden Kreise hat.

Unter der Potenz eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis k versteht man das Produkt der beiden Sekantenabschnitte $|PA| \cdot |PB|$, welches nach dem Sekanten-Tangentensatz für alle Sekanten AB, die durch P gehen, denselben Wert hat.

Die Potenz ist positiv für äußere Punkte, Null für Kreispunkte und negativ für innere Punkte. Ist r der Kreisradius, so ist $-r^2 \leq |PA| \cdot |PB| \leq \infty$.

Für äußere Punkte stimmt die Potenz mit dem Quadrat des Tangentenabschnitts t überein: $|PA| \cdot |PB| = t^2$, und dies ist nach dem Satz des Pythagoras $t^2 = |PM|^2 - r^2$ (siehe Abb. 3.34 links).

Als Potenzlinie existiert die Chordale auch für Kreise, die sich nicht schneiden (Abb. 3.34 rechts).

Die Chordale ist stets orthogonal zu der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte M und M'. Ihre Konstruktion gelingt am einfachsten mit einem geeigneten Hilfskreis h, der die beiden Kreise schneidet. Denn der Schnittpunkt S der beiden Sekanten des Hilfskreises liegt auf der Chordale, sie ist dann die durch S gehende Orthogonale zur Verbindungsgeraden MM' (Abb. 3.35).

Bemerkung 10. Die Chordale existiert auch für den Grenzfall, dass einer der Kreise oder beide zu einem Punkt degenerieren.

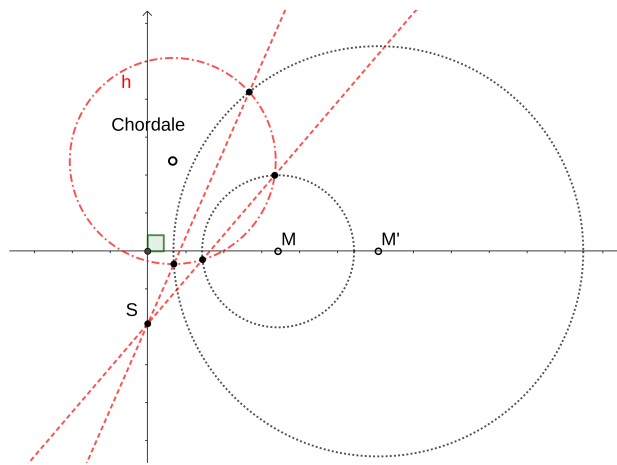


Abbildung 3.35: Konstruktion der Chordale

3.6.4 Orthogonale Kreisbüschel

Alle Kreise, die sich in zwei Punkten A und B schneiden, bilden ein Kreisbüschel mit der Geraden AB als gemeinsamer Chordale. In Abb. 3.34 rechts ist einer von ihnen gezeichnet (k_r). Offenbar erzeugt er mit jedem seiner Punkte einen Kreis mit Mittelpunkt auf AB, den er orthogonal schneidet. Alle diese Kreise haben keine gemeinsamen Punkte und bilden ein zweites Kreisbüschel, aber alle haben eine gemeinsame Chordale, nämlich die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, denn der auf der Mittelsenkrechten liegende Mittelpunkt M des Kreises k_r hat in Bezug auf alle Kreise des zweiten Büschels die gleiche Potenz r^2 .

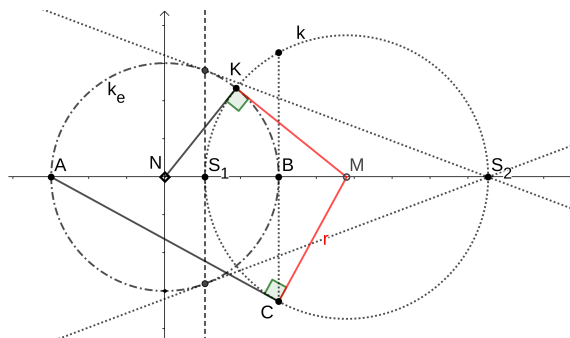


Abbildung 3.36: Pol und Polare im Kreisbüschel

Die Kreise des zweiten Büschels haben aber noch eine gemeinsame Eigenschaft, wie aus Abb. 3.36 ersichtlich: Die beiden Punkte A und B sind konjugierte Punkte in Bezug auf

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

jeden Kreis des Büschels.

Beweis. Es sei C ein Schnittpunkt der Tangente von k_e im Punkt B mit dem Kreis k. Dann trifft die Tangente von k im Berührungspunkt C die Gerade NM in einem Punkt A', und nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck MCA' ist $r^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MA'}$. Andererseits ist nach dem Sekanten-Tangentensatz in Bezug auf den Kreis k_e wegen $\overline{MK} = r$ aber auch $r^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MA}$, und daraus folgt $A' = A$. Somit ist A der Pol der Sekante BC in Bezug auf den Kreis k, qed. $\square$

Bemerkung 11. Vertauscht man die Rollen von k_e und k, so folgt mit der gleichen Argumentation, dass die Polare von S_1 in Bezug auf k_e durch S_2 geht und somit die Polare von S_2 auch durch S_1 geht. Die Schnittpunkte von k mit der Geraden AB sind also konjugierte Punkte einer hyperbolischen Involution auf der Geraden AB mit den Fixpunkten A und B. Daher nennt man das zweite Kreisbüschel *hyperbolisch*.

Die Schnittpunkte der durch A und B gehenden Kreise mit der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ sind hingegen konjugierte Punkte einer gleichsinnigen elliptischen Involution mit der Enge $e = \overline{AB}$. Daher nennt man dieses Kreisbüschel *elliptisch*.

Wir untersuchen nun die durch eine Polarität erzeugten Bildkurven orthogonaler Kreisbüschel.

Zu zwei Kreisen (mit der Ferngerade als gemeinsamer Leitlinie), die zwei Punkte A und B gemeinsam haben, gehört die Verbindungsgerade $AB = c$ als eine besondere zu der Verbindungsgeraden s der Mittelpunkte orthogonale Gerade.

Sie heißt *Chordale* oder *Potenzlinie*.

Sind k_1 und k_2 zwei Kreise (mit der Ferngerade als gemeinsamer Leitlinie), die keinen gemeinsamen Punkt haben, so gibt es in der Verbindungsgeraden $s = M_1M_2$ der beiden Mittelpunkte genau zwei Punkte A und B, die sowohl in Bezug auf k_1 als auch in Bezug auf k_2 konjugiert sind.

Die durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ gehende zu s orthogonale Gerade ist die Chordale von k_1 und k_2 .

Zu zwei Kegelschnitten mit dem Nahpunkt als gemeinsamem Brennpunkt, die zwei Tangenten a und b gemeinsam haben, gehört der Tangentenschnittpunkt $ab = C$ als ein besonderer zum Schnittpunkt L der Leitlinien orthogonaler Punkt.

Wir nennen ihn *Chordpunkt*.

Sind k_1 und k_2 zwei Kegelschnitte mit dem Nahpunkt als gemeinsamem Brennpunkt, die keine gemeinsame Tangente haben, so gibt es in dem Schnittpunkt $S = m_1m_2$ der beiden Leitlinien genau zwei Geraden a und b, die sowohl in Bezug auf k_1 als auch in Bezug auf k_2 konjugiert sind.

Der in dem Mittelstrahl m des Fächers $\overline{ab}$ liegende zu S orthogonale Punkt ist der Chordpunkt von k_1 und k_2 .

Abb. 3.37 enthält ein Beispiel für den Chordpunkt einer Ellipse und einer Parabel, die zwei gemeinsame Tangenten haben. Die beiden Kegelschnitte gehören einem hyperbolischen Kegelschnittbüschel an. Die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten und damit des Chordpunktes C gelingt mit den Schnittpunkten H_1 und H_2 der Parabelscheiteltangente t_S mit dem Hauptkreis der Ellipse. Denn für alle Kegelschnitte gilt bekanntlich:

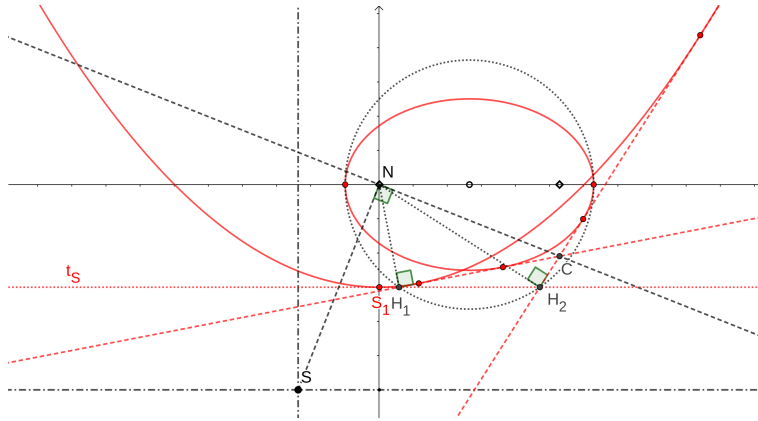


Abbildung 3.37: Chordpunkt Ellipse und Parabel

Ist F ein Brennpunkt und H ein Punkt des Hauptkreises¹, so ist die Orthogonale in H zur Geraden FH eine Tangente. Zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt haben also genau dann mindestens eine gemeinsame Tangente, wenn ihre Hauptkreise mindestens einen gemeinsamen Punkt haben.

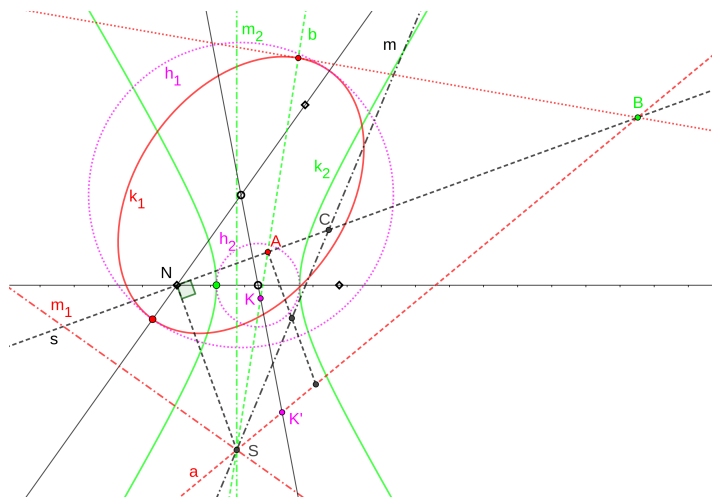


Abbildung 3.38: Chordpunkt Ellipse und Hyperbel

Abb. 3.38 enthält den Chordpunkt C einer Ellipse k_1 und Hyperbel k_2 , die keine gemeinsame Tangente haben. Daher hat der Hauptkreis h_1 der Ellipse mit dem Hauptkreis h_2 der Hyperbel keinen gemeinsamen Punkt, und es gibt auf der Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte genau zwei zu h_1 und h_2 konjugierte Punkte K und K' . Ihre Konstruktion gelingt gemäß Abbildung 3.35 und ist in Abb. 3.38 der Übersichtlichkeit halber verborgen. Es sind dann die Geraden $a = SK'$ und $b = SK$ die beiden sowohl in Bezug auf k_1

¹Dem Hauptkreis der Ellipse und Hyperbel entspricht bei der Parabel die Scheiteltangente.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

als auch in Bezug auf k_2 konjugierten Geraden. Die beiden Kegelschnitte gehören einem elliptischen Kegelschnittbüschel an.

Bemerkung 12. Nach dem Satz im Abschnitt 3.6 ist die Polare eines Punktes S der Leitlinie eines Kegelschnitts orthogonal zum Nahstrahl von S (Abb. 3.30 auf Seite 40). Daher ist in den Abbildungen 3.37 und 3.38 die durch den Nahpunkt N gehende Polare des Schnittpunktes S der beiden Leitlinien in Bezug auf den Kegelschnitt k_1 identisch mit der Polaren s von S in Bezug auf den Kegelschnitt k_2 .

Die Bildkurven eines Kreisbüschels hängen natürlich wesentlich von der Lage des Nahpunktes ab. Wir legen den Nahpunkt in den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und wählen den Kreis k_e mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ als Polarisator. Dann wird das Kreisbüschel mit der gemeinsamen Chordale AB in ein Ellipsenbüschel abgebildet.

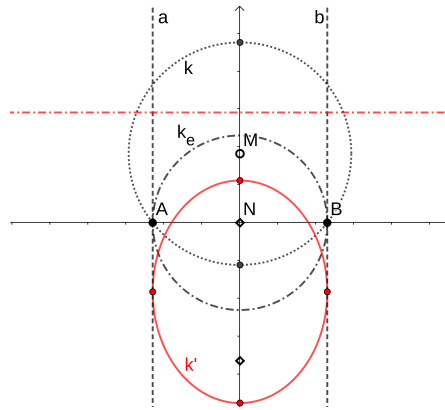


Abbildung 3.39: Ellipsenbüschel

In Abb. 3.39 ist ein Kreis k und sein Bild k' dargestellt. Alle Ellipsen haben die beiden Polaren a und b der Punkte A und B als gemeinsame Tangenten, und den Nahpunkt N als Brennpunkt. Der gemeinsame Chordpunkt aller Ellipsen ist der Fernpunkt der Geraden a und b . Er ist orthogonal zum gemeinsamen Fernpunkt aller Leitlinien.

In Abb. 3.40 ist ein Kreis k des orthogonalen elliptischen Kreisbüschels mit dem Polarisator k_e dargestellt. Der Nahpunkt N ist ein äußerer Punkt von k , daher ist die Bildkurve k' von k eine Hyperbel. Die Schnittpunkte von k mit der Zentralen MN seien S_1 und S_2 . Da die Polare von S_1 in Bezug auf k_e durch S_2 geht (siehe Abb. 3.36 auf Seite 43), sind S_1 und S_2 die Scheitelpunkte der Hyperbel. Die Polaren der beiden Schnittpunkte C und D von k mit k_e sind einerseits die Tangenten c und d von k_e und andererseits Tangenten von der Hyperbel k' . Da die Tangenten in C und D an k Nahstrahlen sind, sind ihre Pole Fernpunkte der Hyperbel. Daher sind c und d die Asymptoten der Hyperbel.

Die Polare b von B trifft k in den Punkten E und F . Die Polare von E ist eine Tangente von k' mit dem Berührungspunkt E' und geht durch B , weil E in b liegt. Ebenso geht die Polare von F durch B und ist eine Hyperbeltangente mit dem Berührungspunkt F' . Somit sind die Geraden a und b konjugiert in Bezug auf die Hyperbel k' . Der Punkt $S = ab$ ist

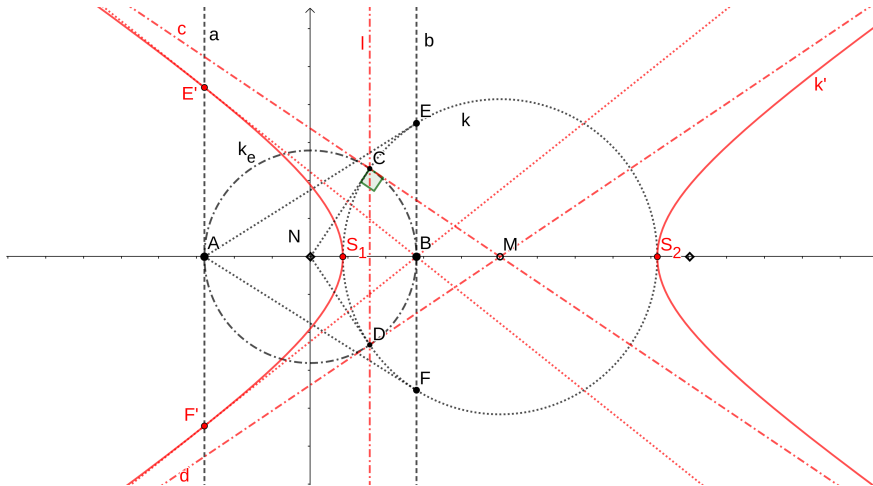


Abbildung 3.40: Hyperbelbüschel

ein Fernpunkt und der Mittelstrahl von (ab) die Ferngerade. Auf ihr liegt der zu S orthogonale Chordpunkt. Dieser ist somit der Fernpunkt der Hyperbelachse. Das orthogonale Kreisbüschel wird also in eine Hyperbelschar mit gemeinsamer Achse abgebildet, deren Fernpunkt der gemeinsame Chordpunkt ist.

Ohne Beweis notieren wir:

Satz. Sind k_1 und k_2 zwei Kreise mit ihrer Chordale c und $k'_1 = \pi(k_1)$ und $k'_2 = \pi(k_2)$ ihre Bilder mit dem Chordpunkt C in Bezug auf eine Polarität π , so ist $C = \pi(c)$ der Pol von c und $c = \pi(C)$ die Polare von C .

Satz. Es sei (k) ein hyperbolisches Kreisbüschel mit den Fixpunkten N und N' . Die Mittelsenkrechte von NN' ist dann die gemeinsame Chordale c des Kreisbüschels. Die Polarität in Bezug auf einen festen Kreis (Polarisator) mit dem Mittelpunkt N bildet dann die Kreise des Büschels in eine Schar von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln ab . Die gemeinsamen Brennpunkte sind der Nahpunkt N und der Chordpunkt C als Pol der Chordalen c .

Satz von Bodenmiller-Steiner

Die drei rechten Winkel in der Abb. 3.17 auf Seite 31 gehören zu rechtwinkligen Dreiecken mit N als gemeinsamer Ecke und führen zu drei Thaleskreisen, deren Mittelpunkte nach dem Satz von Gauß auf einer gemeinsamen Zentrale liegen (Abb. 3.41). Die Thaleskreise gehören daher zu einem hyperbolischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordalen. Dies hängt mit dem folgenden Satz von Bodenmiller-Steiner zusammen:

Satz von Bodenmiller (Beweis im Anhang)	Dualer Satz von Bodenmiller
Es sei $abcd$ ein Vierseit in allgemeiner Lage	Es sei $ABCD$ ein Viereck in allgemeiner Lage

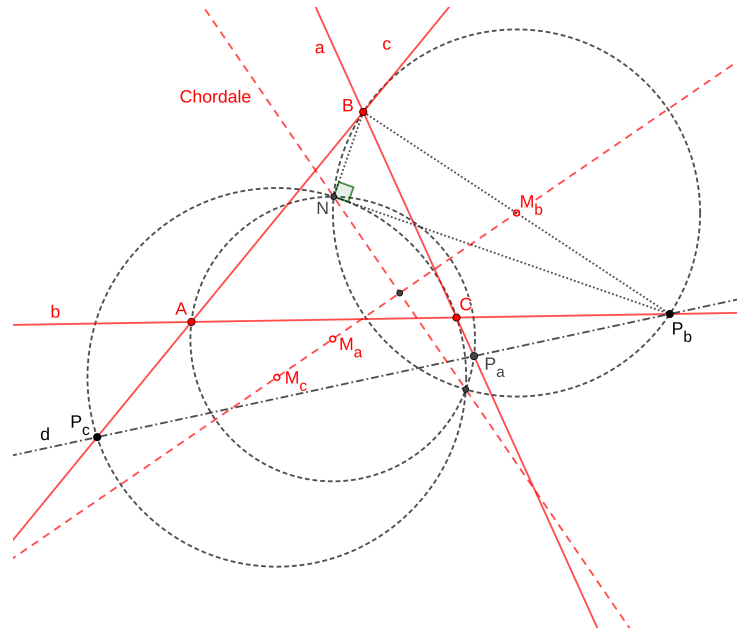


Abbildung 3.41: Satz von Bodenmiller-Steiner

ge. Wir fassen die Seite d als Transversale des Dreiseits abc mit den Ecken A, B, C auf.

Die Schnittpunkte von d mit dem Dreieck seien $P_a = ad$, $P_b = bd$ und $P_c = cd$.

Dann gehören die drei Kreise k_A , k_B , k_C mit den Durchmessern AP_a , BP_b , CP_c und den zugehörigen Mittelpunkten M_A , M_B , M_C einem hyperbolischen oder elliptischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordale an.

Lage. Wir fassen die Ecke D als Zentrum des Dreiecks ABC mit den Seiten a, b, c auf.

Die Verbindungsgeraden von D mit dem Dreieck seien $p_A = AD$, $p_B = BD$ und $p_C = CD$.

Dann gehören die drei Kegelschnitte k_a , k_b , k_c mit den Leitlinienpunkten ap_A , bp_B , cp_C und den zugehörigen Mittelstrahlen m_a , m_b , m_c als Leitlinien einem hyperbolischen oder elliptischen Kegelschnittbüschel mit einem gemeinsamen Chordpunkt an.

Die drei Kreismittelpunkte liegen in einer zur Chordalen orthogonalen Geraden. Dies ist der

Satz von Gauß (Beweis im Anhang)

Gegeben sei ein Dreieck abc mit den Ecken A, B, C und einer Geraden d, die durch keine Ecke geht.

Die Schnittpunkte von d mit den Seiten seien $P_a = ad$, $P_b = bd$, $P_c = cd$.

Dann liegen die drei Mittelpunkte P, Q, R auf einer Geraden (Abb. 3.42).

Dualer Satz von Gauß (Abb. 3.43)

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und ein Punkt D, der auf keiner Seite liegt.

Die Verbindungsgeraden von D mit den Ecken seien $t_A = DA$, $t_B = DB$, $t_C = DC$. Dann gehen die drei Mittelstrahlen p, q, r durch einen Punkt .

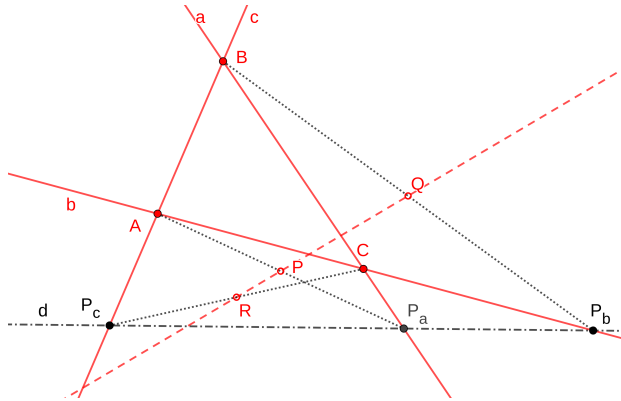


Abbildung 3.42: Satz von Gauß

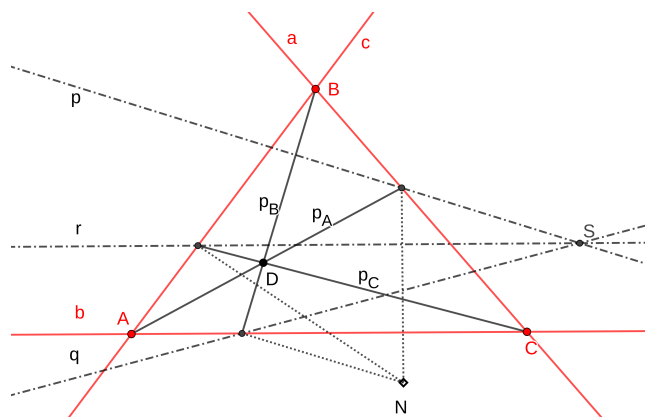


Abbildung 3.43: Dualer Satz von Gauß

3.6.5 Ähnlichkeitszentren und Ähnlichkeitslinien

Gegeben sind drei Kreise k_1 , k_2 , k_3 (mit der Ferngeraden als gemeinsamer Leitlinie) und den Mittelpunkten M_1 , M_2 , M_3 . Sie liegen so, dass je zwei von ihnen keine gemeinsamen Punkte, aber vier gemeinsame Tangenten haben.

Von den sechs Schnittpunkten der Kreistangenten von k_1 und k_2 liegen zwei auf der Verbindungsgeraden $s_{12} = M_1M_2$, wir nennen sie I_{12} und A_{12} .

Ebenso gibt es die Schnittpunkte I_{23} und A_{23} sowie I_{31} und A_{31} .

Gegeben sind drei Kegelschnitte k_1 , k_2 , k_3 mit dem Nahpunkt als gemeinsamem Brennpunkt und den Leitlinien m_1 , m_2 , m_3 . Sie liegen so, dass je zwei von ihnen keine gemeinsamen Tangenten, aber vier gemeinsame Punkte haben.

Von den sechs Verbindungsgeraden der Kreispunkte von k_1 und k_2 gehen zwei durch den Schnittpunkt $S_{12} = m_1m_2$, wir nennen sie i_{12} und a_{12} .

Ebenso gibt es die Geraden i_{23} und a_{23} sowie die Geraden i_{31} und a_{31} .

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

Dann liegen je drei dieser sechs Ähnlichkeitszentren auf vier Geraden: $A_{12}A_{23}A_{31} = g_A$, $A_{12}I_{23}I_{31} = g_3$, $A_{23}I_{31}I_{12} = g_1$, $A_{31}I_{12}I_{23} = g_2$.	Dann gehen je drei dieser sechs Ähnlichkeitsgeraden durch vier Punkte: $a_{12}a_{23}a_{31} = G_a$, $a_{12}i_{23}i_{31} = G_3$, $a_{23}i_{31}i_{12} = G_1$, $a_{31}i_{12}i_{23} = G_2$.
---	---

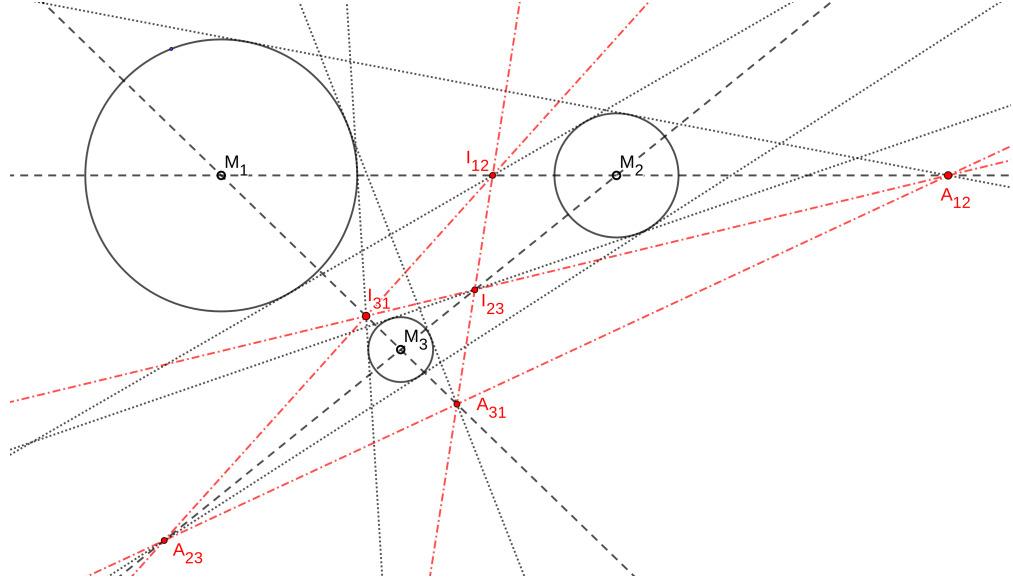


Abbildung 3.44: Sechs Ähnlichkeitszentren

In Abb. 3.44 ist von den beiden durch ein Ähnlichkeitszentrum gehenden Tangenten der Übersichtlichkeit wegen jeweils nur eine dargestellt. Die äußeren Ähnlichkeitspunkte A_{ik} liegen jeweils auf demjenigen Segment der Geraden s_{ik} , in dem auch der Fernpunkt liegt. Entsprechend liegen in Abb. 3.45 die äußeren Ähnlichkeitsgeraden jeweils in demjenigen Segment des Geradenbüschels (S_{ik}), in dem auch der Nahstrahl liegt.

Bemerkung 13. Sind in Abb. 3.44 r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreise k_1 und k_2 , so ist

$$\frac{\overline{M_1 I_{12}}}{\overline{I_{12} M_2}} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{M_1 A_{12}}}{\overline{A_{12} M_2}} = -\frac{r_1}{r_2}$$

d.h. es ist

$$DV(M_1 M_2 I_{12} A_{12}) = -1 \quad DV(M_2 M_3 I_{23} A_{23}) = -1 \quad DV(M_3 M_1 I_{31} A_{31}) = -1$$

und die jeweiligen vier Punkte haben harmonische Lage.

Entsprechend ist in Abb. 3.45

$$DV(m_1 m_2 i_{12} a_{12}) = -1 \quad DV(m_2 m_3 i_{23} a_{23}) = -1 \quad DV(m_3 m_1 i_{31} a_{31}) = -1$$

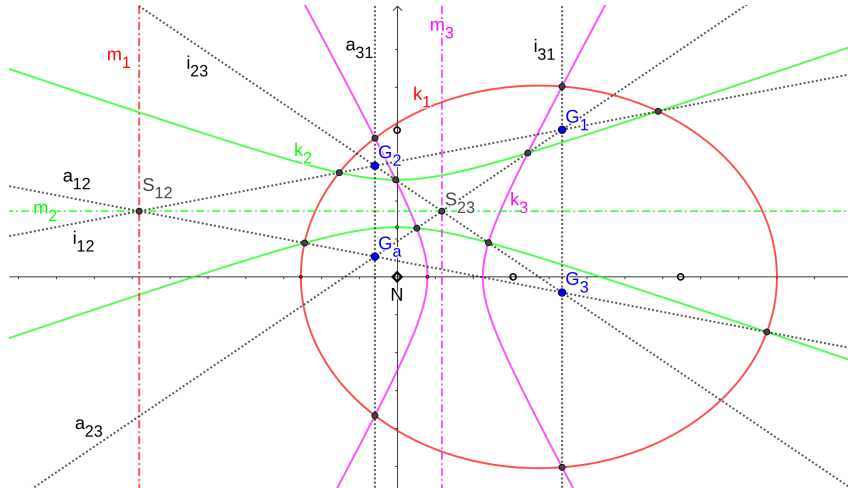


Abbildung 3.45: Sechs Ähnlichkeitslinien

3.7 Die Bildkurven von Kegelschnitten

Bekanntlich sind die Bildkurven von Kegelschnitten in Bezug auf projektive Abbildungen, insbesondere auf Polaritäten, wieder Kegelschnitte. Dabei ist zu beachten, dass bei einer Polarität das Bild eines Kurvenpunktes eine Tangente der Bildkurve und das Bild einer Kurventangente ein Punkt der Bildkurve ist. Ein Kurvenelement, bestehend aus einem Kurvenpunkt mit seiner Tangente, wird in ein Kurvenelement der Bildkurve abgebildet. Ob es sich bei der Bildkurve um eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel handelt, hängt von der Lage des Nahpunktes in Bezug auf den Kegelschnitt ab:

- Ist der Nahpunkt ein innerer Punkt, so ist kein Nahstrahl eine Tangente. Die Pole der Tangenten sind also keine Fernpunkte und das Bild des Kegelschnitts ist eine Ellipse oder ein Kreis.
- Ist der Nahpunkt ein Punkt des Kegelschnitts, so ist seine Tangente ein Nahstrahl und deren Pol ein Fernpunkt. Das Bild des Kegelschnitts ist also eine Parabel.
- Ist der Nahpunkt ein äußerer Punkt des Kegelschnitts, so gehen durch ihn zwei Tangenten als Nahstrahlen, deren Pole sind also Fernpunkte und das Bild ist eine Hyperbel.

3.7.1 Brennpunkt und Leitlinie

Bekanntlich hat eine Ellipse und eine Hyperbel zwei Brennpunkte. Die Polaren der Brennpunkte in Bezug auf den jeweiligen Kegelschnitt sind die Leitlinien. Diese haben folgende Eigenschaft: Ist F ein Brennpunkt und l_F seine Leitlinie und P ein beliebiger Kurvenpunkt mit dem Brennstrahl $\overline{PF} = r$ und dem Abstand $\overline{Pl_F} = d$ zur Leitlinie, so ist das

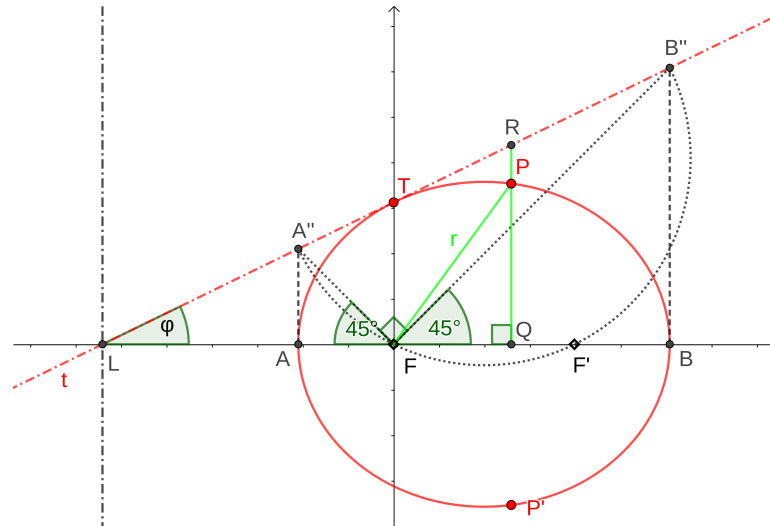


Abbildung 3.46: Konstruktion Ellipse

Verhältnis

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

eine Konstante, die *numerische Exzentrizität*. Für eine Hyperbel ist $\varepsilon > 1$, für eine Ellipse ist $\varepsilon < 1$ und für eine Parabel ist $\varepsilon = 1$. Bei einer Parabel ist der zweite Brennpunkt der Fernpunkt der Parabelachse. Bei einem Kreis fallen beide Brennpunkte in dem Mittelpunkt zusammen, die Leitlinie, seine Polare, ist die Ferngerade und es ist $\varepsilon = 0$.

Aus dieser Eigenschaft ergibt sich folgende einheitliche Konstruktion für alle vier Kegelschnitte:²

In Abb. 3.46 sei t eine Gerade, welche die y -Achse in T und die x -Achse in L unter dem Steigungswinkel φ schneidet. Die durch L gehende Parallele zur y -Achse sei die Leitlinie. Eine beliebige Parallele zur y -Achse schneidet die x -Achse im Punkt Q und die Gerade t im Punkt R . Der Kreis um den Ursprung F mit dem Radius $r = \overline{QR}$ trifft die Gerade QR in den Kurvenpunkten P und P' .

Offenbar ist im rechtwinkligen Dreieck LQR

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QL}} = \tan \varphi$$

und mit $\overline{QL} = d$ und $\overline{QR} = r$ und $\tan \varphi = \varepsilon$ folgt

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

²P. Baum: Eine einfache Konstruktion der Kegelschnitte. Mathematisch-Physikalische Korrespondenz Nr. 131, Weihnachten 1983

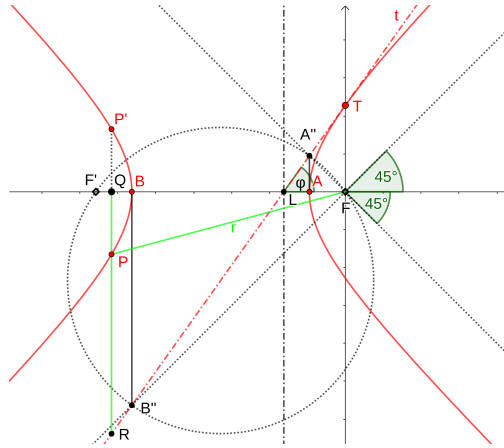


Abbildung 3.47: Konstruktion Hyperbel

wobei d auch den Abstand der Punkte P und P' von der Leitlinie darstellt.

Die Konstruktion liefert offenbar nur dann reelle Schnittpunkte P und P' , wenn $r \geq \overline{FQ}$ ist. Man sieht:

- Für $\varphi < 45^\circ$ und folglich $\varepsilon < 1$ treffen die beiden durch F gehenden Geraden, die mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschließen, die Gerade t in den beiden Punkten A'' und B''. Für $R = A''$ ist $Q = A$ und $r = \overline{AA''}$, die beiden Kurvenpunkte P und P' fallen in dem Punkt A auf der x-Achse zusammen. Ebenso fallen P und P' in B zusammen, wenn $R = B''$ und $Q = B$ ist. A und B sind die Hauptscheitel der Ellipse.
- Für $\varphi > 45^\circ$ und folglich $\varepsilon > 1$ erhält man auf diese Weise ebenfalls zwei Kurvenpunkte A und B auf der x-Achse, nämlich die Scheitelpunkte einer Hyperbel (Abb. 3.47).
- Für $\varphi = 45^\circ$ und folglich $\varepsilon = 1$ erhält man nur einen Kurvenpunkt auf der x-Achse, nämlich den Scheitelpunkt A einer Parabel.
- Für $\varphi = 0^\circ$ und $\varepsilon = 0$ ist die Gerade t eine Parallele zur x-Achse und $r = \overline{QR} = \overline{FT}$ eine Konstante, somit ergibt sich ein Kreis mit dem Mittelpunkt F und der Ferngeraden als Leitlinie.

Da man offenbar genau einen Kurvenpunkt P erhält, der auf der Geraden t liegt, nämlich $P = T$ für $Q = F$ und $R = T$, ist t die Tangente des Kegelschnitts mit dem Berührungspunkt T .

Offenbar ist $\sphericalangle A''FB'' = 90^\circ$ und der Thaleskreis mit dem Durchmesser $\overline{A''B''}$ trifft die große Achse der Ellipse oder Hyperbel stets in den beiden Brennpunkten F und F'.

Aus dieser Eigenschaft folgt nun der

Satz. Ist k' die Bildkurve eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M bezüglich einer Polarität am Einheitskreis k_e mit dem Nahpunkt $N \neq M$ als Mittelpunkt, so ist der Nahpunkt stets ein Brennpunkt von k' , also der Brennpunkt einer Parabel oder Ellipse oder Hyperbel, und

die Polare m von M ist eine Leitlinie der Bildkurve. Ist $M = N$, so ist auch die Bildkurve k' ein zu k konzentrischer Kreis.

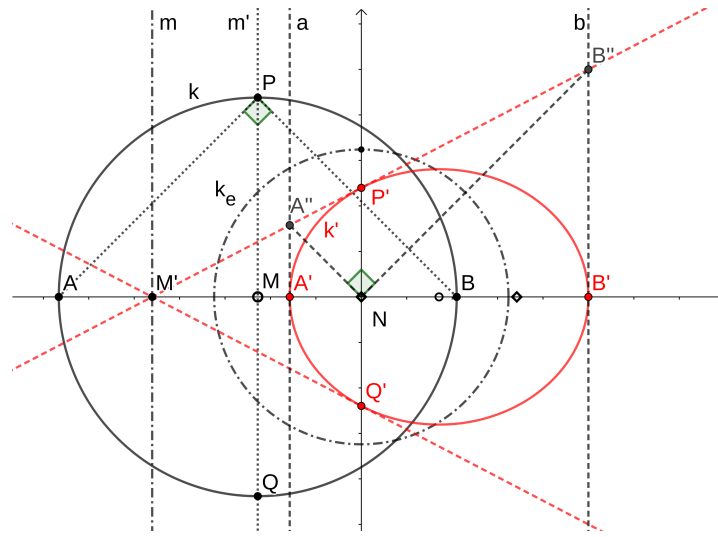


Abbildung 3.48: Brennpunkt und Leitlinie

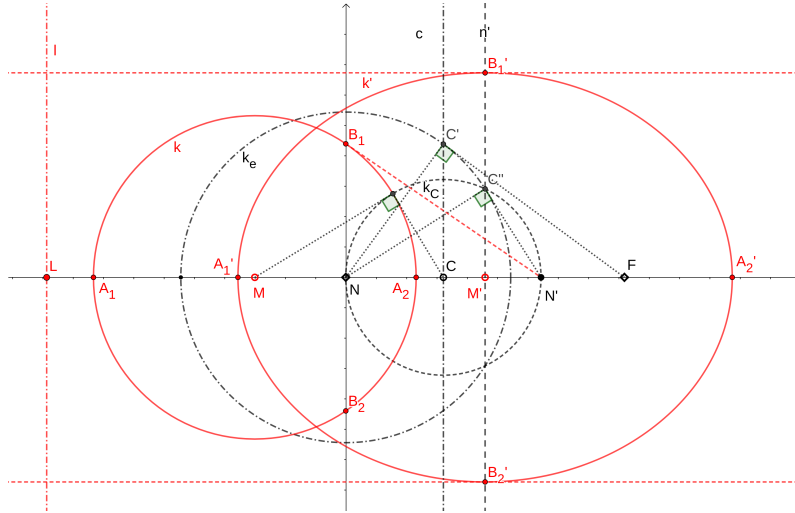
Beweis. In der Abb. 3.48 ist der Einheitskreis k_e mit dem Nahpunkt N als Mittelpunkt gezeichnet, und ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und den beiden Diametralpunkten A und B auf der Geraden MN. Die Polarität von k_e bildet den Kreis k in eine Ellipse ab, da der Nahpunkt N im Inneren von k liegt. Die Polaren a und b von A und B treffen die Gerade MN orthogonal in den Scheitelpunkten A' und B' der Ellipse.

Die durch M gehende Orthogonale zur Geraden MN trifft den Kreis k in zwei Diametralpunkten P und Q. Da die Geraden AP und BP orthogonal sind, sind auch ihre Pole A'' und B'' orthogonal. Somit sind die Nahstrahlen NA'' und NB'' orthogonal und N ist ein Brennpunkt der Ellipse.

Es sei m die Polare von M und M' der auf m liegende Pol von PQ . Dann treffen sich die Polaren von P und Q als Ellipsentangenten mit den Berührungspunkten P' und Q' in M' . Das bedeutet aber, dass m die Polare des Brennpunktes N in Bezug auf die Ellipse ist, also in der Tat eine Leitlinie der Ellipse. $\square$

3.7.2 Weitere Eigenschaften der Konstruktion

In der Abb. 3.49 wird durch die Polarität π am Einheitskreis k_e der Kreis k in eine Ellipse k' mit der Hauptachse MN abgebildet, weil der Nahpunkt N im Inneren des Kreises liegt. Die Scheitelpunkte A_1 und A_2 des Kreises werden in die Tangenten der Hauptscheitel A'_1 und A'_2 der Ellipse abgebildet. Die Schnittpunkte B_1 und B_2 des Kreises mit der y -Achse werden in die horizontalen Tangenten der Nebenscheitel B'_1 und B'_2 abgebildet.


 Abbildung 3.49: Kreis $\longleftrightarrow$ Ellipse

Es sei nun c die Chordale³ von N und dem Kreis k und C ihr Schnittpunkt mit der Geraden MN . Dann ist der Kreis k_c um C mit dem Radius $\overline{NC}$ ein Orthogonalkreis von k , er schneidet die Gerade MN in einem zweiten Punkt N' . Die Punkte N und N' sind konjugiert in Bezug auf k , daher liegt N' auf der Tangente von k mit dem Berührungspunkt B_1 . Diese ist aber die Polare $\pi(B_1)$ von B_1' , und daher geht die Polare $\pi(N')$ nach dem Hauptsatz der Polarentheorie auch durch B_1' und liefert neben den Schnittpunkten B_1' und B_2' mit den Tangenten auch den Mittelpunkt M' der Ellipse.

Wir zeigen nun noch, dass der Pol der Chordale der zweite Brennpunkt F der Ellipse ist. Dies ist dann der Fall, wenn $|NM'| = |N'M'|$ oder $|NF| = 2|NM'|$ ist.

Es sei r_e der Radius von k_e und r_c der Radius von k_c . Dann folgt aus dem Kathetensatz in den beiden rechtwinkligen Dreiecken NFC' und $NN'C''$

$$\begin{aligned} r_e^2 &= |NC'| \cdot |NF| & r_e^2 &= |NM'| \cdot |NN'| \\ r_e^2 &= r_c \cdot |NF| & r_e^2 &= |NM'| \cdot 2r_c \end{aligned}$$

also

$$|NF| = 2|NM'|$$

In Abb. 3.50 ist die Situation für den Fall dargestellt, dass der Nahpunkt N außerhalb des Kreises liegt.

³siehe Abschnitt 3.6.3 und Bemerkung 10 auf Seite 43

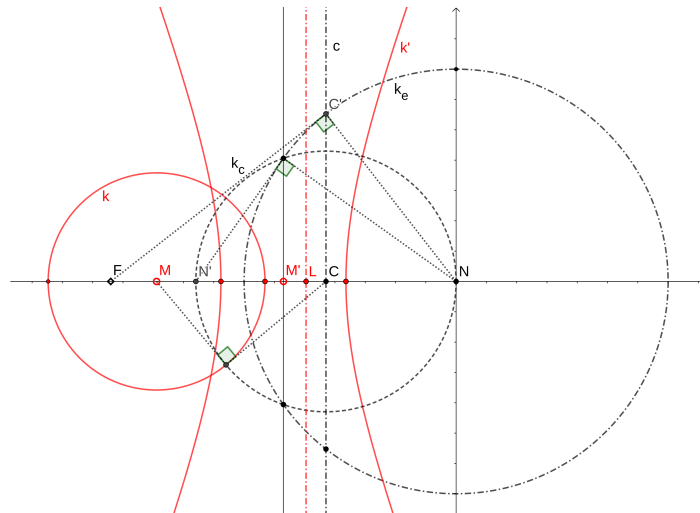


Abbildung 3.50: Hyperbel als Bild eines Kreises

3.7.3 Das Bild eines Kegelschnitts

Die besonderen Elemente eines Kegelschnitts sind die Achsen mit dem Mittelpunkt, die beiden Brennpunkte, die beiden Leitlinien und die Scheitelpunkte. Alle Geraden, die durch den Mittelpunkt gehen, heißen Durchmesser. Jeder Durchmesser inzidiert mit zwei Kurvenpunkten. Deren Tangenten sind parallel zu dem konjugierten Durchmesser.

Im Fall der Hyperbel gibt es noch die beiden Fernpunkte mit den Asymptoten als deren Tangenten.

Im Fall der Parabel ist die Ferngerade Tangente und der Berührungspunkt als Fernpunkt identisch mit dem Mittelpunkt und einem Brennpunkt.

Einem Vorschlag von IMMO DIENER teilweise folgend nennen wir in Bezug auf die Polarität am Einheitskreis

- die Pole der Achsen *Hauptachspunkt und Nebenachspunkt*,
- die Polare des Mittelpunktes *Achspunktgerade*,
- den Pol eines Durchmessers *Ummesser*,
- die Polaren der Brennpunkte *Sammelstrahlen*,
- die Pole der Leitlinien *Leitpunkte*,
- die Polaren der Haupt- und Nebenscheitel *Haupttangenten und Nebentangenten*,
- die Pole der Scheiteltangenten *Hauptpunkt- und Nebenpunkt*,
- die Pole der Asymptoten *Nahberührer*,
- die Polaren der beiden Fernpunkte *Nahtangenten*.

Um die Eigenschaften dieser Pole und Polaren in Bezug auf die Bildkurve zu erkennen, dualisieren wir die Eigenschaften der Achsen, Durchmesser, Brennpunkte und Leitlinien des Kegelschnitts:

3.7 Die Bildkurven von Kegelschnitten

Gegeben sind zwei parallele Sehnen mit ihren Kurvenpunkten. Dann ist die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte ein Durchmesser	Gegeben sind zwei zentrierte Punkte mit ihren Kurventangenten. Dann ist der Schnittpunkt ihrer Mittelstrahlen ein Ummesser.
Zu einem Durchmesser mit dem Fernpunkt D gibt es genau einen zu ihm konjugierten Durchmesser als Polare von D .	Zu einem Ummesser mit dem Nahstrahl d' gibt es genau einen zu ihm konjugierten Ummesser als Pol von d' .
Es gibt genau zwei orthogonale konjugierte Durchmesser, nämlich die Haupt- und Nebenachse.	Es gibt genau zwei orthogonale konjugierte Ummesser, nämlich die Hauptachs- und Nebenachspunkte.
Alle Durchmesser gehen durch den Mittelpunkt.	Alle Ummesser liegen auf der Achspunktgerade.
Der Mittelpunkt ist der Pol der Ferngerade in Bezug auf den Kegelschnitt.	Die Achspunktgerade ist die Polare des Nahpunktes in Bezug auf die Bildkurve.
Ist F ein Brennpunkt, l seine Leitlinie, P ein mit l inzidierender Punkt und p seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt, so ist die Gerade PF orthogonal zu p .	Ist f eine Sammelgerade, L ihr Leitpunkt, p eine mit L inzidierende Gerade und P ihr Pol in Bezug auf die Bildkurve, so ist der Schnittpunkt pf orthogonal zu P .
Die Hauptscheitel A_1 und A_2 , die Brennpunkte F_1 und F_2 und der Mittelpunkt M der Hauptscheitel inzidieren mit der Hauptachse a .	Die Haupttangenten a'_1 und a'_2 , die Sammelstrahlen f'_1 und f'_2 und der Mittelstrahl m' der Haupttangenten inzidieren mit dem Hauptachspunkt A' .
Der Mittelpunkt M , ein Brennpunkt und ein Hauptscheitel einer Parabel ist mit dem Fernpunkt der Hauptachse identisch.	Der Mittelstrahl, ein Sammelstrahl und eine Haupttangente der Bildkurve ist mit dem Nahstrahl des Hauptachspunktes identisch.
Ist F der Brennpunkt und S ein Punkt auf der Scheiteltangente s einer Parabel, so ist die durch S gehende Tangente t orthogonal zu $p = SF$.	Ist f' der Sammelstrahl und s' eine durch den Hauptpunkt S' gehende Gerade der Bildkurve, so ist der auf s' liegende Punkt T' orthogonal zu $P' = s'f'$.

Aus dieser Dualisierung folgt, dass es zu einem gegebenen Kegelschnitt als Bildkurve und einem Nahpunkt eine eindeutig bestimmte Achspunktgerade mit den zwei Achspunkten und zwei Sammelstrahlen gibt. Ihre Lage hängt nur von dem Nahpunkt ab und nicht mehr vom Einheitskreis. Die Achspunktgerade lässt sich als die Polare vom Nahpunkt in Bezug auf die Bildkurve konstruieren.

Ist der Nahpunkt kein Kurvenpunkt, so kann man die Achspunkte mit der dualen Rytz-Konstruktion konstruieren. Für die Sammelstrahlen ist mir keine Konstruktion bekannt – es sei denn, man konstruiert mit dem Einheitskreis die Urbildkurve. Es gibt aber sehr gute Näherungskonstruktionen mit Geogebra, auch für die Achspunkte.

3.7.4 Konstruktion der Achspunkte nach Rytz

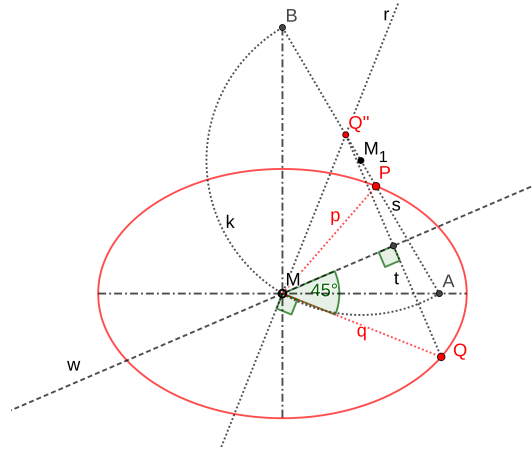


Abbildung 3.51: Achsenkonstruktion nach Rytz

Gegeben sind eine Ellipse mit Mittelpunkt M , und zwei konjugierte Durchmesser p und q mit den benachbarten Punkten P und Q auf der Ellipse.

Es sei r der zu q orthogonale Durchmesser und w die Winkelhalbierende von r und q . Es sei t die durch Q gehende Orthogonale zu w und $Q'' = tr$ der Schnittpunkt von r und t .

Es sei $s = PQ''$ die Verbindungsgerade von P und Q'' und M_1 der Mittelpunkt von $\overline{PQ''}$.

Es sei k der Kreis um M_1 , der durch M geht. Es seien A und B die Schnittpunkte von k mit der Geraden s . Die Geraden $a = MA$ und $b = MB$ sind die Achsen.

Gegeben sind die Bildkurve mit der Achspunktgeraden m' , und zwei konjugierte Ummesser P' und Q' mit den benachbarten Tangenten p' und q' der Bildkurve.

Es sei R' der zu Q' orthogonale Ummesser und W' der Winkelhalbierer von R' und Q' . Es sei T' der auf q' liegende orthogonale Punkt zu W' und $q'' = TR'$ die Verbindungsgerade von T und R' .

Es sei $S' = p'q''$ der Schnittpunkt von p' und q'' und m'_1 die Mittelgerade von p' und q'' .

Es sei k' die Bildkurve des Kreises k , die die Achspunktgerade m' tangiert. Es seien a' und b' die durch S' gehenden Tangenten von k' . Die Schnittpunkte $A' = a'm'$ und $B' = b'm'$ sind die Achspunkte.

Bemerkung 14. Die Konstruktion der Bildkurve k' des Kreises k aus Abb. 3.51 (in Abb. 3.52 ist sie eine Ellipse, bei anderer Wahl der Tangenten von P' und Q' könnte sie auch eine Hyperbel sein) gelingt folgendermaßen:

Die Polare des Mittelpunktes eines Kreises k in Bezug auf die Polarität am Einheitskreis ist eine Leitlinie der Bildkurve k' und der Nahpunkt N ist ein Brennpunkt von k' . Somit ist in Abb. 3.52 die Gerade m_1' eine Leitlinie von k' und die durch N gehende Orthogonale zu m_1' die Hauptachse von k' . Es sei $L = m'm_1'$ der Schnittpunkt der Tangente m' mit

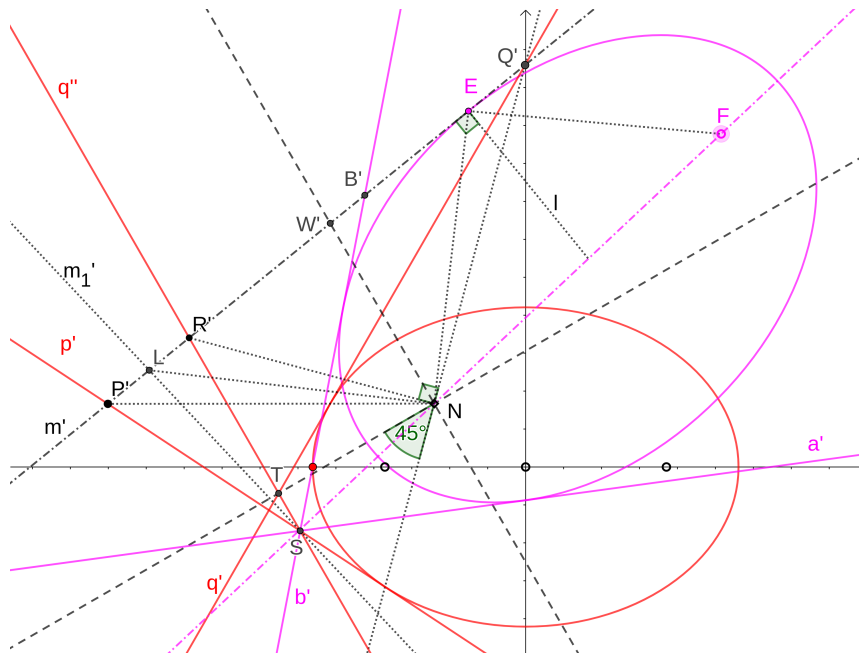


Abbildung 3.52: Duale Konstruktion nach Rytz

der Leitlinie. Dann trifft die durch den Brennpunkt N gehende Orthogonale zur Geraden LN die Tangente m' im Berührpunkt E, und die Spiegelung des Brennstrahls NE an der durch E gehenden Orthogonale zur Tangente m' trifft die Hauptachse im zweiten Brennpunkt F, und k' ist durch die beiden Brennpunkte N und F und den Kurvenpunkt E eindeutig bestimmt.

3.7.5 Konstruktion der Achspunkte im Fall einer Parabel

Liegt der Nahpunkt N auf der Bildkurve, so ist das Urbild eine Parabel. Bekanntlich ist der Mittelpunkt M der Parabel ihr Fernpunkt und die durch ihn gehende Orthogonale zur Parabelachse die Ferngerade. Deren Pol als Nebenachspunkt ist dann identisch mit N, und die Achspunktgerade ist auch einer der beiden Sammelstrahlen. Der Hauptachspunkt als Pol der Parabelachse lässt sich nun folgendermaßen konstruieren:⁴

Die Normale von N trifft die Bildkurve in einem Punkt S', dem Bild der Scheiteltangente der Parabel, also dem Hauptpunkt. Die Tangente von S' trifft die Achspunktgerade im Hauptachspunkt, dem Pol der Normale in Bezug auf die Bildkurve. Ist T' ein beliebiger Kurvenpunkt, so trifft die Gerade T'S' die durch N gehende Orthogonale zu T'N in einem Punkt P'. Die Verbindungsgerade von P' mit dem Hauptachspunkt ist der zweite Sammelstrahl f' (Abb. 3.53).

⁴Diese Konstruktion stammt von IMMO DIENER.

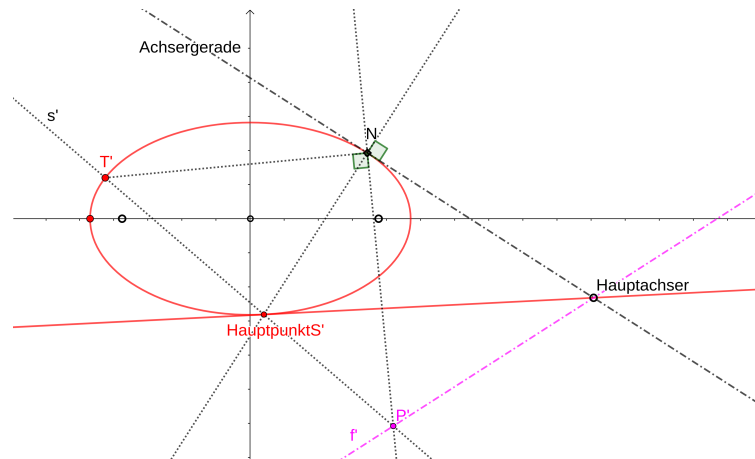


Abbildung 3.53: Ellipse als Bildkurve einer Parabel

3.7.6 Näherungskonstruktionen

Die Näherungskonstruktion der Achspunkte und der Sammelstrahlen in Abb. 3.54 für eine Ellipse als Bildkurve entstand mit Geogebra folgendermaßen:

1. Die Polare vom Nahpunkt N in Bezug auf die Bildkurve ist die Achspunktgerade.
2. Zu einem Punkt A auf der Achspunktgerade wird die durch N gehende Orthogonale zu AN und ihr Schnittpunkt S mit der Achspunktgerade gezeichnet. Dann gibt es genau eine Position von A, so dass die Polare von A in Bezug auf die Bildkurve orthogonal zu AN ist. In dieser ist A=Hauptachspunkt und S=Nebenzentrum.
3. Zu einem beliebigen Punkt P wird die Polare gezeichnet. Sie trifft die durch N gehende Orthogonale zu PN in einem Punkt P'. Dann wird P so verschoben, dass die Gerade PP' durch den Hauptachspunkt geht. Hierfür gibt es zwei Lagen: die Sammelstrahlen $P_1P'_1$ und $P_2P'_2$.
4. Die Pole dieser Sammelstrahlen in Bezug auf die Bildkurve sind die Sammelpunkte.

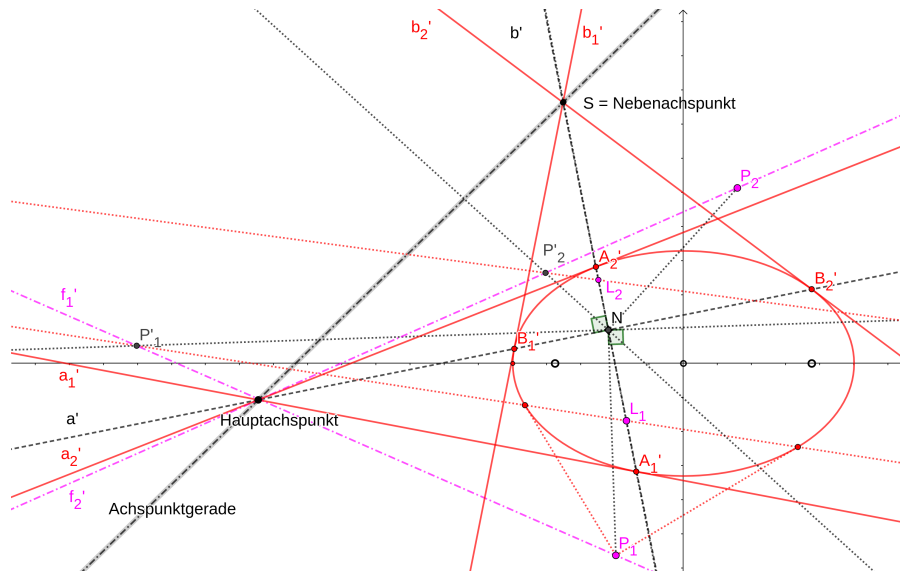


Abbildung 3.54: Achspunkte und Sammelstrahlen (Urbild Ellipse)

Entsprechend konstruiert man die Bilder der charakteristischen Elemente einer Hyperbel mit Geogebra (Abb. 3.55).

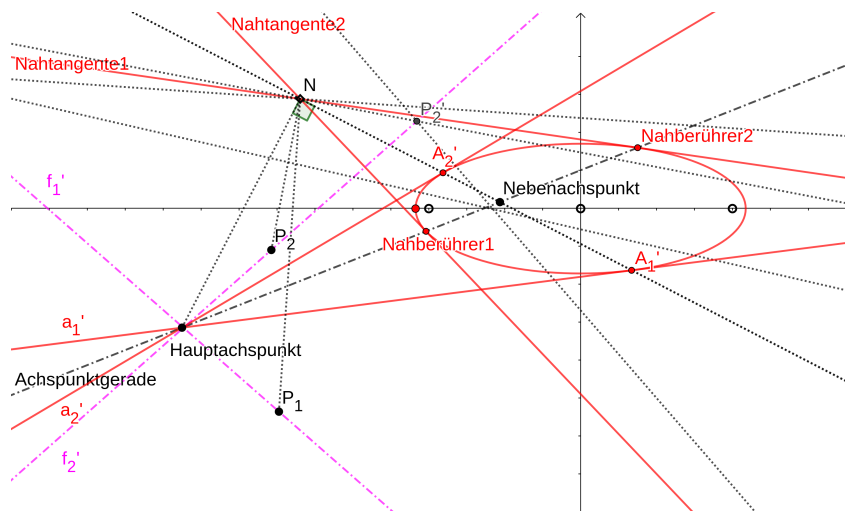


Abbildung 3.55: Bildkurve einer Hyperbel

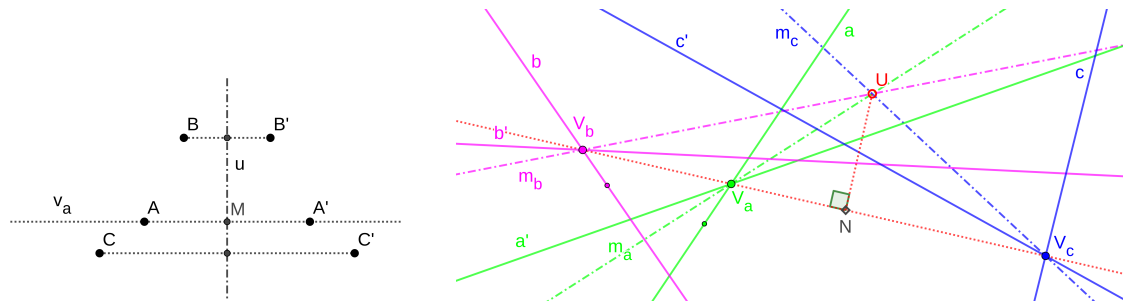


Abbildung 3.56: Achsenspiegelung und Zentralspiegelung

3.8 Abbildungen

3.8.1 Spiegelung

Achsenspiegelung

Gegeben ist eine Gerade u als Achse und ein Punkt A .

Dann gibt es genau einen Punkt A' mit der Eigenschaft: Die Geraden u und $v_A = AA'$ sind orthogonal und inzidieren im Mittelpunkt von A und A' . Man nennt A' das Spiegelbild von A in Bezug auf u (Abb. 3.56 links).

Zentralspiegelung

Gegeben ist ein Punkt U als Zentrum und eine Gerade a .

Dann gibt es genau eine Gerade a' mit der Eigenschaft: Die Punkte U und $V_a = aa'$ sind orthogonal und inzidieren im Mittelstrahl von a und a' . Man nennt a' das Spiegelbild von a in Bezug auf U (Abb. 3.56 rechts).

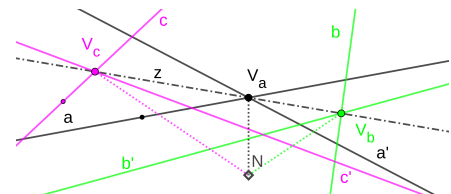
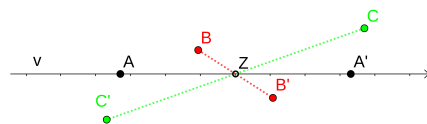


Abbildung 3.57: Punkt- und Geradenspiegelung

Punktspiegelung

Gegeben ist ein Punkt Z als Zentrum und ein Punkt A . Dann gibt es in der Geraden $v = AZ$ genau einen Punkt A' mit der Eigenschaft: Z ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA'}$. Man nennt A' das Spiegelbild von A in Bezug auf Z (Abb. 3.57 links).

Geradenspiegelung

Gegeben ist eine Gerade z als Achse und eine Gerade a . Dann gibt es in dem Schnittpunkt $V = az$ genau eine Gerade a' mit der Eigenschaft: z ist der Mittelstrahl des Fächers $\overline{aa'}$. Wir nennen a' das harmonische Spiegelbild von a in Bezug auf z (Abb. 3.57 rechts).

3.8.2 Drehung

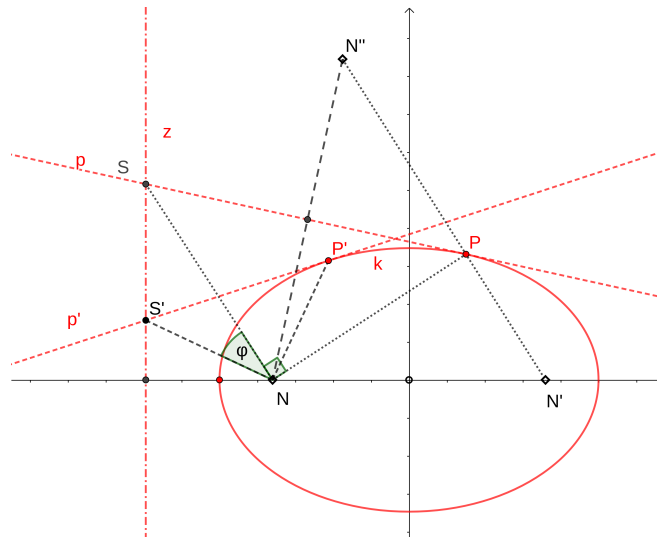


Abbildung 3.58: Schabung

Drehung

Bei einer Drehung wandert ein Punkt auf einem Kreis, und seine Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkt Z dreht sich um Z .

Es sei das Drehzentrum Z , der Drehwinkel φ mit Drehsinn und ein Punkt P gegeben. Dann gibt es einen durch P gehenden Kreis k mit dem Mittelpunkt Z (und der Ferngerade als Leitlinie) und genau einen Punkt P' auf k , so dass $\sphericalangle PZP' = \varphi$ ist.

Schabung (Abb. 3.58)

Bei einer Schabung gleitet eine Tangente auf einem Kegelschnitt und ihr Schnittpunkt mit der Leitgeraden z wandert auf z .

Es sei die Leitgerade z , der Drehwinkel φ mit Drehsinn und eine Gerade p gegeben. Dann gibt es einen die Gerade p berührenden Kegelschnitt k mit der Leitgeraden z (und dem Nahpunkt als Brennpunkt) und genau eine k berührende Gerade p' , so dass $\sphericalangle pzp' = \varphi$ ist.

Die Abb. 3.58 bedarf noch einer Erläuterung. Wie wird der Kegelschnitt k konstruiert?

Da die Geraden z und p und der Nahpunkt N als Brennpunkt gegeben sind, ist auch die Hauptachse als durch N gehende Orthogonale zur Leitlinie z bestimmt. Die Tangente p schneidet die Leitlinie z im Punkt S . Den Berührungspunkt P der Tangente p erhält man als Schnittpunkt von p mit der durch N gehenden Orthogonale zur Geraden NS . Die Verbindungsgerade des Spiegelpunktes von N in Bezug auf p mit P schneidet die Hauptachse im zweiten Brennpunkt N' . Damit hat man die konstante Summe $2a$ der Brennstrahlen. Durch den gegebenen Drehwinkel φ mit Drehsinn (hier gegen den Uhrzeigersinn) erhält man den Schnittpunkt S' der Tangente p' mit der Leitlinie z und damit auch den zu NS' orthogonalen Brennstrahl von P' , mit dem man P' konstruieren kann. Dann ist

schließlich $p' = P'S'$.

3.8.3 Translation

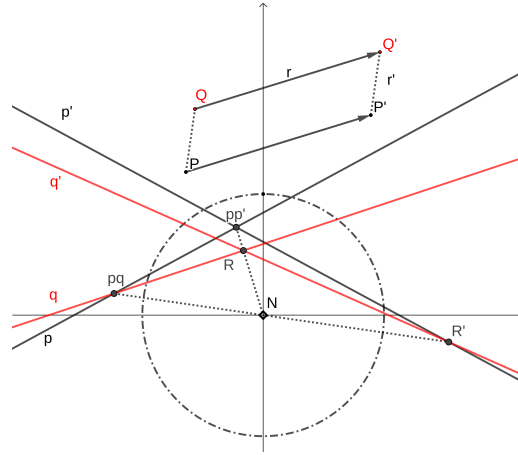


Abbildung 3.59: Translation

Eine Translation oder Verschiebung wird durch einen Punkt P und seinen Bildpunkt P' definiert. Der Bildpunkt Q' eines Punktes Q wird folgendermaßen konstruiert (Abb. 3.59): Es sei r die Verbindungsgerade des Fernpunktes der Geraden PP' mit Q und r' die Verbindungsgerade des Fernpunktes der Geraden PQ mit dem Punkt P' . Dann ist der Schnittpunkt $rr' = Q'$ der Bildpunkt von Q .

Eine duale Translation oder Verschiebung wird durch eine Gerade p und ihre Bildgerade p' definiert. Die Bildgerade q' einer Geraden q wird folgendermaßen konstruiert (Abb. 3.59): Es sei R der Schnittpunkt des Nahstrahls des Punktes pp' mit q und R' der Schnittpunkt des Nahstrahls des Punktes pq mit der Geraden p' . Dann ist die Verbindungsgerade $RR' = q'$ die Bildgerade von q .

Besonders einfach ist die Darstellung einer dualen Translation, wenn die Urbildgerade p die Ferngerade ist. Dann ist durch den Nahpunkt N und die Bildgerade p' die duale Translation eindeutig bestimmt. In Abb. 3.60 ist die Konstruktion der Bildelemente für den Fall dargestellt, dass p die Ferngerade und $P = N$ der Nahpunkt ist.

Es sei r die Verbindungsgerade des Fernpunktes der Geraden NP' mit Q und r' die Verbindungsgerade des Fernpunktes der Geraden NQ mit dem Punkt P' . Dann ist der Schnittpunkt $rr' = Q'$ der Bildpunkt von Q .

Es sei R der Schnittpunkt des zu p' parallelen Nahstrahls mit q und R' der Schnittpunkt des zu q parallelen Nahstrahls mit der Geraden p' . Dann ist die Verbindungsgerade $RR' = q'$ die Bildgerade von q .

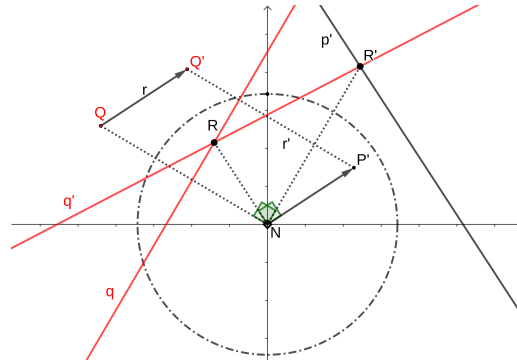


Abbildung 3.60: Translation der Ferngeraden

3.9 Ausblick

Bei der Dualisierung von Sätzen der PEG hängt die Visualisierung entscheidend davon ab, an welcher Stelle der Figur sich der Nahpunkt befindet. Möglicherweise ergeben sich für spezielle Lagen neue Erkenntnisse.

In der Ebene ist eine Polarität durch ein selbstpolares Dreieck mit einem zusätzlichen beliebigen Pol-Polarenpaar eindeutig bestimmt. Ist in einem Dreieck ABC die Polare einer Ecke jeweils die gegenüberliegende Seite, so nennt man das Dreieck selbstpolar, und mit einem vierten Pol-Polare-Paar (Pp) kann man zu einem beliebigen Punkt Q seine Polare q nach COXETER⁵ konstruieren (Abb. 3.61). Man bezeichnet eine solche Polarität mit $(ABC)(Pp)$.

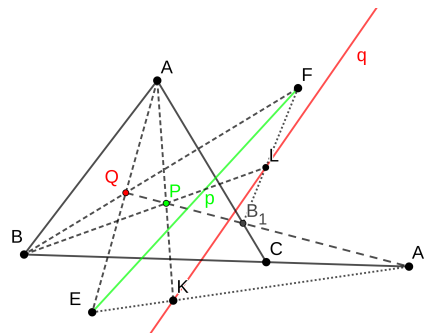


Abbildung 3.61: Konstruktion der Polaren

Gibt es einen Punkt, der mit seiner Polaren inzidiert, so gibt es unendlich viele solcher Elemente, die alle auf einem Kegelschnitt liegen, und die Polarität heißt hyperbolisch. Gibt es keinen solchen Punkt, heißt die Polarität elliptisch. Dies ist der Fall, wenn P in demjenigen Dreiecksgebiet liegt, das von der Polaren p nicht durchdrungen wird.

Wie man zu einer hyperbolischen Polarität $(ABC)(Pp)$ den zugehörigen Kegelschnitt konstruieren kann, hat STOLZENBURG in einem Artikel „Polaritäten und Kegelschnitte“ beschrieben.⁶

Jede Ellipse und jede Hyperbel mit dem Mittelpunkt als Nahpunkt kann Polarisator einer Polarität sein. Allerdings sind solche Polaritäten nicht winkeltreu und die Orthogonalität ist somit keine Invariante der Polarität. Dadurch gehen wesentliche Zusammenhänge, die

⁵H.S.M. Coxeter: Reelle projektive Geometrie der Ebene, München 1955, S. 67

⁶<https://www.forschung-waldorf.de/service/downloadbereich/detail/projektive-geometrie-9/>

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

bei der Polarität am Einheitskreis entstehen, verloren.

Die Parabel kommt als Polarisator nicht in Betracht, da der Pol der Ferngerade ein Fernpunkt ist, der Nahpunkt aber kein Fernpunkt sein darf.

In einer Desargues-Figur gehört zu jedem der 10 Punkte als Zentrum genau eine der 10 Geraden als Achse. Dadurch ist ebenfalls eine Polarität definiert.

Wenn man irgend vier Punkten eines Kegelschnitts k_1 irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts k_2 zuordnet, wird dadurch eine Polarität bestimmt, die jeden Kegelschnitt des durch die vier Punkte definierten Kegelschnittbüschels in genau einen Kegelschnitt des durch die vier Tangenten definierten Kegelschnittbüschels abbildet. Durch Verschiebung der Punkte oder Tangenten ergibt sich immer eine andere Polarität. Eine von ihnen wird dann vermutlich auch k_1 in k_2 abbilden.

Die harmonische Grundfigur enthält sowohl ein vollständiges Viereck als auch ein vollständiges Vierseit – und etliche Kegelschnitte. Durch die Zuordnung des Vierecks zum Vierseit wird ebenfalls eine Polarität bestimmt, die es vielleicht verdient, genauer untersucht zu werden.⁷

3.10 Anhang

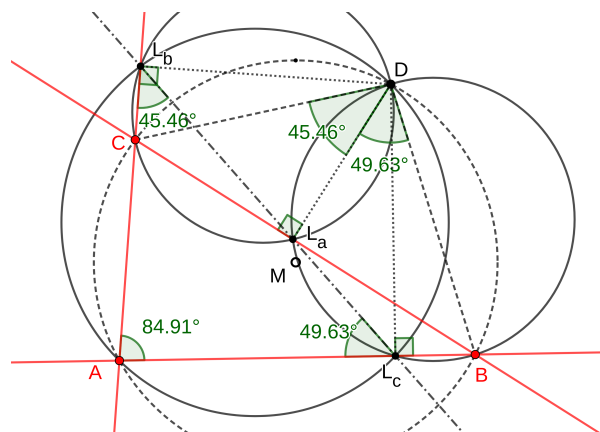


Abbildung 3.62: Wallace-Gerade

Satz von Wallace:

Satz. Ist D ein Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks ABC , dann liegen die Lotfußpunkte der Lote von D auf die Dreiecksseiten in einer Geraden.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass L_a auf der Geraden L_bL_c liegt, dass also $\sphericalangle CL_bL_a + \sphericalangle L_aL_cA + \sphericalangle BAC = 180^\circ$ ist (Abb. 3.62).

⁷Einige Arbeiten zu dem Thema wie auch den Artikel von Alexander Stolzenburg findet man unter <https://www.forschung-waldorf.de/service/downloadbereich/detail/projektive-geometrie-9/>

Im Kreisviereck CL_bDL_a folgt aus dem Satz vom Peripheriewinkel $\sphericalangle CL_bL_a = \sphericalangle CDL_a$, und im Kreisviereck DBL_cL_a ist $\sphericalangle L_aDB + \sphericalangle BL_cL_a = 180^\circ$, daher ist $\sphericalangle L_aL_cA = \sphericalangle L_aDB$ wegen $\sphericalangle L_aL_cA + \sphericalangle BL_cL_a = 180^\circ$. Somit ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle CL_bL_a + \sphericalangle L_aL_cA + \sphericalangle BAC &= \sphericalangle CDL_a + \sphericalangle L_aDB + \sphericalangle L_cAC \\ &= \sphericalangle CDB + \sphericalangle BAC \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

wegen des Kreisvierecks ACDB. □

Satz von Gauß:

Satz. Gegeben sei ein Dreieck abc mit den Ecken A, B, C und einer Geraden d , die durch keine Ecke geht. Die Schnittpunkte von d mit den Seiten seien $P_a = ad$, $P_b = bd$, $P_c = cd$. Es sei P der Mittelpunkt von AP_a , Q der Mittelpunkt von BP_b und R der Mittelpunkt von CP_c . Dann liegen die drei Mittelpunkte P, Q, R auf einer Geraden.

Beweis. In Abb. 3.63 sind M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der Dreieckseiten a, b und c . Dann liegen die Punkte

- M_a, M_b, R auf einer Parallelen zu $AB = c$
- M_b, M_c, P auf einer Parallelen zu $BC = a$
- M_c, M_a, Q auf einer Parallelen zu $CA = b$

Die Gerade PQ ist eine Transversale des Dreiecks $M_aM_bM_c$ und geht nach dem Satz des Menelaos genau dann durch R , wenn $\frac{M_aR}{RM_b} \cdot \frac{M_bP}{PM_c} \cdot \frac{M_cQ}{QM_a} = -1$ ist. Nun ist aber wegen der ähnlichen Dreiecke $\triangle M_aCR \sim \triangle BCP_c$ auch $\frac{M_aR}{RM_b} = \frac{BP_c}{P_cA}$. Mit der gleichen Argumentation folgt $\frac{M_bP}{PM_c} = \frac{CP_a}{P_aB}$ und $\frac{M_cQ}{QM_a} = \frac{AP_b}{P_bC}$ und es folgt aus dem Satz des Menelaos für das Dreieck ABC mit der Transversalen $P_aP_bP_c$

$$\frac{M_aR}{RM_b} \cdot \frac{M_bP}{PM_c} \cdot \frac{M_cQ}{QM_a} = \frac{BP_c}{P_cA} \cdot \frac{CP_a}{P_aB} \cdot \frac{AP_b}{P_bC} = -1$$

□

Satz von Bodenmiller im hyperbolischen Fall:

Satz. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c und N ein beliebiger Punkt. Es sei n_A die durch N gehende Orthogonale zur Geraden AN und n_B die durch N gehende Orthogonale zur Geraden BN und n_C die durch N gehende Orthogonale zur Geraden CN . Es seien $H_a = an_A$, $H_b = bn_B$ und $H_c = cn_C$ die Schnittpunkte der Orthogonalen mit den Dreieckseiten. Dann gehören die Umkreise der drei rechtwinkligen Dreiecke ANH_a , BNH_b und CNH_c einem hyperbolischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordale an .

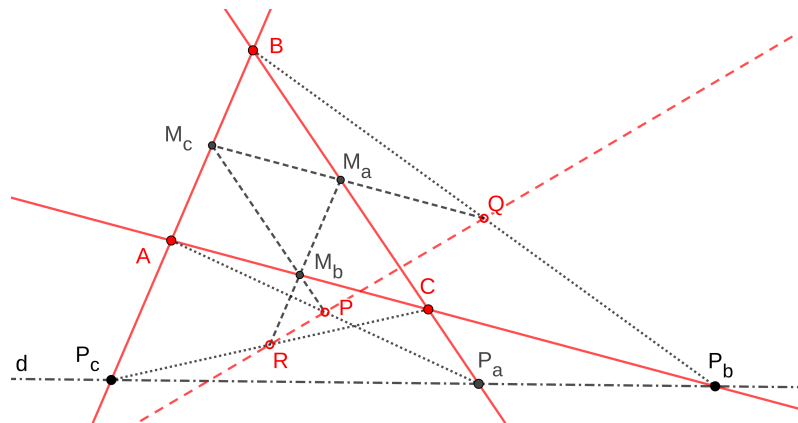


Abbildung 3.63: Gauß (Beweis)

Beweis. Nach dem dualen Höhensatz liegen die drei Punkte H_a , H_b und H_c auf einer Geraden h , daher liegen nach dem Satz von Gauß die drei Mittelpunkte der Hypotenusen AH_a , BH_b und CH_c auf einer Geraden. Somit haben die drei Umkreise außer N noch einen zweiten gemeinsamen Schnittpunkt N' und gehören einem hyperbolischen Kreisbüschel an mit der gemeinsamen Chordalen NN' . $\square$

Bemerkung 15. Liegt N auf der Seite a , dann sind die durch N gehenden Orthogonalen n_B und n_C identisch. Da auf ihnen auch die Punkte H_b und H_c liegen, ist auch die Transversale h mit n_B und n_C identisch und es ist $H_a = N$. Entsprechendes gilt, wenn N auf der Seite b oder c liegt.

Ist $N = A$, dann ist die Gerade AN unbestimmt und damit auch die Orthogonale n_A , der Punkt H_a und der Umkreis ANH_a . Es existieren jedoch die Orthogonalen n_B und n_C und es ist $H_B = H_C = A$ und somit haben die beiden anderen Umkreise die Durchmesser AB und AC . Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte ist parallel zur Seite a und die Chordale ist die Höhe h_a im Dreieck ABC .

Satz von Bodenmiller-Steiner:⁸

Satz. *Es sei $abcd$ ein Viereck in allgemeiner Lage. Wir fassen die Seite d als Transversale des Dreiecks abc mit den Ecken A, B, C auf. Die Schnittpunkte von d mit dem Dreieck seien $P_a = ad$, $P_b = bd$ und $P_c = cd$. Dann gehören die drei Kreise k_A, k_B, k_C mit den Durchmessern AP_a, BP_b, CP_c und den zugehörigen Mittelpunkten M_A, M_B, M_C einem hyperbolischen oder elliptischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordale an.*

⁸Rudolf Fritsch hat unter dem Titel „Gudermann, Bodenmiller und der Satz von Bodenmiller-Steiner“ in DdM 3, 1992 (165 - 187) eine umfassende Untersuchung mit historischen Aspekten vorgelegt. Er hat aber den Satz nur mit Hilfsmittel der Vektorrechnung bewiesen. Er zitiert dort einen Satz von Steiner: *Die Höhengschnittpunkte der vier durch ein vollständiges Vierseit bestimmten Dreiseite sind kollinear; sie liegen auf der Potenzgerade des Vierecks*. Angeblich steht er in *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*. Dort habe ich ihn aber nicht gefunden.

Die Idee zu dem hier vorgelegten Beweis findet man in Aumann: *Kreisgeometrie*, Springer Spectrum 2015.

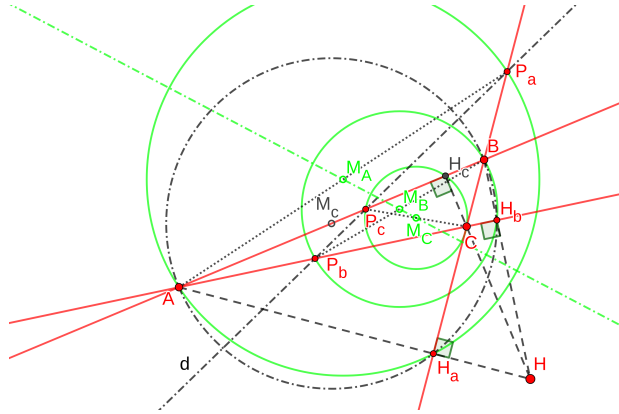


Abbildung 3.64: Höhenpunkt liegt auf Chordale

Beweis. Nach dem Satz von Gauß (Satz auf Seite 67) liegen die Mittelpunkte M_A , M_B , M_C der drei Kreise k_A , k_B , k_C auf einer Geraden m . Es ist noch zu zeigen, dass sie eine gemeinsame Chordale besitzen.

Dies ist aber der Fall, da der Höhenschnittpunkt H in Bezug auf alle drei Kreise dieselbe Potenz p besitzt (Abb. 3.64). Denn wegen der rechten Winkel bei H_a und H_b ist ABH_aH_b ein Kreisviereck, und somit ist nach dem Sekantensatz in seinem Umkreis $p = |HA| \cdot |HH_a| = |HB| \cdot |HH_b|$. Da die Punkte A und H_a auch auf k_A und die Punkte B und H_b auch auf k_B liegen, ist p auch die Potenz von H in Bezug auf k_A und k_B . Ebenso folgt mit dem Umkreis des Kreisvierecks ACH_aH_c , dass $p = |HA| \cdot |HH_a| = |HC| \cdot |HH_c|$ ist. Somit liegt H auf der gemeinsamen Chordale der drei Kreise, und diese ist die durch H gehende Orthogonale zu m . $\square$

Bemerkung 16. Beim dualen Satz von Bodenmiller soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, wenn man einen Brennpunkt N und einen Punkt L auf der Leitlinie von N sowie die beiden durch L gehenden Tangenten a und b des Kegelschnitts kennt.

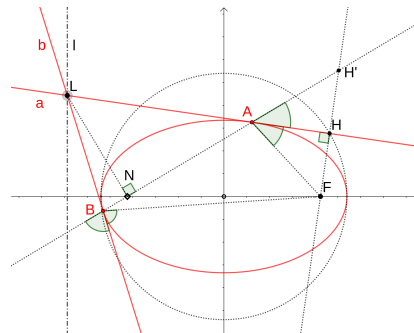


Abbildung 3.65: Konstruktion

Aus Abb. 3.65 ist ersichtlich, wie man vorgeht. Man zeichnet zunächst den Nahstrahl

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

NL und seine Orthogonale durch N, die die beiden Tangenten in deren Berührungspunkten A und B trifft. Die Orthogonale spiegelt man an beiden Tangenten und erhält so die Brennstrahlen von A und B und den zweiten Brennpunkt F als Schnittpunkt der Brennstrahlen. Somit kennt man die Hauptachse NF, und ihre Orthogonale durch L liefert die zu N gehörende Leitlinie l.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Pol-Polare	10
1.2	Involution	11
3.1	Parallelogramm und Zentrigramm	19
3.2	Rechteck und Rechtseit	20
3.3	Quadrat und Polarquadrat	20
3.4	Mittelpunkt und Mittelstrahl	21
3.5	Mittelstrahl zweier Geraden	21
3.6	S und C sind zentriert	22
3.7	Verhältnisskala	22
3.8	Doppelverhältnis	23
3.9	Projektive Skala	23
3.10	Doppelverhältnis von Geraden	24
3.11	Koordinaten	25
3.12	Abstand der Polaren	26
3.13	Abstand	28
3.14	Verwandte Dreiseite	29
3.15	Basiswinkel	30
3.16	Leichtgerade	30
3.17	Duale Höhen im Dreieck	31
3.18	Grenzlage orthogonal	32
3.19	Grenzlage Fernpunkt	32
3.20	<i>Winkelhalbierer</i>	32
3.21	Simsongerade	33
3.22	Simsonpunkt	34
3.23	Orthogonalpunktreihe	34
3.24	Satz des Ceva	35
3.25	Umkreis $\leftrightarrow$ Ankurve	36
3.26	Umkreis $\leftrightarrow$ Inkurve	37
3.27	Inkreis $\leftrightarrow$ Umkurve	38
3.28	Peripherie- und Zentriwinkel	39
3.29	Satz des Thales	39
3.30	Orthogonale Punkte	40
3.31	Winkelhalbierende in Kreis und Ellipse	40
3.32	Winkelhalbierer in Parabel und Hyperbel	41
3.33	Satz von Diener	41
3.34	Chordale	42

3.35 Konstruktion der Chordale	43
3.36 Pol und Polare im Kreisbüschel	43
3.37 Chordpunkt Ellipse und Parabel	45
3.38 Chordpunkt Ellipse und Hyperbel	45
3.39 Ellipsenbüschel	46
3.40 Hyperbelbüschel	47
3.41 Satz von Bodenmiller-Steiner	48
3.42 Satz von Gauß	49
3.43 Dualer Satz von Gauß	49
3.44 Sechs Ähnlichkeitszentren	50
3.45 Sechs Ähnlichkeitslinien	51
3.46 Konstruktion Ellipse	52
3.47 Konstruktion Hyperbel	53
3.48 Brennpunkt und Leitlinie	54
3.49 Kreis $\longleftrightarrow$ Ellipse	55
3.50 Hyperbel als Bild eines Kreises	56
3.51 Achsenkonstruktion nach Rytz	58
3.52 Duale Konstruktion nach Rytz	59
3.53 Ellipse als Bildkurve einer Parabel	60
3.54 Achspunkte und Sammelstrahlen (Urbild Ellipse)	61
3.55 Bildkurve einer Hyperpel	61
3.56 Achsenspiegelung und Zentralspiegelung	62
3.57 Punkt- und Geradenspiegelung	62
3.58 Schabung	63
3.59 Translation	64
3.60 Translation der Ferngeraden	65
3.61 Konstruktion der Polaren	65
3.62 Wallace-Gerade	66
3.63 Gauß (Beweis)	68
3.64 Höhenpunkt liegt auf Chordale	69
3.65 Konstruktion	69

Index

Achspunktgerade, 56

Ankurve, 36

Chordpunkt, 44, 46

elliptisch, 44

Fernebene, 7

Ferngeraden, 7

Fernpunkte, 7

Geradenbüschel, 7

Hauptachspunkt, 56

Hauptpunkt-, 56

Haupttangenten, 56

hyperbolisch, 44

Inkurve, 36

Leitpunkte, 56

Nahberührer, 56

Nahebenen, 5, 13

Nahpunkt, 5, 13

Nahstrahlen, 13

Nahtangenten, 56

Nebenachspunkt, 56

Nebenpunkt, 56

Nebentangenten, 56

Orthoebene, 16

Orthopunkt, 16

Potenz, 42

Potenzlinie, 42

Sammelstrahlen, 56

Ummesser, 56

Winkelhalbierer, 32, 40

winkeltreu, 17