

Über den Satz von Pappos

Peter Baum*

1 Einführung

Einer der schönsten Sätze der Geometrie ist der Satz des Pascal (1623 – 1662):

Sind sechs Punkte eines nicht entarteten Kegelschnitts die Ecken eines Sechsecks, die in irgendeiner Reihenfolge mit den Ziffern 1 bis 6 nummeriert werden, so liegen die drei Schnittpunkte $(12)(45)$, $(23)(56)$, $(34)(61)$ sich gegenüberliegender Seiten stets auf einer Geraden, der Pascalgeraden.

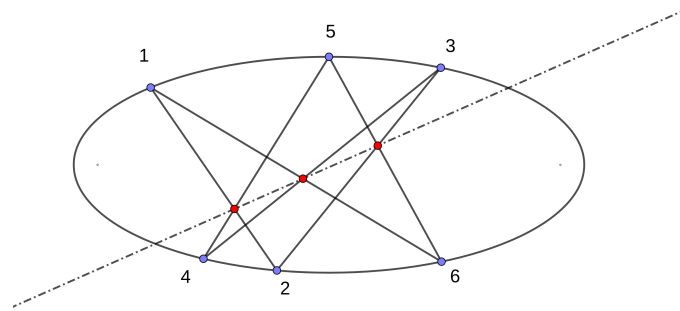


Abbildung 1: Pascalgerade

Die duale Version des Satzes von Pascal ist der Satz des Brianchon:

Sind sechs Tangenten eines nicht entarteten Kegelschnitts die Seiten eines Sechsecks, die in irgendeiner Reihenfolge mit den Ziffern 1 bis 6 nummeriert werden, so gehen die drei Verbindungsgeraden $(12)(45)$, $(23)(56)$, $(34)(61)$ sich gegenüberliegender Ecken stets durch einen Punkt, den Brianchonpunkt.

Charles Julien Brianchon (1783 – 1864) hat ihn entdeckt, angeblich ohne zu wissen, dass er durch Dualisierung des Satzes von Pascal entsteht.

Die Sätze behalten ihre Gültigkeit, auch wenn Punkte bzw. Tangenten zusammenfallen. Dadurch entsteht eine Fülle von geometrischen Beziehungen und Konstruktionen von Kegelschnitten.

*p.baum@posteo.de am 14.04.2022, in der Fassung vom 14.02.2023

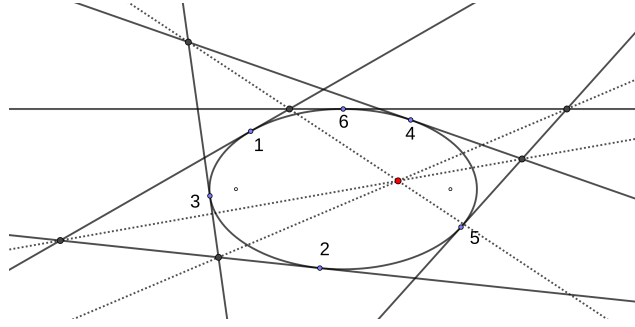


Abbildung 2: Brianchonpunkt

Eine Spezialisierung des Satzes von Pascal erhält man, wenn der Kegelschnitt zu zwei Geraden entartet, mit der Einschränkung, dass nun je drei Punkte auf einer Geraden liegen, die abwechselnd zu einem geschlossenen Sechseck miteinander verbunden werden. Dies ist der Satz von Pappos (4. Jahrhundert). Er lautet:

Satz 1. *Liegen die aufeinander folgenden Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die drei Schnittpunkte sich gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden, der Papposgeraden.*

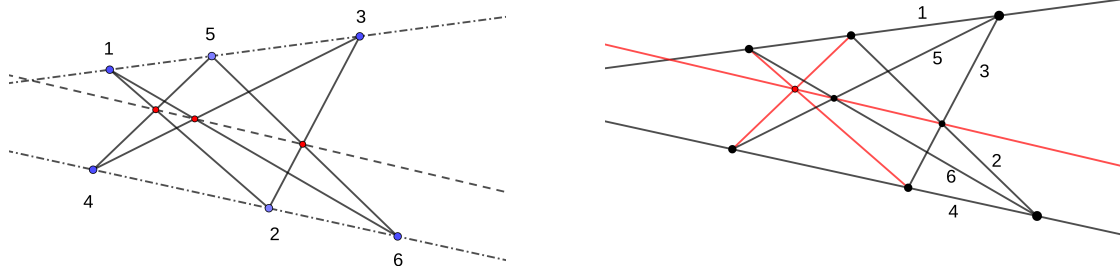


Abbildung 3: Satz des Pappos

In Abb. 3 enthält die linke Pappos-Figur $6 + 3 = 9$ Punkte und $2 + 6 + 1 = 9$ Geraden. Auf jeder Geraden liegen 3 Punkte und durch jeden Punkt gehen 3 Geraden. Die gleiche Anzahl bedeutet, dass die Pappos-Figur selbstdual ist.¹ Der duale Satz von Pappos lautet:

¹Figuren aus p Punkten und g Geraden, bei denen auf jeder Geraden die gleiche Anzahl π von Punkten und durch jeden Punkt die gleiche Anzahl γ von Geraden gehen, nennt man Konfigurationen und bezeichnet sie mit $p_\gamma g_\pi$. Die Anzahl der Inzidenzen ist dann $p \cdot \gamma = g \cdot \pi$. Aus $p = g$ folgt also $\gamma = \pi$ und umgekehrt.

Satz 2. *Gehen die aufeinander folgenden Seiten eines Sechsecks abwechselnd durch zwei Punkte, so gehen die Verbindungsgeraden sich gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt (Pappospunkt).*

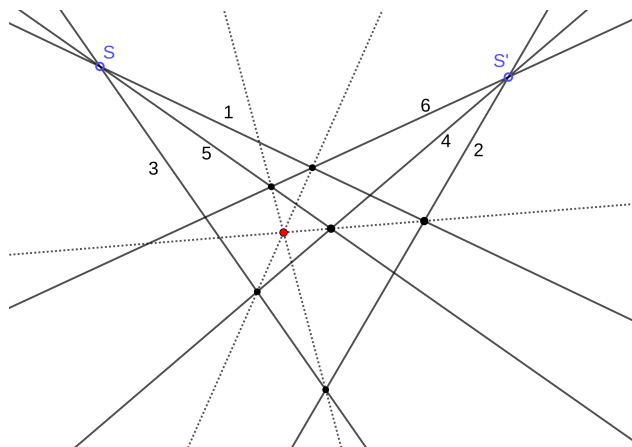


Abbildung 4: Duale Papposfigur

Die duale Papposfigur in Abb. 4 hat scheinbar eine völlig andere Gestalt als die linke Figur in Abb. 3. Die rechte Figur in Abb. 3 zeigt aber beispielhaft, dass man jede Papposkonfiguration durch geeignete Nummerierung auch dual interpretieren kann.

Die Sätze von Pappos und Pascal sind wohlbekannt.

2 Die vollständige Pappos-Figur

Eine weniger bekannte geometrische Tatsache ergibt sich beim Satz des Pappos, wenn man alle möglichen Papposgeraden einbezieht.

In Abb. 5 sind die Ecken auf der einen Geraden g mit P_1 , P_3 und P_5 und die Ecken auf der anderen Geraden g' mit P_2 , P_4 und P_6 bezeichnet. Die Verbindungsgeraden bezeichnen wir mit $P_iP_k = c_{ik}$, $i = 1, 3, 5$ und $k = 2, 4, 6$. Es gibt also 9 Verbindungsgeraden der Punkte P_1 , P_3 , P_5 mit den Punkten P_2 , P_4 , P_6 . Die Schnittpunkte der Gerade c_{12} mit den Geraden c_{32} und c_{52} sind identisch mit dem schon vorhandenen Punkt P_2 , und die Schnittpunkte von c_{12} mit den vier anderen Geraden c_{34} , c_{36} , c_{54} und c_{56} ergeben vier neue Punkte. Auf jeder der 9 Geraden liegen also vier neue Punkte, da sich aber in jedem neuen Punkt zwei der 9 Geraden treffen, enthält die erweiterte Pappos-Figur $\frac{9 \cdot 4}{2} = 18$ neue Schnittpunkte, welche die Papposgeraden liefern. Da aber, wie sich zeigen wird, durch jeden der 18 Punkte genau eine Papposgerade geht und auf jeder Papposgerade 3 der 18 Punkte liegen, gibt es maximal 6 Papposgeraden.

Ein mögliches Sechseck ist z.B. durch die Folge $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ gegeben mit den aufeinander folgenden Seiten c_{12} , c_{32} , c_{34} , c_{54} , c_{56} , c_{16} . Die drei Schnittpunkte der Gegenseiten sind dann $c_{12}c_{54} = S_{1254}$, $c_{32}c_{56} = S_{3256}$ und $c_{34}c_{16} = S_{3416}$.

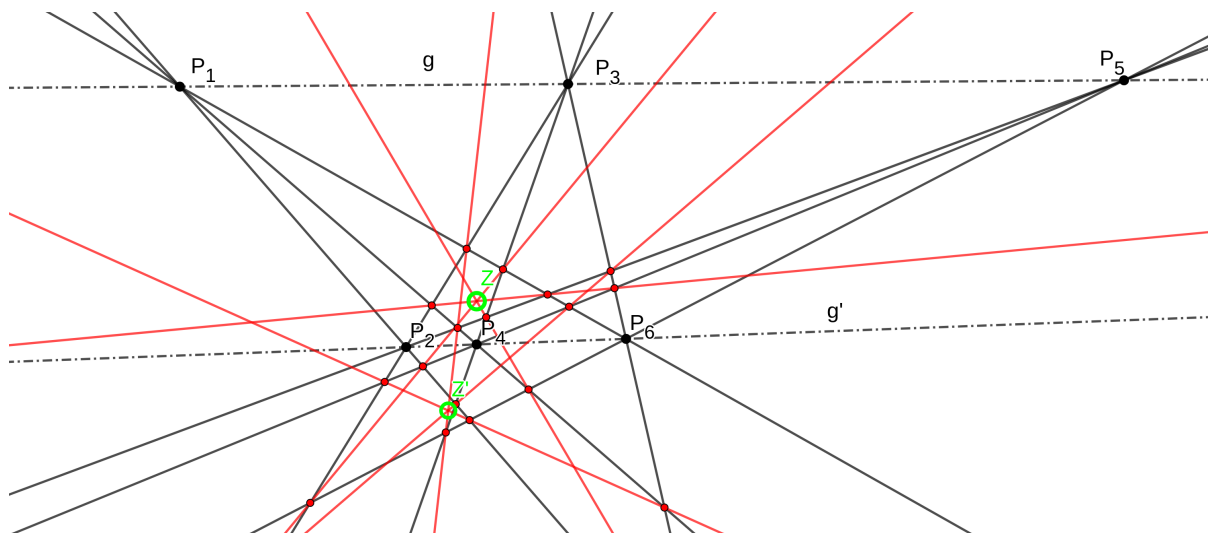


Abbildung 5: Papposgeraden

Es gibt insgesamt 6 Folgen, die Papposgeraden generieren:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Tripel 1:} & P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 & P_1 P_4 P_3 P_6 P_5 P_2 & P_1 P_6 P_3 P_2 P_5 P_4 \\
 & S_{1254}, S_{3256}, S_{1634} & S_{1456}, S_{3452}, S_{1236} & S_{1652}, S_{3654}, S_{1432} \\
 \text{Tripel 2:} & P_1 P_6 P_3 P_4 P_5 P_2 & P_1 P_4 P_3 P_2 P_5 P_6 & P_1 P_2 P_3 P_6 P_5 P_4 \\
 & S_{1654}, S_{3652}, S_{1234} & S_{1452}, S_{3456}, S_{1632} & S_{1256}, S_{3254}, S_{1436}
 \end{array} \tag{1}$$

Die erweiterte Pappos-Figur besteht also aus $3 + 3 + 18 = 24$ Punkten und $2 + 9 + 6 = 17$ Geraden.

Die in einer Zeile stehenden Sechsecke gehen jeweils durch zyklische Vertauschung der geraden Indizes auseinander hervor, sie bilden ein Tripel mit einer besonderen Eigenschaft. Es stellt sich nämlich heraus, dass diese 3 Papposgeraden sich in einem Punkt Z bzw. Z' treffen (Abb. 5).

Satz 3. Die sechs Papposgeraden einer Pappos-Figur bilden zwei Geradentripel, so dass sich die Geraden des einen Tripels in einem (grünen) Punkt Z und die Geraden des anderen Tripels in einem (grünen) Punkt Z' treffen.

Beweis. Der Beweis stützt sich auf den Satz des Desargues. Wir wählen aus den drei Geraden des Tripel 1, die sich im Zentrum Z treffen, je einen Punkt aus und zwar so, dass diese drei Punkte ein Dreieck bilden, dessen Seiten aus drei der 9 Geraden bestehen.

Dies gelingt auf folgende drei Arten:

Dreieck 1	Dreieck 2	Dreieck 3
S_{1254}	S_{3256}	S_{1634}
S_{1236}	S_{1456}	S_{3452}
S_{3654}	S_{1432}	S_{1652}
Seiten c_{12}, c_{36}, c_{54}	c_{14}, c_{32}, c_{56}	c_{16}, c_{34}, c_{52}

Je zwei dieser drei Dreiecke bilden eine Desargues-Figur. Denn

- entsprechende Seiten der Dreiecke 1 und 2 schneiden sich in den Punkten $c_{12}c_{56} = S_{1256}$, $c_{36}c_{14} = S_{1436}$, $c_{54}c_{32} = S_{3254}$, die auf der Pascalgeraden $S_{1256}, S_{3254}, S_{1436}$ des Tripel 2 liegen,
- entsprechende Seiten der Dreiecke 1 und 3 schneiden sich in den Punkten $c_{12}c_{34} = S_{1234}$, $c_{36}c_{52} = S_{3652}$, $c_{54}c_{16} = S_{1654}$, die auf der Pascalgeraden $S_{1654}, S_{3652}, S_{1234}$ des Tripel 2 liegen,
- entsprechende Seiten der Dreiecke 2 und 3 schneiden sich in den Punkten $c_{14}c_{52} = S_{1452}$, $c_{32}c_{16} = S_{1632}$, $c_{56}c_{34} = S_{3456}$, die auf der Pascalgeraden $S_{1452}, S_{3456}, S_{1632}$ des Tripel 2 liegen.

Folglich gehen die Verbindungsgeraden durch einen Punkt Z. Eine analoge Argumentation liefert drei Desargues-Figuren, die jeweils durch eine Gerade des Tripel 1 liniert werden und daher den zweiten Punkt Z' zum Zentrum haben, qed. $\square$

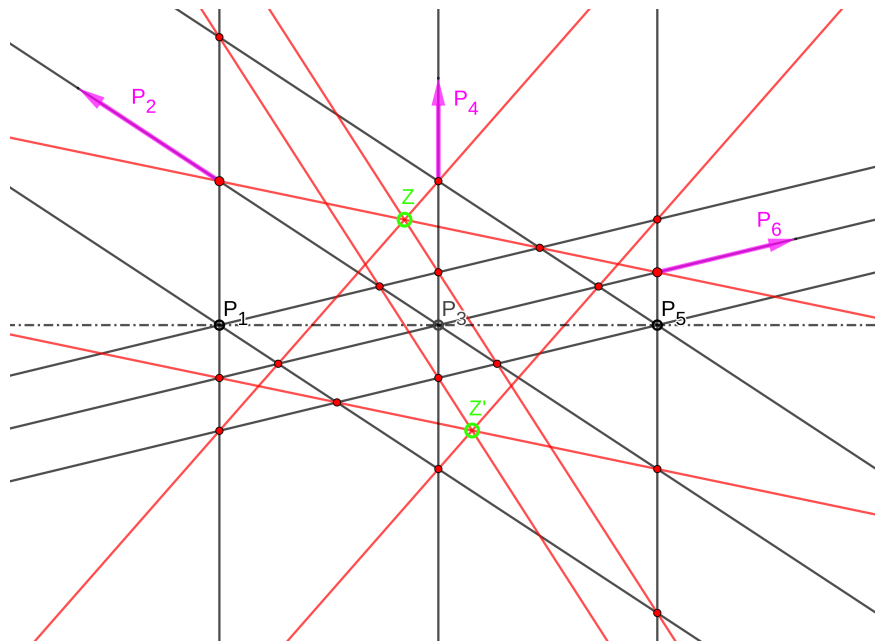


Abbildung 6: Papposgeraden mit Ferngerade

In Abb. 6 ist die Trägergerade mit den drei Punkten P_2 , P_4 und P_5 die Ferngerade. Ergänzt man die duale Pappos-Figur (Abb. 4) um alle Pappospunkte, so erhält man die erweiterte duale Pappos-Figur in Abb. 7.

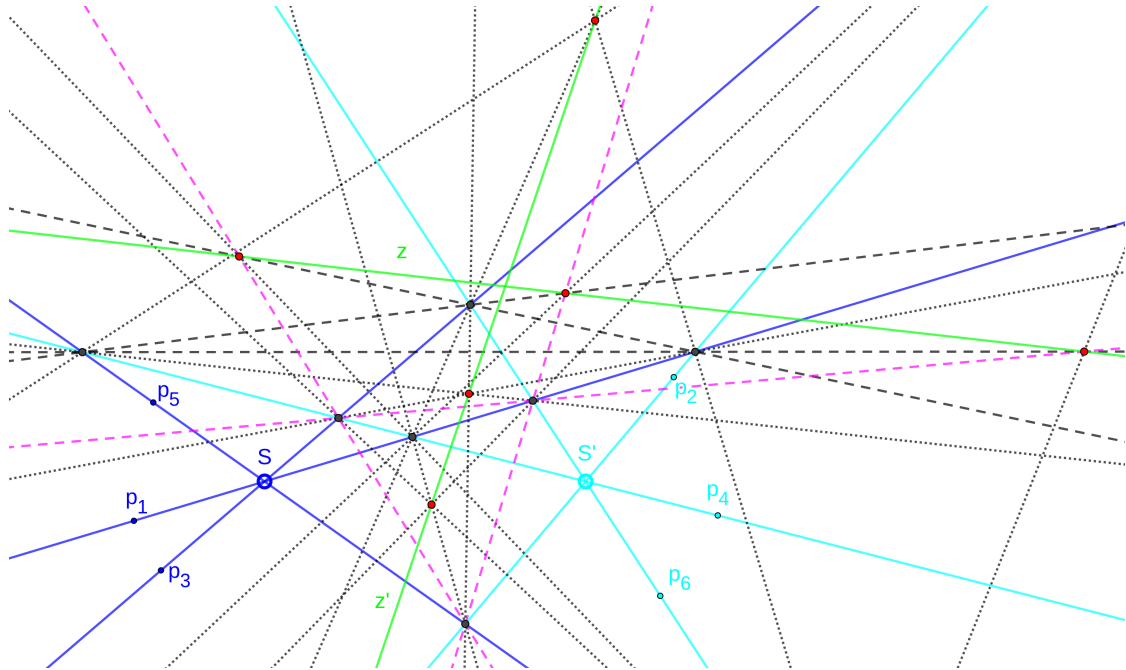


Abbildung 7: Pappospunkte

Durch Dualisierung von Satz 3 erhält man

Satz 4. *Die sechs Pappospunkte einer dualen Pappos-Figur bilden zwei Punktetripel, so dass die Punkte des einen Tripels auf einer (grünen) Geraden z und die drei Punkte des anderen Tripels auf einer (grünen) Geraden z' liegen.*

Der Beweis ergibt sich, indem man im Beweis von Satz 3 große Buchstaben in kleine und kleine Buchstaben in große vertauscht.

In Abb. 8 sind die Trägerpunkte S und S' der Geraden p_1 , p_3 , p_5 bzw. p_2 , p_4 und p_6 Fernpunkte.

Bemerkung 1. Die erweiterte Pappos-Figur in Abb. 5 ist nicht mehr selbstdual, weil sie unterschiedliche Anzahlen von Geraden und Punkten enthält. Es ist erstaunlich, dass sie dennoch, ausgehend von zwei besonderen Geraden, am Ende zwei besondere Punkte als Treffpunkte von je drei Geraden, also die duale Pappos-Figur liefert. Natürlich muss dann die dualisierte erweiterte Pappos-Figur ausgehend von zwei besonderen Punkten zwei Punktetripel erzeugen, die jeweils auf zwei besonderen Geraden liegen, also eine Pappos-Figur darstellen. Was sich ergibt, wenn man diese wiederum erweitert, wird in Abschnitt 5 untersucht.

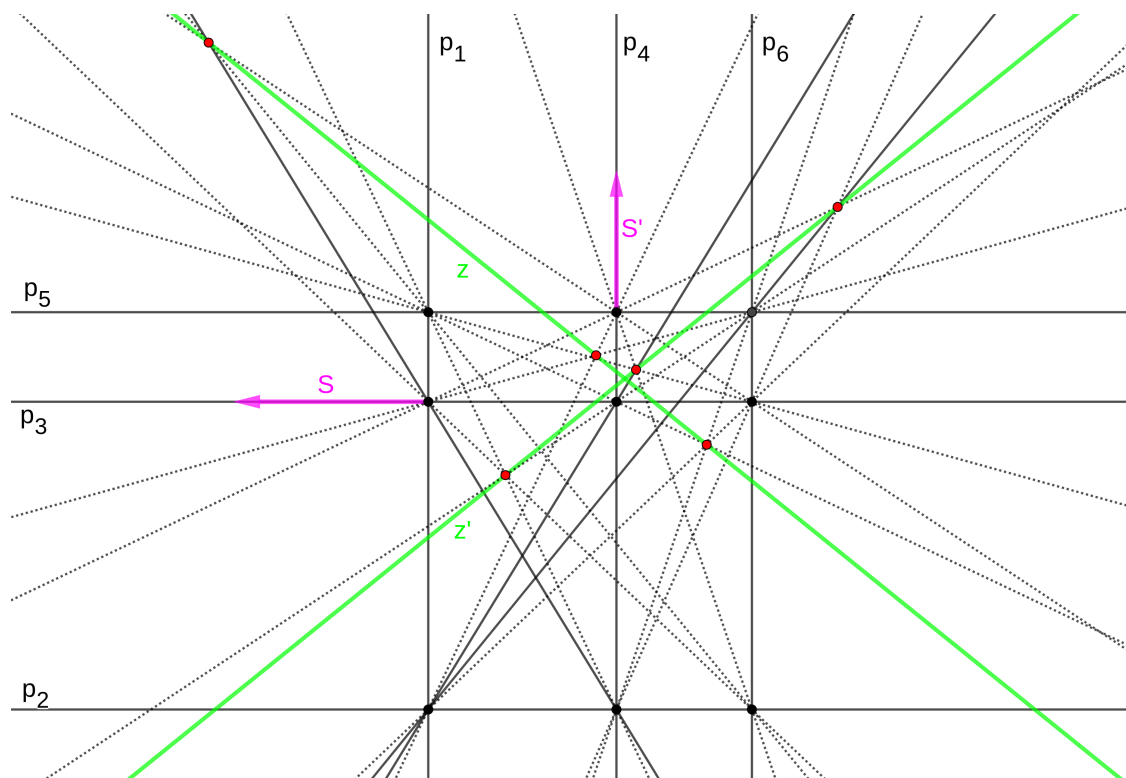


Abbildung 8: Pappospunkte mit zwei Fernpunkten

Bemerkung 2. Die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt werfen auch ein Licht auf die Erweiterung der Pascal-Figur (Abb. 1) und die Brianchon-Figur (Abb. 2). Da eine Pappos-Figur durch stetige Metamorphose einer Pascal-Figur erzeugt werden kann, lag der Gedanke nahe, dass Satz 3 auch für die Pascal-Figur gilt. In der Tat lässt sich der Beweis wörtlich übertragen.

Dies war Anlass einer gründlichen Recherche, sie förderte eine reichhaltige Literatur zum *Hexagramma mysticum* hervor² und zeigte erstaunliche strukturelle Zusammenhänge, die heute kaum noch bekannt sind. Um sie zu durchschauen, erinnern wir uns zunächst an einen Satz über Polaritäten.

²Friedrich Dingeldey: Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme, S. 36 ff., in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III Geometrie, 2. Teil 1. Hälfte, Leipzig 1903 – 1915,
<https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN360609856>

Erich Kötter: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847), Jahresbericht der DMV, 5. Bd. 2. Heft, 1901
https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN37721857X_0005

3 Exkurs über Polaritäten

1. Eine Polarität in der Ebene ist eine involutorische Korrelation: Jedem Punkt P der Ebene wird eine Gerade p als Polare von P zugeordnet und jeder Geraden g wird ein Punkt G als Pol zugeordnet mit der Eigenschaft, der Pol von p ist P und die Polare von G ist g .
2. Der Hauptsatz der Polarentheorie lautet: Liegt ein Punkt Q auf der Polaren p eines Punktes P , so liegt P auch auf der Polaren q von Q . Man nennt dann P und Q *konjugierte Punkte* und p und q *konjugierte Geraden* in Bezug auf die Polarität.
3. Ein Punkt P heißt *selbstkonjugiert*, wenn er auf seiner Polaren liegt. Wenn es einen selbstkonjugierten Punkt gibt, dann gibt es unendlich viele solche Punkte und sie liegen alle auf einem (möglicherweise entarteten) Kegelschnitt. In diesem Fall nennt man die Polarität *hyperbolisch*. Gibt es keinen selbstkonjugierten Punkt, heißt die Polarität *elliptisch*.
4. Ist ABC ein Dreieck mit der Eigenschaft, dass $a = BC$ die Polare von A , $b = AC$ die Polare von B und $c = AB$ die Polare von C ist, so nennt man ABC ein *Polardreieck*.
5. Eine Polarität erzeugt auf jeder Geraden g eine Involution. Denn sei P ein beliebiger Punkt auf g , G der Pol von g und p die Polare von P und $P' = gp$, so ist PGP' ein Polardreieck, und $P \leftrightarrow P'$ sind die konjugierten Punkte einer Involution.
6. Eine Polarität ist durch ein Polardreieck ABC und ein Pol-Polaren Paar Pp eindeutig bestimmt, falls P auf keiner Dreiecksseite liegt und p durch keine Ecke geht.
7. Ein Dreieck ABC zerlegt die Ebene in vier Punktgebiete. Jede Gerade p , die keine Ecke des Dreiecks trifft, enthält nur Punkte aus drei Gebieten und keinen Punkt aus genau einem der vier Gebiete. Liegt der Pol von p in diesem Gebiet, ist die durch das Polardreieck ABC und das Pol-Polaren Paar Pp bestimmte Polarität elliptisch. Die durch das Polardreieck ABC und das Paar Pp in Abb. 9 bestimmte Polarität ist daher elliptisch und enthält keine selbstkonjugierten Punkte.

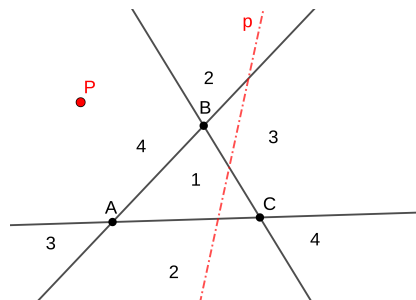


Abbildung 9: Gebiete

Satz 5. Zwei Dreiecke $P_1P_3P_5$ und $P_2P_4P_6$ sind genau dann Polardreiecke eines Kegelschnitts k_1 , wenn die sechs Punkte P_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ auf einem Kegelschnitt k_2 liegen.

Für den Beweis verwenden wir die Bezeichnungen

$$P_i P_k = u_{ik}$$

$$P_n P_m = g_{nm}$$

$$P_i P_n = c_{in}$$

falls $i, k \in \{1, 3, 5\}$ und $n, m \in \{2, 4, 6\}$. Weiter sei $c_{in} c_{km} = S_{inkm}$ und $u_{ik} g_{nm} = Q_{iknm}$.

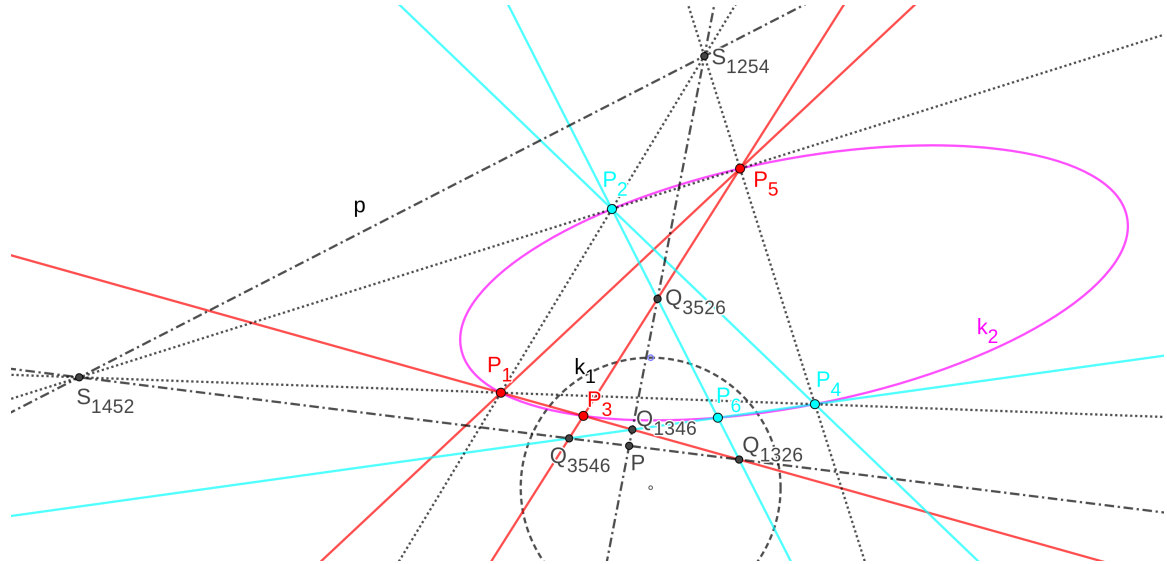


Abbildung 10: Polardreieck

Beweis. Es seien $P_1 P_3 P_5$ und $P_2 P_4 P_6$ Polardreiecke eines Kegelschnitts k_1 .

Wir zeigen nun, dass die drei Schnittpunkte S_{1452} , Q_{3546} , Q_{1326} auf einer Geraden liegen. Aus dem Satz von Pascal für das Sechseck $P_1 P_4 P_6 P_5 P_2 P_3$ folgt dann die erste Behauptung (siehe Abb. 10).

Nach Voraussetzung ist in Bezug auf k_1

- die Gerade u_{35} Polare von P_1 , die Gerade u_{13} die Polare von P_5 und die Gerade u_{15} die Polare von P_3
- die Gerade g_{46} die Polare von P_2 , die Gerade g_{26} die Polare von P_4 und die Gerade g_{24} die Polare von P_6

also ist nach dem Hauptsatz der Polarentheorie einerseits

- $u_{35} g_{46} = Q_{3546}$ der Pol der Geraden $c_{12} = P_1 P_2$ und
- $u_{14} g_{26} = Q_{1326}$ der Pol der Geraden $c_{45} = P_4 P_5$ und
- $Q_{3546} Q_{1326}$ die Polare von S_{1254}

und andererseits

- $u_{13} g_{46} = Q_{1346}$ der Pol der Geraden $c_{52} = P_5 P_2$ und
- $u_{35} g_{26} = Q_{3526}$ der Pol der Geraden $c_{14} = P_1 P_4$.

Folglich ist auch

- $S_{1254} = c_{12}c_{54}$ der Pol der Geraden $Q_{3546}Q_{1326} = s_{1254}$ und
- $S_{1452} = c_{14}c_{52}$ der Pol der Geraden $Q_{3526}Q_{1346} = s_{1452}$, und schließlich ist
- $s_{1254}s_{1452} = P$ der Pol der Geraden $S_{1254}S_{1452} = p$.

Das bedeutet aber, die drei Punkte S_{1254} , S_{1452} und P bilden ein Polardreieck in Bezug auf k_1 . Somit liegt S_{1452} auf der Polaren $s_{1254} = Q_{3546}Q_{1326}$, der Pascalgeraden des Sechseck $P_1P_4P_6P_5P_2P_3$. Nach dem Satz des Pascal liegen die Punkte P_i daher auf einem Kegelschnitt.

Liegen umgekehrt die sechs Punkte P_i auf einem Kegelschnitt k_2 , so betrachten wir die Polarität, die durch das Polardreieck $P_1P_3P_5$ und das Pol-Polaren Paar P_2 und g_{24} gegeben ist. Diese Polarität erzeugt auf der Geraden g_{24} eine Involution, d.h. jedem Punkt X auf g_{24} ist der Schnittpunkt $X' = xg_{24}$ seiner Polaren mit g_{24} zugeordnet, und die drei Punkte P_2XX' bilden ein Polardreieck. Nach dem eben Bewiesenen liegen die sechs Punkte $P_1P_3P_5P_2XX'$ auf einem Kegelschnitt k_2 , also liegt X' auf dem durch die 5 Punkte $P_1P_3P_5P_2X$ bestimmten Kegelschnitt, und im Fall $X = P_4$ ist das der Kegelschnitt $k_2 = P_1P_3P_5P_2P_4P_6$ mit dem Polardreieck $P_2P_4P_6$, qed. $\square$

Bemerkung 3. Ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte eindeutig bestimmt. Liegen nur drei von ihnen auf einer Geraden, ist er zu einem Geradenpaar entartet. Die Kegelschnitte k_1 und k_2 in Satz 5 sind entweder beide entartet oder beide nicht entartet.

4 Das vollständige Hexagramma mysticum

4.1 Struktur des vollständigen Sechsecks

Liegen sechs Punkte P_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ auf einem Kegelschnitt k_2 , so liefert jede Reihenfolge (Permutation) der Punkte ein geschlossenes Sechseck und genau eine Pascalgerade. Durch zyklische Vertauschung einer Permutation und ihrer Inversen entstehen 12 Permutationen, welche dieselbe Pascalgerade liefern. Daher ist die Maximalzahl verschiedener Pascalgeraden in einem vollständigen Sechseck $\frac{6!}{12} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Es gibt $\binom{6}{2} = 15$ Verbindungsgeraden der 6 Punkte P_i , und diese liefern zunächst $\binom{15}{2} = 105$ Schnittpunkte. Darunter sind aber die P_i mehrfach gezählt. Da durch jeden Punkt P_i fünf Verbindungsgeraden gehen, wird jeder dieser Punkte $\binom{5}{2} = 10$ mal gezählt, das sind $6 \cdot 10 = 60$ Mehrfachzählungen. Daher gibt es nur $105 - 60 = 45$ neue Punkte. Man nennt sie *Pascalpunkte*, weil durch jeden von ihnen vier Pascalgeraden gehen, wie wir noch sehen werden.

Um die Struktur des vollständigen Sechsecks eines Kegelschnitts leichter zu erkennen, gruppieren wir die sechs Punkte P_i in ein Dreieck mit „ungeraden“ Punkten $P_1P_3P_5$ und

ein Dreieck mit „geraden“ Punkten $P_2P_4P_6$. Die Seiten dieser Dreiecke bezeichnen wir mit

$$u_{13} = P_1P_3 \quad u_{15} = P_1P_5 \quad u_{35} = P_3P_5 \quad g_{24} = P_2P_4 \quad g_{26} = P_2P_6 \quad g_{46} = P_4P_6$$

Nun können wir noch jeden ungeraden Punkt P_i mit einem geraden Punkt P_k verbinden, das sind die restlichen $3 \cdot 3 = 9$ Verbindungsgeraden $c_{ik} = P_iP_k$

$$\begin{array}{ccc} c_{12} & c_{14} & c_{16} \\ c_{32} & c_{34} & c_{36} \\ c_{52} & c_{54} & c_{56} \end{array}$$

Sie enthalten immer eine ungerade und eine gerade Ziffer.

Wir untersuchen nun die 45 Pascalpunkte der 15 Verbindungsgeraden. Da sich zwei ungerade Seiten immer in einem ungeraden Punkt P_i und zwei gerade Seiten immer in einem geraden Punkt P_n treffen, gibt es drei Sorten von Pascalpunkten:

1. Jede ungerade Dreieckseite u_{ik} schneidet die drei geraden Dreieckseiten g_{nm} in drei neuen Punkten $Q_{iknm} = u_{ik}g_{nm}$, das ergibt die 9 Schnittpunkte

$$\begin{array}{ccc} Q_{1324} & Q_{1326} & Q_{1346} \\ Q_{1524} & Q_{1526} & Q_{1546} \\ Q_{3524} & Q_{3526} & Q_{3546} \end{array}$$

Sie enthalten immer 2 ungerade und 2 gerade Ziffern, die Ziffernfolge ist stets uugg.

2. Die Gerade c_{12} z.B. trifft die ungeraden Seiten u_{13} und u_{15} jeweils in P_1 und die geraden Seiten g_{24} und g_{26} jeweils in P_2 und die Seiten u_{35} und g_{46} in den neuen Punkten $R_{1235} = c_{12}u_{35}$ und $R_{1246} = c_{12}g_{46}$. Entsprechendes gilt für jede Gerade c_{ik} . So entstehen die 18 neuen Punkte

$$\begin{array}{ccccccccc} R_{1235} & R_{1435} & R_{1635} & R_{3215} & R_{3415} & R_{3615} & R_{5213} & R_{5413} & R_{5613} \\ R_{1246} & R_{1426} & R_{1624} & R_{3246} & R_{3426} & R_{3624} & R_{5246} & R_{5426} & R_{5624} \end{array}$$

Die Ziffernfolge ist entweder uguu (1. Zeile) oder uggu (2. Zeile).

3. Die Geraden c_{ik} und c_{nm} treffen sich genau dann in einem neuen Punkt $S_{iknm} = c_{ik}c_{nm}$, wenn $ik \neq nm$ und $i, n \in \{1, 3, 5\}$, $k, m \in \{2, 4, 6\}$. So entstehen die 18 neuen Punkte

$$\begin{array}{cccc} S_{1234} & S_{1236} & S_{1254} & S_{1256} \\ S_{1432} & S_{1436} & S_{1452} & S_{1456} \\ S_{1632} & S_{1634} & S_{1652} & S_{1654} \\ S_{3254} & S_{3256} & S_{3452} & S_{3456} \\ S_{3652} & S_{3654} & & \end{array}$$

Die Ziffernfolge ist immer ugug.

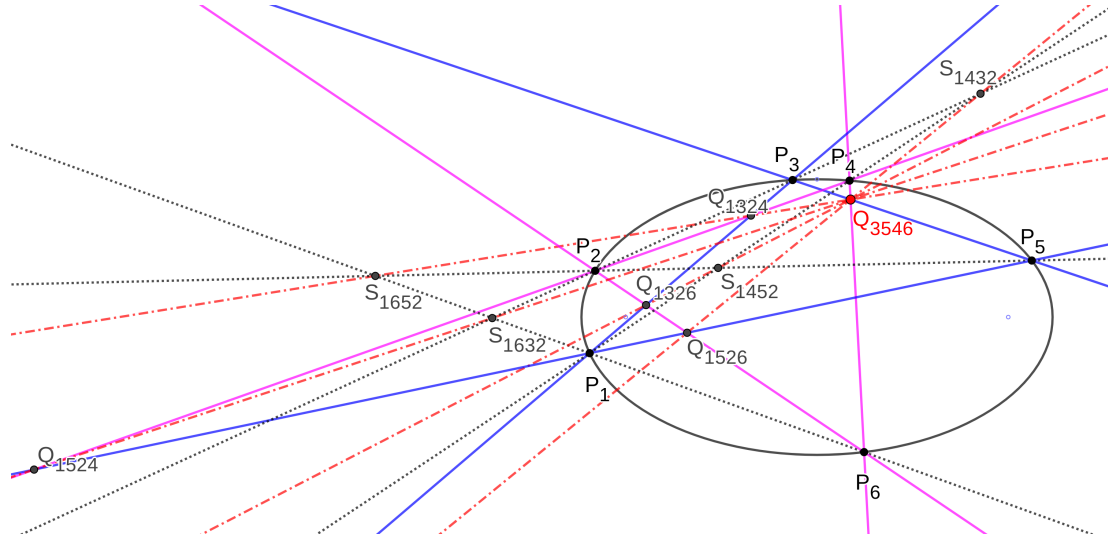


Abbildung 11: Treffpunkt Q_{3546} von vier Pascalgeraden

Damit haben wir alle $9 + 18 + 18 = 45$ Pascalpunkte gefunden.

Es stellt sich nun heraus:

Satz 6. *Durch jeden der Punkte $Q_{\dots}$, $R_{\dots}$, $S_{\dots}$ gehen vier Pascalgeraden.*

Beweis. Jede Reihenfolge der 6 Punkte P_i , also jedes geschlossene Sechseck bestimmt genau eine Pascalgerade. Um die Pascalgeraden zu finden, die z.B. durch den Punkt Q_{1324} gehen, müssen alle Permutationen gefunden werden, bei denen P_1 und P_3 an erster und zweiter Stelle stehen und P_2 und P_4 an 4. und 5. Stelle.

So gewinnt man folgende 8 Permutationen:

$P_1 P_3 P_5 P_2 P_4 P_6$	$P_1 P_3 P_5 P_4 P_2 P_6$	$P_3 P_1 P_5 P_2 P_4 P_6$	$P_3 P_1 P_5 P_4 P_2 P_6$
$Q_{1324}, Q_{3546}, S_{1652}$	$Q_{1324}, Q_{3526}, S_{1654}$	$Q_{1324}, Q_{1546}, S_{3652}$	$Q_{1324}, Q_{1526}, S_{3654}$
$P_1 P_3 P_6 P_2 P_4 P_5$	$P_1 P_3 P_6 P_4 P_2 P_5$	$P_3 P_1 P_6 P_2 P_4 P_5$	$P_3 P_1 P_6 P_4 P_2 P_5$
$Q_{1324}, S_{3654}, Q_{1526}$	$Q_{1324}, S_{3652}, Q_{1546}$	$Q_{1324}, S_{1654}, Q_{3526}$	$Q_{1324}, S_{1652}, Q_{3546}$

und es stellt sich heraus, dass die Pascalgeraden der zweiten Permutationsreihe mit denen der ersten identisch sind. Durch Q_{1324} gehen also vier Pascalgeraden (Abb. 11), und auf jeder liegt noch ein Q-Punkt und ein S-Punkt. Dies Ergebnis ist aber unabhängig von der Auswahl der vier Ziffern 1,3,2,4 und gilt daher für jeden Q-Punkt.

In gleicher Weise verfährt man bei der Untersuchung der R-Punkte und der S-Punkte und erhält auch dort jeweils vier Pascalgeraden, die durch einen R-Punkt bzw. S-Punkt gehen:

- Für den Punkt R_{1235} z.B. sind das die Geraden

$$\begin{array}{cccc} P_1 P_2 P_4 P_3 P_5 P_6 & P_1 P_2 P_6 P_3 P_5 P_4 & P_1 P_2 P_4 P_5 P_3 P_6 & P_1 P_2 P_6 P_5 P_3 P_4 \\ R_{1235}, R_{5624}, S_{1634} & R_{1235}, R_{5426}, S_{1436} & R_{1235}, R_{3624}, S_{1654} & R_{1235}, R_{3426}, S_{1456} \end{array}$$

- Für den Punkt S_{1234} z.B. sind das die Geraden

$$\begin{array}{cccc} P_1 P_2 P_5 P_3 P_4 P_6 & P_1 P_2 P_6 P_3 P_4 P_5 & P_1 P_2 P_5 P_4 P_3 P_6 & P_1 P_2 P_6 P_4 P_3 P_5 \\ S_{1234}, R_{5246}, R_{1635} & S_{1234}, R_{5426}, R_{3615} & S_{1234}, S_{3652}, S_{1654} & S_{1234}, Q_{3526}, Q_{1546} \end{array}$$

qed. □

In Bezug auf die Zerlegung des Sechsecks in zwei Polardreiecke gibt es also drei Sorten von Pascalgeraden:

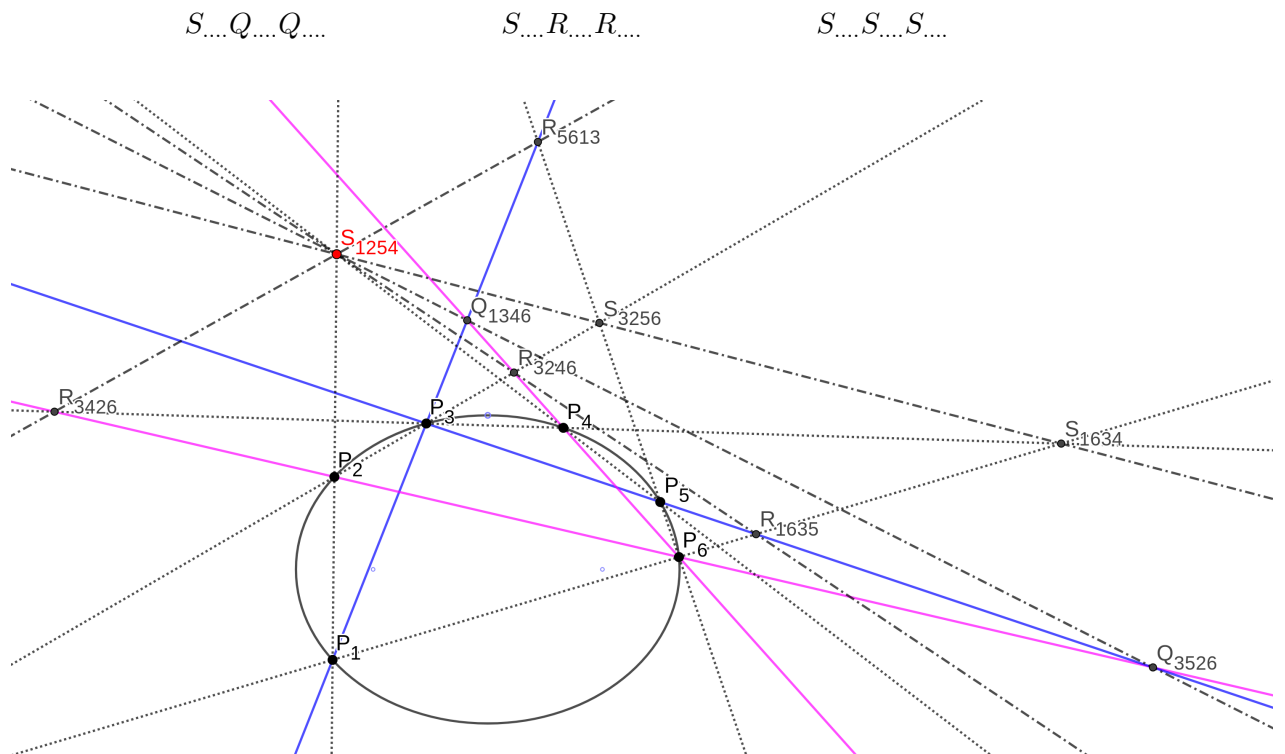


Abbildung 12: Treffpunkt S_{1234} von vier Pascalgeraden

Da durch jeden S-Punkt genau eine Pascalgerade der Sorte $S_{\dots}Q_{\dots}Q_{\dots}$ geht, gibt es ebensoviele Pascalgeraden dieser Sorte wie Punkte $S_{\dots}$, also 18.

Da durch jeden S-Punkt genau zwei Pascalgeraden der Sorte $S_{\dots}R_{\dots}R_{\dots}$ gehen, gibt es 36 solche Pascalgeraden. Somit verbleiben noch $60 - 18 - 36 = 6$ Pascalgeraden der Gestalt $S_{\dots}S_{\dots}S_{\dots}$. Sie entstehen aus denjenigen 6 Sechsecken, bei denen sich ungerade und gerade Punkte immer abwechseln:

$$\begin{array}{lll}
& P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 & P_1 P_4 P_3 P_6 P_5 P_2 & P_1 P_6 P_3 P_2 P_5 P_4 \\
\text{Tripel 1:} & S_{1254}, S_{3256}, S_{1634} & S_{1456}, S_{3452}, S_{1236} & S_{1652}, S_{3654}, S_{1432} \\
& & & (2) \\
& P_1 P_6 P_3 P_4 P_5 P_2 & P_1 P_4 P_3 P_2 P_5 P_6 & P_1 P_2 P_3 P_6 P_5 P_4 \\
\text{Tripel 2:} & S_{1654}, S_{3652}, S_{1234} & S_{1452}, S_{3456}, S_{1632} & S_{1256}, S_{3254}, S_{1436}
\end{array}$$

Umgekehrt liegen auf den Geraden c_{ik} , u_{ik} und g_{ik} jeweils 6 Pascalspunkte. Z.B. liegen

- auf der Geraden c_{12} die 6 Punkte S_{1234} , S_{1254} , S_{1236} , S_{1256} , R_{1246} , R_{1235}
- auf der Geraden u_{13} die 6 Punkte Q_{1324} , Q_{1326} , Q_{1346} , R_{5213} , R_{5413} , R_{5613}
- auf der Geraden g_{24} die 6 Punkte Q_{1324} , Q_{1524} , Q_{3524} , R_{1624} , R_{3624} , R_{5624}

Nach Satz 5 gibt es zu jeder Gruppierung der sechs Punkte P_i eines Kegelschnitts k_2 in zwei Dreiecke einen Kegelschnitt k_1 mit der Eigenschaft, dass die beiden Dreiecke Polardreiecke von k_1 sind. Wir fassen hier die Pol-Polare Beziehungen in Bezug auf den Kegelschnitt k_1 zusammen und kommen im nächsten Abschnitt darauf zurück:

$$P_1 \leftrightarrow u_{35} \quad P_3 \leftrightarrow u_{15} \quad P_5 \leftrightarrow u_{13} \quad P_2 \leftrightarrow g_{46} \quad P_4 \leftrightarrow g_{26} \quad P_6 \leftrightarrow g_{24}$$

Daraus folgt für die Polaren der Q-, S- und R-Punkte (an Beispielen dargestellt):

$$\begin{aligned}
Q_{3546} &= u_{35} g_{46} \leftrightarrow P_1 P_2 = c_{12} \\
S_{1254} &= c_{12} c_{54} \leftrightarrow Q_{3546} Q_{1326} = s_{1254} \\
R_{1235} &= c_{12} u_{35} \leftrightarrow Q_{3546} P_1 \\
R_{1246} &= c_{12} g_{46} \leftrightarrow Q_{3546} P_2
\end{aligned}$$

4.2 Steinerpunkte und Kirkmanpunkte³

Satz 7. Die drei Pascalgeraden eines jeden der beiden Tripel (2) gehen durch einen Punkt Z bzw. Z' . Man nennt Z und Z' Steinerpunkte und Z' den Gegenpunkt von Z .⁴

Beweis. Der Beweis von Satz 7 verläuft genau so wie der von Satz 3. □

Bemerkung 4. In den Sechsecken P_i von (2) wechseln sich Punkte mit ungeraden Ziffern und geraden Ziffern immer ab. Es gibt $\binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten der Auswahl von

³Das in diesem Abschnitt Dargestellte geht auf Jakob Steiner (1796 – 1863) zurück. Er hat es zuerst in einem kurzen Aufsatz mit dem Titel „Théorèmes sur l’Hexagramma mysticum“, Gerg. Annal. Bd. 18, 1827 beschrieben und dann im zweiten Teil der „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“ (Ostwalds Klassiker Nr. 83) im Anhang unter Aufgaben und Lehrsätze Nr. 54 bis 58 formuliert.

⁴Jakob Steiner (1796 – 1863) hat zuerst auf das vollständige Hexagramma mysticum aufmerksam gemacht. Siehe Gesammelte Werke S.450 f.

3 aus 6 Punkten P_i , die mit den drei ungeraden Ziffern bezeichnet werden können. Die Auswahl der jeweils anderen drei Punkte führt aber zu denselben beiden Sechsecktripeln, welche die Steinerpunkte Z und Z' liefern. Daher gibt es 10 Paare von Sechsecktripeln, also $10 \cdot 6 = 60$ Pascalgeraden, und 10 Paare von Steinerpunkten, also 20 Steinerpunkte (siehe Abb. 13).

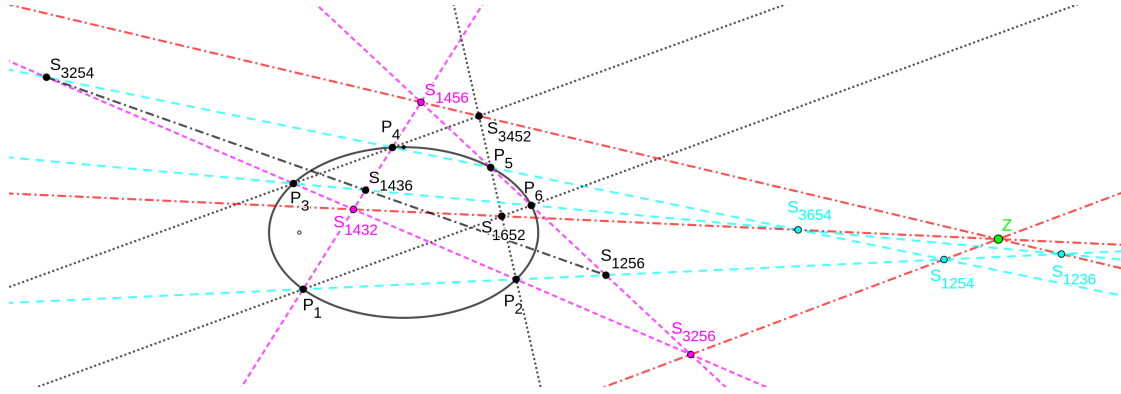


Abbildung 13: Steinerpunkt

In Abb. 13 sind die (roten) Pascalgeraden strichpunktliert und die beiden Desargues-Dreiecke $S_{1432}, S_{1456}, S_{3256}$ und $S_{1236}, S_{1254}, S_{3654}$ farbig.

Aus Satz 7 in Verbindung mit Satz 5 und dem Hauptsatz der Polarentheorie folgt unmittelbar:

Satz 8. *In Bezug auf den Kegelschnitt k_1 liegen die drei Pole K_i der drei Pascalgeraden eines jeden der beiden Tripel (2) auf der Polaren z von Z bzw. z' von Z' . Die Pole K_i nennt man Kirkmanpunkte⁵ und die Polaren z und z' Cayleygeraden.⁶*

Bemerkung 5. Da es 10 Paare Z, Z' von Steinerpunkten gibt und zu jedem Paar 6 Kirkmanpunkte, gibt es 60 Kirkmanpunkte und 20 Cayleygeraden in dem vollständigen Sechseck.

Satz 9. *Je drei der 60 Pascalgeraden treffen sich in einem Kirkmanpunkt K .*

Beweis. Zum Beweis polarisieren wir eine der drei Pascalgeraden von Satz 7 in Bezug auf den Kegelschnitt k_1 . Wir betrachten das Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ mit der Pascalgerade $S_{1254}S_{3256}S_{1634}$ und erhalten die Polaren der drei Punkte durch das oben notierte Verfahren. Da die drei Punkte $S_{1254}, S_{3256}, S_{1634}$ auf der Geraden $S_{1254}S_{3256}S_{1634}$ liegen, müssen

⁵nach Thomas Penyngton Kirkman (1806 – 1895)

⁶nach Arthur Cayley (1821 – 1895)

ihre Polaren durch den Pol dieser Geraden, also durch einen Kirkmanpunkt gehen:

$$\begin{array}{lll}
S_{1254} = c_{12}c_{54} & S_{3256} = c_{32}c_{56} & S_{1634} = c_{16}c_{34} \\
S_{1254} = (P_1P_2)(P_5P_4) & S_{3256} = (P_3P_2)(P_5P_6) & S_{1634} = (P_1P_6)(P_3P_4) \\
S_{1254} \leftrightarrow (u_{35}g_{46})(u_{13}g_{26}) & S_{3256} \leftrightarrow (u_{15}g_{46})(u_{13}g_{24}) & S_{1634} \leftrightarrow (u_{35}g_{24})(u_{15}g_{26}) \\
S_{1254} \leftrightarrow Q_{3546}Q_{1326} & S_{3256} \leftrightarrow Q_{1546}Q_{1324} & S_{1634} \leftrightarrow Q_{3524}Q_{1526}
\end{array}$$

Diese drei Polaren $Q_{3546}Q_{1326}$, $Q_{1546}Q_{1324}$, $Q_{3524}Q_{1526}$ sind aber offenbar die Pascalgeraden der Sechsecke

$$\begin{array}{lll}
P_4P_1P_3P_5P_2P_6 & P_5P_2P_4P_6P_3P_1 & P_3P_6P_2P_4P_1P_5 \\
S_{1452}Q_{1326}Q_{3546} & S_{3652}Q_{1324}Q_{1546} & S_{1436}Q_{1526}Q_{3524}
\end{array}$$

und treffen sich somit in einem der drei Kirkmanpunkte. Im analogen Verfahren gewinnt man die beiden anderen Polarentripel, die sich jeweils in einem Kirkmanpunkt treffen, qed. $\square$

Bemerkung 6. Das Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ mit der Pascalgerade $S_{1254}S_{3256}S_{1634}$ hat die 6 Seiten c_{12} , c_{32} , c_{34} , c_{54} , c_{56} , c_{16} . Aus den restlichen 9 Verbindungsgeraden

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_{13} & c_{14} & u_{15} & g_{24} & c_{52} & g_{26} & u_{35} & c_{36} & g_{46}
\end{array}$$

der 6 Ecken können nur drei verschiedene Sechsecke gebildet werden:

$$\begin{array}{lll}
P_4P_1P_3P_5P_2P_6 & P_5P_2P_4P_6P_3P_1 & P_3P_6P_2P_4P_1P_5 \\
S_{1452}Q_{1326}Q_{3546} & S_{3652}Q_{1324}Q_{1546} & S_{1436}Q_{1526}Q_{3524}
\end{array}$$

Diese drei Pascalgeraden können also auch ohne das Verfahren der Polarisierung gewonnen werden. Dass sie sich in einem Punkt treffen kann auch mit Hilfe der Desargues-Dreiecke $ABC = S_{1452}S_{1436}S_{3652}$ und $A'B'C' = Q_{1326}Q_{1526}Q_{1546}$ und der Pacalgerade $(aa')(bb')(cc') = R_{1426}R_{3615}S_{3452}$ als Achse bewiesen werden.

In Abb. 14 ist die Pascalgerade des Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ strichpunktiert und rot gezeichnet, K ist der zugehörige Kirkmanpunkt.

Satz 10. *Sind die beiden Steinerpunkte Z und Z' Gegenpunkte, so liegt Z' auf der Polaren von Z und Z auf der Polaren von Z' in Bezug auf den Kegelschnitt k_2 .*⁷

Beweis. Die Beweisidee ist die Generierung zweier Desarguesdreiecke ABC und A'B'C', deren entsprechende Seiten sich in drei Punkten aa', bb', cc' schneiden, die auf der Polaren von Z liegen. Einer der drei Punkte muss Z' sein und die beiden anderen die Pole zweier Pascalgeraden, die sich in Z schneiden. Es ist dann zu zeigen, dass die drei Verbindungsgeraden AA', BB', CC' sich entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen.

⁷Beweis nach Heinrich Schröter: Theorie der Kegelschnitte, Leipzig 1876, S.159

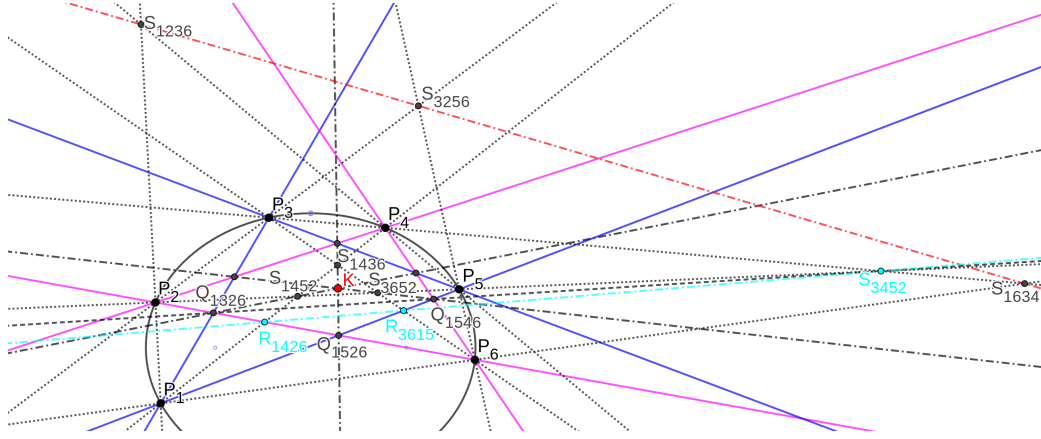


Abbildung 14: Kirkmanpunkt

Wir bemerken zunächst: Das Nebendreieck eines jeden Vierecks P_i des Kegelschnitts k_2 ist ein Polardreieck in Bezug auf den Kegelschnitt k_2 . So gehört z.B. zu dem Viereck $P_1P_2P_3P_4$ das Polardreieck S_{1234} , S_{1432} und Q_{1324} .

Es seien nun Z und Z' durch die beiden Tripel von Sechsecken und Pascalgeraden

$$\begin{array}{lll}
 \text{Tripel 1:} & \begin{array}{l} P_1P_2P_3P_4P_5P_6 \\ S_{1254}S_{3256}S_{1634} = p \end{array} & \begin{array}{l} P_1P_4P_3P_6P_5P_2 \\ S_{1456}S_{3452}S_{1236} = q \end{array} & \begin{array}{l} P_1P_6P_3P_2P_5P_4 \\ S_{1652}S_{3654}S_{1432} = r \end{array} \\
 \text{Tripel 2:} & \begin{array}{l} P_1P_6P_3P_4P_5P_2 \\ S_{1654}S_{3652}S_{1234} = p' \end{array} & \begin{array}{l} P_1P_4P_3P_2P_5P_6 \\ S_{1452}S_{3456}S_{1632} = q' \end{array} & \begin{array}{l} P_1P_2P_3P_6P_5P_4 \\ S_{1256}S_{3254}S_{1436} = r' \end{array} \quad (3)
 \end{array}$$

bestimmt. Z ist der Schnittpunkt zweier Seiten des ersten Tripels, etwa $Z = pq = (S_{1254}S_{3256})(S_{1236}S_{1456})$, die als Verbindungsgeraden aus je zwei Punkten von p und q entstehen. Um die Polare von Z darzustellen, benötigen wir zunächst die Polardreiecke dieser vier Punkte:

$$S_{1254}S_{1452}Q_{1524} \quad S_{3256}S_{3652}Q_{3526} \quad S_{1236}S_{1632}Q_{1326} \quad S_{1456}S_{1654}Q_{1546}$$

Der Pol P von p ist der Schnittpunkt der beiden Polaren $S_{1452}Q_{1524}$ von S_{1254} und $S_{3652}Q_{3526}$ von S_{3256} :

$$P = (S_{1452}Q_{1524})(S_{3652}Q_{3526})$$

und der Pol Q von q ist der Schnittpunkt der beiden Polaren $S_{1632}Q_{1326}$ von S_{1236} und $S_{1654}Q_{1546}$ von S_{1456} :

$$Q = (S_{1632}Q_{1326})(S_{1654}Q_{1546})$$

Diese Pole P und Q sind nun die Schnittpunkte aa' und bb' sich entsprechender Seiten der beiden Desarguesdreiecke. O.B.d.A. können wir $a = S_{1452}Q_{1524}$ und $a' = S_{3652}Q_{3526}$ setzen. Dann ist entweder

1. $b = S_{1632}Q_{1326}$ und $b' = S_{1654}Q_{1546}$ oder
2. $b' = S_{1632}Q_{1326}$ und $b = S_{1654}Q_{1546}$.

Im ersten Fall ist $C = ab = (S_{1452}Q_{1524})(S_{1632}Q_{1326})$ und $C' = a'b' = (S_{3652}Q_{3526})(S_{1654}Q_{1546})$.

Da A auf b liegt und B auf a, bietet sich $A = S_{1632}$ und $B = S_{1452}$ an, entsprechend $A' = S_{1654}$ und $B' = S_{3652}$. Dann ist

$$c = AB = S_{1632}S_{1452} \qquad c' = A'B' = S_{1654}S_{3652}$$

und in der Tat ist gemäß Tripel 2 in (3)

$$\begin{aligned} cc' &= (S_{1632}S_{1452})(S_{1654}S_{3652}) \\ cc' &= q'r' = Z' \end{aligned}$$

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Geraden AA', BB' und CC' sich in einem Punkt treffen. Es ist

$$AA' = S_{1632}S_{1654} = c_{16} \qquad BB' = S_{1452}S_{3652} = c_{52}$$

Der Treffpunkt muss also $(AA')(BB') = S_{1652}$ sein, d.h. die drei Punkte C, C' und S_{1652} müssen auf einer Geraden liegen. Das ist genau dann der Fall, wenn ihre drei Polaren durch einen Punkt gehen.

Die Polare von S_{1652} ist die Gerade $S_{1256}Q_{1526}$. Die Polare von C ist die Verbindungsgerade der Pole von $S_{1452}Q_{1524}$ und $S_{1632}Q_{1326}$, und das ist die Gerade $S_{1254}S_{1236} = c_{12}$. Die Polare von C' ist die Verbindungsgerade der Pole von $S_{3652}Q_{3526}$ und $S_{1654}Q_{1546}$, und das ist die Gerade $S_{3256}S_{1456} = c_{56}$. Der Treffpunkt der drei Geraden $S_{1256}Q_{1526}$, c_{12} und c_{56} ist aber offenbar der Punkt $c_{12}c_{56} = S_{1256}$, qed. $\square$

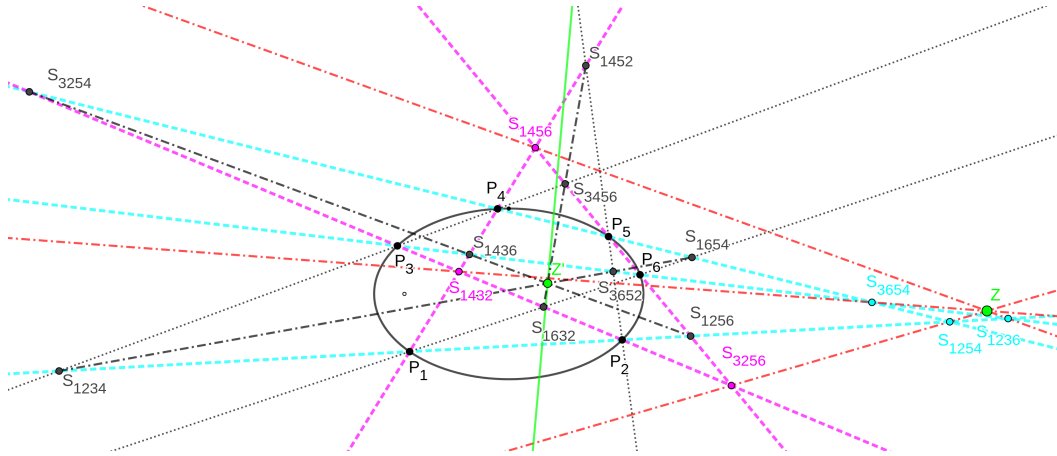


Abbildung 15: Pol und Polare

In Abb. 15 sind die Tripel 1 und 2 strichpunktiert gezeichnet mit den Steinerpunkten Z und Z' und der grünen Polaren von Z .

Ohne Beweis notieren wir noch

Satz 11. *Die 20 Steinerpunkte liegen zu je 4 auf 15 Plückergeraden, so dass durch jeden Steinerpunkt 3 Plückergeraden gehen.*

Das Pacalnetz mit den 60 Pascalpunkten, den 60 Kirkmanpunkten, den 20 Steinerpunkten und den 15 Plückergeraden wurde mit kombinatorischen Methoden untersucht von Friedrich Levi in *Geometrische Konfigurationen*, Leipzig 1929.

4.3 Struktur des vollständigen Tangentensechseits

Die Ergebnisse der Abschnitte 4.1 und 4.2 lassen sich dualisieren. Man gewinnt dadurch die vollständige Brianchon-Figur:

Pascal-Figur	Brianchon-Figur
6 Punkte P_i eines Kegelschnitts	6 Tangenten t_i eines Kegelschnitts
15 Verbindungsgeraden der P_i	15 Schnittpunkte der t_i
45 Pascalpunkte	45 Brianchongeraden
60 Pascalgeraden	60 Brianchonpunkte
Je 3 Pascalpunkte liegen auf einer Pascalgeraden	Je 3 Brianchongeraden treffen sich in einem Brianchonpunkt
20 Steinerpunkte	20 Steinergeraden
Je 3 Pascalgeraden gehen durch einen Steinerpunkt	Je 3 Brianchonpunkte liegen auf einer Steinergeraden
60 Kirkmanpunkte	60 Kirkmangeraden
20 Cayleygeraden	20 Cayleypunkte
Je 3 Kirkmanpunkte liegen auf einer Cayleygeraden	Je 3 Kirkmangeraden gehen durch einen Cayleypunkt

5 Das Papposnetz

Die beiden Treffpunkte Z und Z' in der vollständigen Pappos-Figur aus Satz 3 sind sozusagen die Steinerpunkte der Pappos-Figur. In Bemerkung 1 wurde schon erwähnt, dass

- die vollständige Pappos-Figur zwei Geradentripel enthält, die sich jeweils in einem Punkt treffen und daher eine duale Pappos-Figur darstellen
- die vollständige duale Pappos-Figur zwei Punktetripel enthält, die jeweils auf einer Geraden liegen und daher eine Pappos-Figur darstellen.

Durch fortwährende Vervollständigung der immer neu entstehenden Pappos-Figuren entsteht so ein ganzes Papposnetz von Punkten und Geraden.

Die Fortsetzung des Konstruktionen (siehe Abb. 17) ergibt die Vermutung:

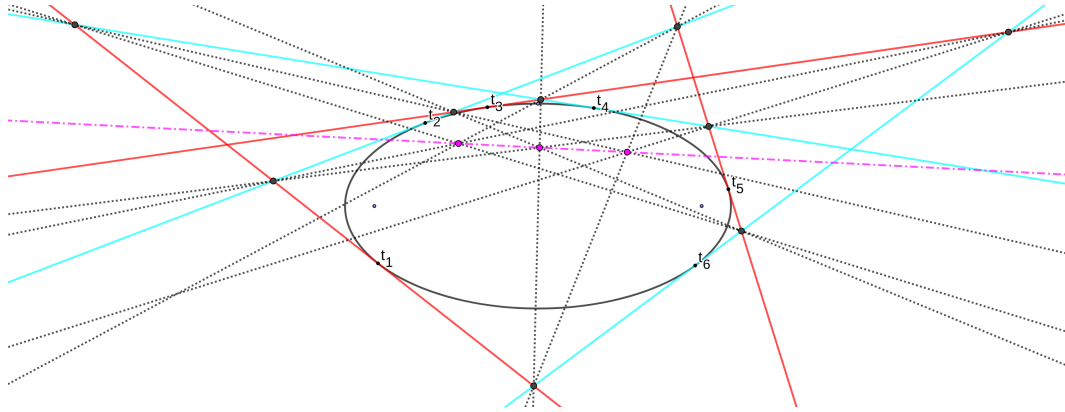


Abbildung 16: Steinergerade in der Brianchonfigur

Wenn man ausgehend von zwei besonderen Geraden z und z' die erweiterte Pappos-Figur mit den beiden besonderen Punkten Z und Z' konstruiert, und dann ausgehend von Z und Z' die duale erweiterte Pappos-Figur mit den beiden besonderen Geraden u und u' , so ist

$$u = z \quad \text{und} \quad u' = z' \qquad U = Z \quad \text{und} \quad U' = Z'$$

Wenn man ausgehend von zwei besonderen Punkten Z und Z' die duale erweiterte Pappos-Figur mit den beiden besonderen Geraden z und z' konstruiert, und dann ausgehend von z und z' die erweiterte Pappos-Figur mit den beiden besonderen Punkten U und U' , so ist

Die Abb. 17 wurde folgendermaßen konstruiert: Zunächst wurde ausgehend von zwei Punkten S_1 und S_2 die duale erweiterte Pappos-Figur mit

- den beiden Tripeln der 6 (gestrichelten) Geraden
- deren 9 Schnittpunkten
- deren (verborgenen) 18 Verbindungsgeraden
- deren (roten) 6 Schnittpunkten zu je zwei Tripeln mit den beiden (grünen) Geraden.

konstruiert.

Dann wurde ausgehend von diesen Geraden mit den 6 (roten) Punkten die erweiterte Pappos-Figur konstruiert. Sie enthält

- 9 Verbindungsgeraden der 6 Punkte
- 18 (türkise) Schnittpunkte dieser 9 Geraden
- 6 (türkise) Verbindungsgeraden, die je drei der 18 Schnittpunkte enthalten und zwei Tripel bilden.

In der Tat treffen sich die Geraden des einen Tripels im Punkt S_1 und die des anderen Tripels im Punkt S_2 .

Trifft die Vermutung zu, dann ergibt sich folgender Sachverhalt:

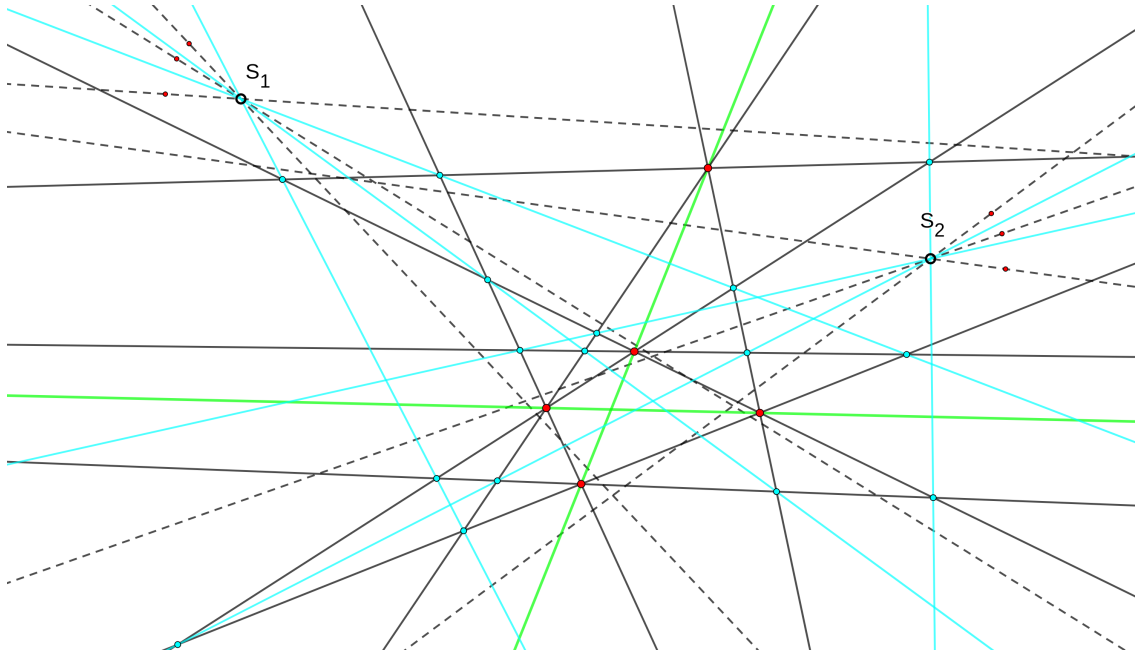


Abbildung 17: Schließung

Ausgehend von zwei Geraden a und b mit je drei auf ihnen liegenden beliebigen Punkten $A_i \in a$ und $B_i \in b$, $i = 1, 2, 3$ erhält man die erweiterte Pappos-Figur mit

- 9 Verbindungsgeraden
- 18 Schnittpunkten
- 6 Papposgeraden zu zwei Tripeln
- 2 Treffpunkte S_1 und S_2 .

Diese beiden Treffpunkte mit den 6 Papposgeraden sind die Ausgangselemente einer dualen erweiterten Pappos-Figur. Es entstehen

- 9 neue Schnittpunkte
- 18 Verbindungsgeraden
- 6 Pappospunkte P_i, Q_i zu je zwei Tripeln.

Es stellt sich heraus, dass die P_i auf a liegen und die Q_i auf b , dass sie aber im Allgemeinen von den Punkten A_i und B_i verschieden sind.

Setzt man die Konstruktion fort, so erhält man ein ganzes Netz von Geraden und Punkten, darunter immer neue Papposgeraden und Pappospunkte mit folgender Eigenschaft: *Alle Papposgeraden treffen sich in S_1 und S_2 , und alle Pappospunkte liegen auf a und b .*