

Aufbau und Struktur der ebenen harmonischen 13er-Figur*

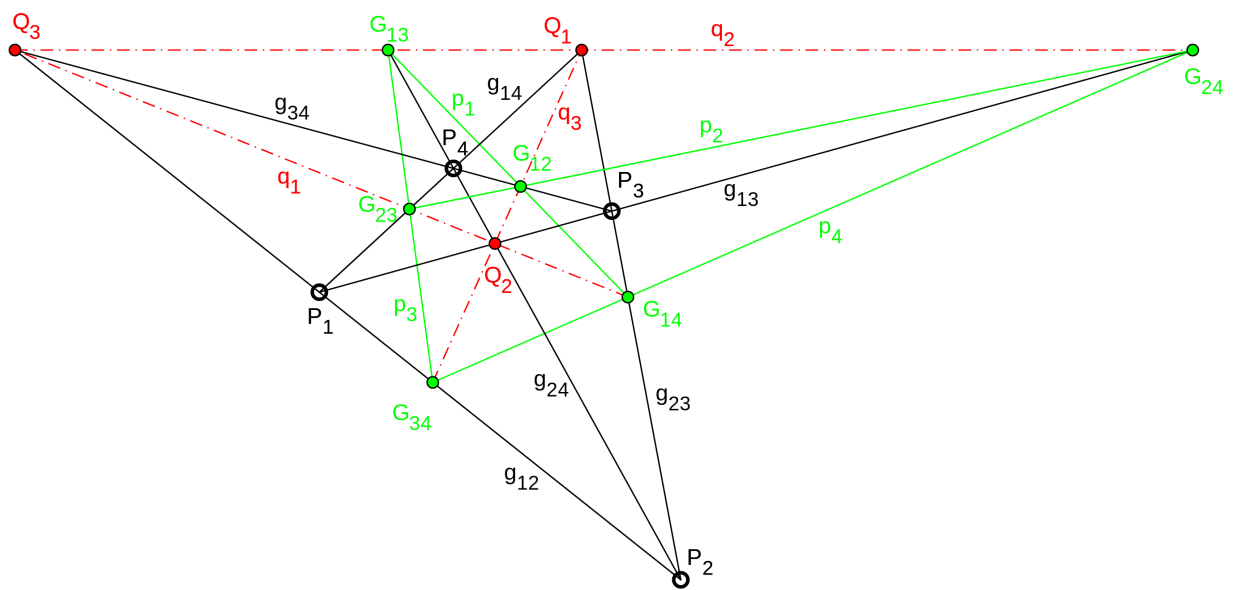


Abbildung 1: 13er-Figur

*Peter Baum, aktuelle korrigierte Fassung vom 14.03.2022, p.baum@posteo.de

1 Bezeichnungen

Gegeben sind in einer projektiven Ebene vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in allgemeiner Lage, d.h. keine drei der vier Punkte liegen zusammen auf einer Geraden.

Dann gibt es die 6 Verbindungsgeraden $g_{ik} = P_i P_k$, $i < k$, $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Die gegenüber liegenden Seiten dieses Sechseits g_{ik} treffen sich jeweils in den Ecken eines Dreiecks, dem Nebendreieck des Vierecks P_i :

$$Q_1 = g_{14}g_{23} \quad Q_2 = g_{24}g_{13} \quad Q_3 = g_{34}g_{12}.$$

Das Nebendreieck hat die Seiten

$$q_1 = Q_2Q_3 \quad q_2 = Q_1Q_3 \quad q_3 = Q_1Q_2.$$

Auf jeder Nebenseite liegen zwei weitere Schnittpunkte mit den Geraden g_{ik} :

- $q_1g_{14} = G_{23}$ und $q_1g_{23} = G_{14}$
- $q_2g_{24} = G_{13}$ und $q_2g_{13} = G_{24}$
- $q_3g_{34} = G_{12}$ und $q_3g_{12} = G_{34}$.

Je drei dieser 6 Punkte liegen auf einer Geraden:

$$p_1 = G_{12}G_{13}G_{14}$$

$$p_2 = G_{12}G_{23}G_{24}$$

$$p_3 = G_{13}G_{23}G_{34}$$

$$p_4 = G_{14}G_{24}G_{34}$$

Gegeben sind in einer projektiven Ebene vier Geraden p_1, p_2, p_3, p_4 in allgemeiner Lage, d.h. keine drei der vier Geraden treffen sich alle in einem Punkt.

Dann gibt es die 6 Schnittpunkte $G_{ik} = p_i p_k$, $i < k$, $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Die gegenüber liegenden Ecken dieses Sechsecks G_{ik} liegen jeweils auf den Seiten eines Dreiecks, dem Nebendreieck des Vierseits p_i :

$$q_1 = G_{14}G_{23} \quad q_2 = G_{24}G_{13} \quad q_3 = G_{34}G_{12}.$$

Das Nebendreieck hat die Ecken

$$Q_1 = q_2q_3 \quad Q_2 = q_1q_3 \quad Q_3 = q_1q_2.$$

Durch jede Nebenecke gehen zwei weitere Verbindungsgeraden der Punkte G_{ik} :

- $Q_1G_{14} = g_{23}$ und $Q_1G_{23} = g_{14}$
- $Q_2G_{24} = g_{13}$ und $Q_2G_{13} = g_{24}$
- $Q_3G_{34} = g_{12}$ und $Q_3G_{12} = g_{34}$

Je drei dieser 6 Geraden gehen durch einen Punkt:

$$P_1 = g_{12}g_{13}g_{14}$$

$$P_2 = g_{12}g_{23}g_{24}$$

$$P_3 = g_{13}g_{23}g_{34}$$

$$P_4 = g_{14}g_{24}g_{34}$$

Die letzte überraschende Tatsache folgt aus dem Satz des Desargues: Jeder Punkt P_i ist das Zentrum einer Desargues-Figur mit den beiden zentrierten Dreiecken Q_k und P_k , $k \neq i$ und der Achse p_i .

Die Bezeichnung durch die Indizes hat den Vorteil, dass sie „dualisierbar“ ist, wie man an den beiden Spalten sieht. Denn in der Tat ergibt sich in *beiden* Spalten $P_i P_k = g_{ik}$ und $p_i p_k = G_{ik}$.

Die so entstandene Figur enthält 13 Punkte und 13 Geraden, wobei vier Punkte einer Geraden und vier Geraden eines Punktes stets harmonische Lage haben. Man nennt sie daher 13er-Figur oder harmonische Grundfigur (HGF).

Für den folgenden Text ist es zweckmäßig, sich diese Bezeichnungen und ihre Systematik zu merken, insbesondere die Unterscheidung der vier P-Punkte von den drei Q-Punkten und den sechs G-Punkten, ebenso die Unterscheidung der sechs g-Geraden von den drei q-Geraden und den vier p-Geraden.

Zur Systematik der Bezeichnungen: es inzidieren immer

Q_1 mit g_{14} und g_{23}

Q_2 mit g_{24} und g_{13}

Q_3 mit g_{34} und g_{12}

q_1 mit G_{14} und G_{23}

q_2 mit G_{24} und G_{13}

q_3 mit G_{34} und G_{12}

P_i mit den drei g-Geraden, welche die Ziffer i enthalten,

p_i mit den drei G-Punkten, welche die Ziffer i enthalten.

2 Struktur der HGF

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Durch jeden der vier Punkte P_i gehen genau 3 der 13 Geraden. 2. Sowohl durch die 3 Ecken Q_i des Nebendreiecks als auch durch die 6 Punkte G_{ik} gehen jeweils genau 4 der 13 Geraden. Diese vier Geraden haben jeweils harmonische Lage. 3. Auf jeder der 6 Geraden g_{ik} liegt genau einer der 6 Punkte G_{ik}, und zwar inzidieren g_{12} mit G_{34} und g_{34} mit G_{12}, g_{13} mit G_{24} und g_{24} mit G_{13}, g_{14} mit G_{23} und g_{23} mit G_{14}. 4. Das vollständige Viereck P_i hat dasselbe Nebendreieck wie das vollständige Vierseit p_i. 5. Zu jedem der drei Paare $(Q_i q_i)$ gibt es ein Viereck G_{jk} in allgemeiner Lage mit einem inzidierenden Vierseit g_{jk} und einem gemeinsamen Nebendreieck. | <ol style="list-style-type: none"> 1. Auf jeder der vier Geraden p_i liegen genau 3 der 13 Punkte. 2. Sowohl auf den 3 Seiten q_i des Nebendreiecks als auch auf den 6 Geraden g_{ik} liegen jeweils genau 4 der 13 Punkte. Diese vier Punkte haben jeweils harmonische Lage. 3. Durch jeden der 6 Punkte G_{ik} geht genau eine der 6 Geraden g_{ik}, und zwar inzidieren G_{12} mit g_{34} und G_{34} mit g_{12}, G_{13} mit g_{24} und G_{24} mit g_{13}, G_{14} mit g_{23} und G_{23} mit g_{14}. 4. Das vollständige Vierseit p_i hat dasselbe Nebendreieck wie das vollständige Viereck P_i. 5. Zu jedem der drei Paare $(q_i Q_i)$ gibt es ein Vierseit g_{jk} in allgemeiner Lage mit einem inzidierenden Viereck G_{jk} und einem gemeinsamen Nebendreieck. |
|---|---|

Im Einzelnen ergibt sich aus 5. folgendes:

- Auf q_1 liegen die Punkte G_{14} und G_{23} . Das Viereck $G_{12}G_{24}G_{13}G_{34}$ aus den restlichen G-Punkten hat dann allgemeine Lage und mit dem inzidierenden Vierseit $g_{34}g_{24}g_{13}g_{12}$ das gemeinsame Nebendreieck $Q_1G_{14}G_{23}$ mit dem Nebendreieck $q_1g_{23}g_{14}$.
- Auf q_2 liegen die Punkte G_{24} und G_{13} . Das Viereck $G_{12}G_{23}G_{34}G_{14}$ aus den restlichen G-Punkten hat dann allgemeine Lage und mit dem inzidierenden Vierseit $g_{34}g_{23}g_{14}g_{12}$ das gemeinsame Nebendreieck $Q_2G_{24}G_{13}$ mit dem Nebendreieck $q_2g_{13}g_{24}$.
- Auf q_3 liegen die Punkte G_{34} und G_{12} . Das Viereck $G_{13}G_{23}G_{14}G_{24}$ aus den restlichen G-Punkten hat dann allgemeine Lage und mit dem inzidierenden Vierseit $g_{24}g_{23}g_{14}g_{13}$ das gemeinsame Nebendreieck $Q_3G_{34}G_{12}$ mit dem Nebendreieck $q_3g_{12}g_{34}$.

Ferner gilt (siehe Abb. 2):

Satz 1. *Zu jedem dieser drei Vierecke gibt es genau einen Kegelschnitt, der durch die 4 Ecken geht und die 4 Seiten des zugehörigen Vierseits berührt.*

Beweis. Es genügt, den Beweis für das Viereck $G_{12}G_{13}G_{24}G_{34}$ zu führen, für die anderen beiden Vierecke geht er analog.¹

Durch die vier Punkte $G_{12}G_{13}G_{24}G_{34}$ ist ein Büschel von Kegelschnitten bestimmt. Genau ein Kegelschnitt k dieses Büschels hat die durch G_{12} gehende Gerade g_{34} zur Tangente. Nun ist zu zeigen, dass auch die mit G_{13} , G_{24} , G_{34} der Reihe nach inzidierenden Geraden g_{24} , g_{13} und g_{12} Tangenten von k sind. Es genügt, den Beweis für g_{24} zu führen, für die Geraden g_{13} und g_{12} geht der Beweis dann analog zu g_{24} .

Falls sechs Punkte 123456 auf einem Kegelschnitt liegen, liegen die drei Schnittpunkte (12) (45), (23) (56), (34) (61) nach dem Satz von Pascal auf einer Geraden (Pascal-Gerade). Fallen die beiden Punkte 1 und 2

¹Beweis nach Alexander Stolzenburg: Die harmonische 13er-Figur.

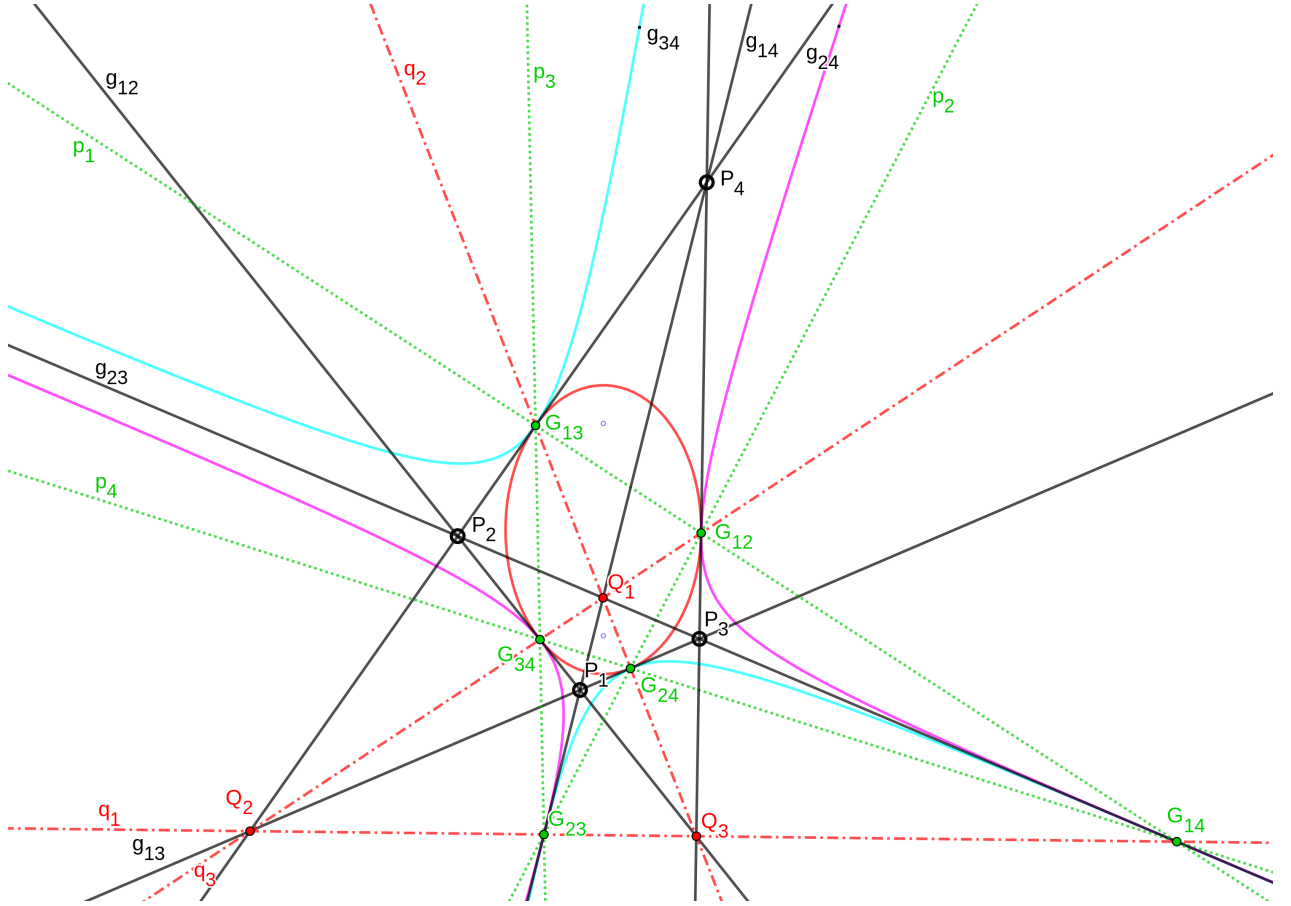


Abbildung 2: Ellipse und Hyperbeln

zusammen, so ist die Gerade (12) die Tangente von k mit dem Berührungspunkt $1 = 2$. Wir setzen $G_{12} = 1 = 6$, $G_{13} = 3 = 4$, $G_{24} = 2$, $G_{34} = 5$. Dann sind die Geraden (34) und (61) $= (G_{12}G_{12}) = g_{34}$ Tangenten von k und es ist zu zeigen, dass die Tangente (34) $= (G_{13}G_{13})$ mit der Geraden g_{24} identisch ist.

Wegen

$$(12)(45) = (G_{12}G_{24})(G_{13}G_{34}) = p_2p_3 = G_{23}$$

$$(23)(56) = (G_{24}G_{13})(G_{34}G_{12}) = q_2q_3 = Q_1$$

ist $Q_1G_{23} = g_{14}$ die Pascal-Gerade, die von der Tangente g_{34} im Punkt P_4 getroffen wird. Da nun aber auch der Punkt (34) (61) auf g_{14} liegt und wegen (61) $= (G_{12}G_{12}) = g_{34}$ auch auf g_{34} , ist (34) (61) $= P_4$ und somit ist die Tangente (34) $= (G_{13}P_4) = g_{24}$, qed. $\square$

In Abb. 2 handelt es sich bei den drei Kegelschnitten um eine Ellipse und zwei Hyperbeln. Wir wollen nun untersuchen, welche Arten von Kegelschnitten in einer HGF vorkommen können. Zunächst stellen wir fest, dass die Vierecke in Satz 1 auch Parabeln erzeugen können. Denn es gilt der

Satz 2. *Es sei k ein nicht ausgearteter Kegelschnitt. Dann gibt es beliebig viele HGF, so dass vier G -Punkte auf k liegen und ihre g -Geraden Tangenten von k sind. Die restlichen beiden G -Punkte sind äußere Punkte des Kegelschnitts.*

Beweis. (siehe Abb. 3, oder Abb. 2 mit der blauen Hyperbel für k). Man konstruiert eine HGF folgendermaßen: Es sei Q_1 ein beliebiger äußerer Punkt von k und q_1 seine Polare. Es sei Q_2 ein beliebiger äußerer Punkt von k , der auf q_1 liegt, und q_2 seine Polare. Es sei $q_1q_2 = Q_3$, dann ist $q_3 = Q_1Q_2$ die Polare von Q_3 und $Q_1Q_2Q_3$ ist ein Polardreieck von k (siehe auch Satz 8).

Nun wird k von q_1 in den Punkten G_{14} und G_{23} und von q_2 in den Punkten G_{24} und G_{13} geschnitten. Die Tangenten g_{23} und g_{14} von G_{14} und G_{23} treffen sich in Q_1 und die Tangenten g_{13} und g_{24} von G_{24} und G_{13} treffen sich in Q_2 . Sie liefern die Schnittpunkte

$$g_{13}g_{14} = P_1 \quad g_{23}g_{24} = P_2 \quad g_{13}g_{23} = P_3 \quad g_{14}g_{24} = P_4$$

Dass dann die Geraden $g_{12} = P_1P_2$ und $g_{34} = P_3P_4$ durch Q_3 gehen, folgt aus dem Satz von Brianchon. Somit ist $Q_1Q_2Q_3$ das Nebendreieck des Vierecks P_i . Mit $G_{12} = g_{34}q_3$ und $G_{34} = g_{12}q_3$ und den Geraden

$$p_1 = G_{12}G_{13}G_{14} \quad p_2 = G_{12}G_{23}G_{24} \quad p_3 = G_{13}G_{23}G_{34} \quad p_4 = G_{14}G_{24}G_{34}$$

ist die HGF vollständig konstruiert. $\square$

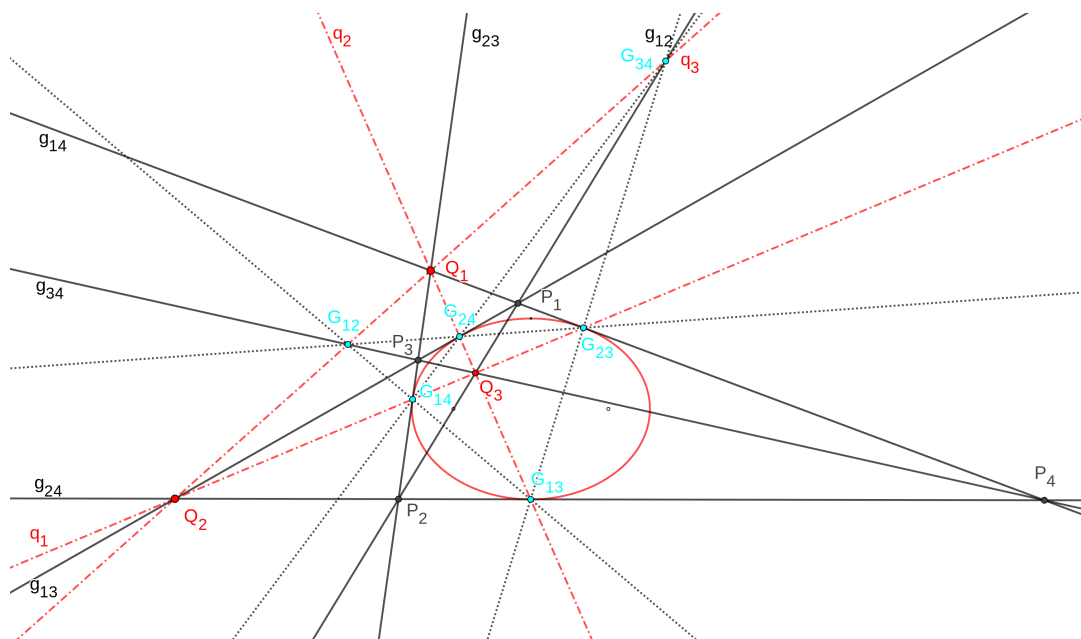


Abbildung 3: HGF Konstruktion

Bemerkung 1. Jeder nicht entartete Kegelschnitt zerlegt die Ebene in ein inneres und ein äußeres Punktgebiet. Durch jeden äußeren Punkt gehen zwei Tangenten, und durch die inneren Punkte geht keine Tangente.

Kann man den Vierecken aus Satz 1 ansehen, welchen Kegelschnitt sie erzeugen? Das ist in der Tat möglich. Bekanntlich wird durch 4 Punkte in allgemeiner Lage ein Kegelschnittsbüschel definiert, und diese 4 Punkte haben entweder Viereckslage oder Dreieckslage.² Es gilt

Satz 3. Haben vier eigentliche Punkte Dreieckslage, so enthält das durch sie bestimmte Kegelschnittsbüschel ausschließlich Hyperbeln und drei Paare von Doppelgeraden.

Beweis. Es sei ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c in üblicher Bezeichnung und D ein vierter Punkt im Inneren des Dreiecks mit $AD = a'$ und $BD = b'$ (siehe Abb. 4). Jede Gerade g zerlegt das Punktfeld einer Ebene in zwei Punktgebiete (Halbebenen), und es sei $H_g(P)$ diejenige Halbebene von g , in der der Punkt P liegt. Dann ist offenbar $H_c(D) = H_c(C)$ und D liegt genau dann im Inneren von ABC , wenn C weder in derselben Halbebene von b' wie A noch in derselben Halbebene von a' wie B liegt.

Es sei nun k eine Ellipse oder Parabel, die durch die drei Punkte ABD geht, und t die Tangente an k in D . Dann liegen alle Punkte P von k in derselben Halbebene von t , d.h. es ist $H_t(P) = H_t(A) = H_t(B)$ für alle Punkt P von k (siehe Abb. 4).

²siehe Stolzenburg: Projektive Geometrie S. 36

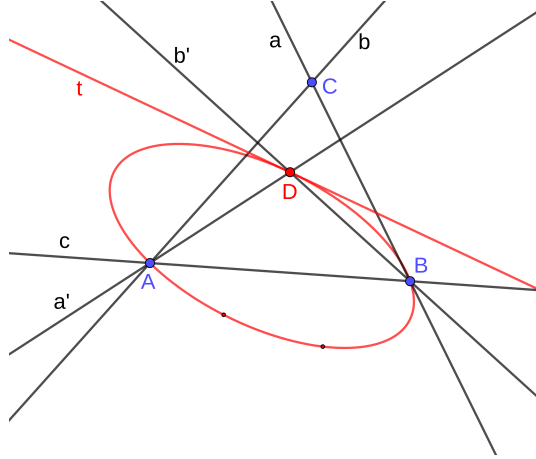


Abbildung 4: Dreieckslage von ABCD

Diese Halbebene von t setzt sich aus zwei Gebieten zusammen:

$$H_t(A) = \{H_t(A) \cap H_{b'}(A)\} \cup \{H_t(B) \cap H_{a'}(B)\}$$

Da nun C weder in $H_{b'}(A)$ noch in $H_{a'}(B)$ liegen kann (s.o., andernfalls wäre $ABCD$ kein Viereck in Dreieckslage), kann C auch nicht in $H_t(A)$ liegen, d.h. C ist kein Punkt von k . Somit enthält ein Kegelschnittbüschel eines Vierecks in Dreieckslage keine Ellipse und keine Parabel, sondern lediglich Hyperbeln und drei Paare von Doppelgeraden

$$(AB)(DC)$$

$$(BC)(DA)$$

$$(CA)(DB)$$

qed. □

Die drei Vierecke unterscheiden sich folgendermaßen:

Satz 4. Die nach Satz 1 in einer HGF auftretenden Vierecke aus den Punkten G_{ik} haben folgende Eigenschaften:

- ein Viereck (V_1) hat Viereckslage und enthält im Inneren keinen der Viereckspunkte P_i . Daher verlaufen die vier Tangenten außerhalb des Vierecks, sein Kegelschnitt ist also entweder eine Ellipse oder eine Parabel.
- ein Viereck (V_2) hat Viereckslage und enthält im Inneren zwei Viereckspunkte P_i und P_k . Sein Kegelschnitt ist also eine Hyperbel.
- ein Viereck (V_3) hat Dreieckslage, sein Kegelschnitt ist nach Satz 3 also eine Hyperbel.

Beweis. Die Begründung ergibt sich aus dem Aufbau der HGF, wenn wir von den vier Geraden p_i ausgehen:

p_1 und p_2 und p_3 liefern die drei Schnittpunkte G_{12} , G_{13} und G_{23} . Die vierte Gerade p_4 wird nun durch G_{14} auf der Geraden p_1 und G_{34} auf der Geraden p_3 bestimmt. Dabei gibt es 4 Möglichkeiten:

1. G_{14} liegt innerhalb der Strecke $\overline{G_{12}G_{13}}$ und G_{34} liegt innerhalb der Strecke $\overline{G_{13}G_{23}}$
2. G_{14} liegt innerhalb der Strecke $\overline{G_{12}G_{13}}$ und G_{34} liegt außerhalb der Strecke $\overline{G_{13}G_{23}}$
3. G_{14} liegt außerhalb der Strecke $\overline{G_{12}G_{13}}$ und G_{34} liegt innerhalb der Strecke $\overline{G_{13}G_{23}}$
4. G_{14} liegt außerhalb der Strecke $\overline{G_{12}G_{13}}$ und G_{34} liegt außerhalb der Strecke $\overline{G_{13}G_{23}}$

Der 4. Fall ist in Abb. 1 realisiert. Dort ist

$$V_1 = G_{12}G_{23}G_{34}G_{14}$$

$$V_2 = G_{13}G_{23}G_{14}G_{24}$$

$$V_3 = G_{12}G_{24}G_{13}G_{34}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Behauptung auch in den ersten drei Fällen zutrifft. ged. □

Wir untersuchen nun diejenigen besonderen Fälle, in denen eine der 13 Geraden der HGF die Ferngerade ist.

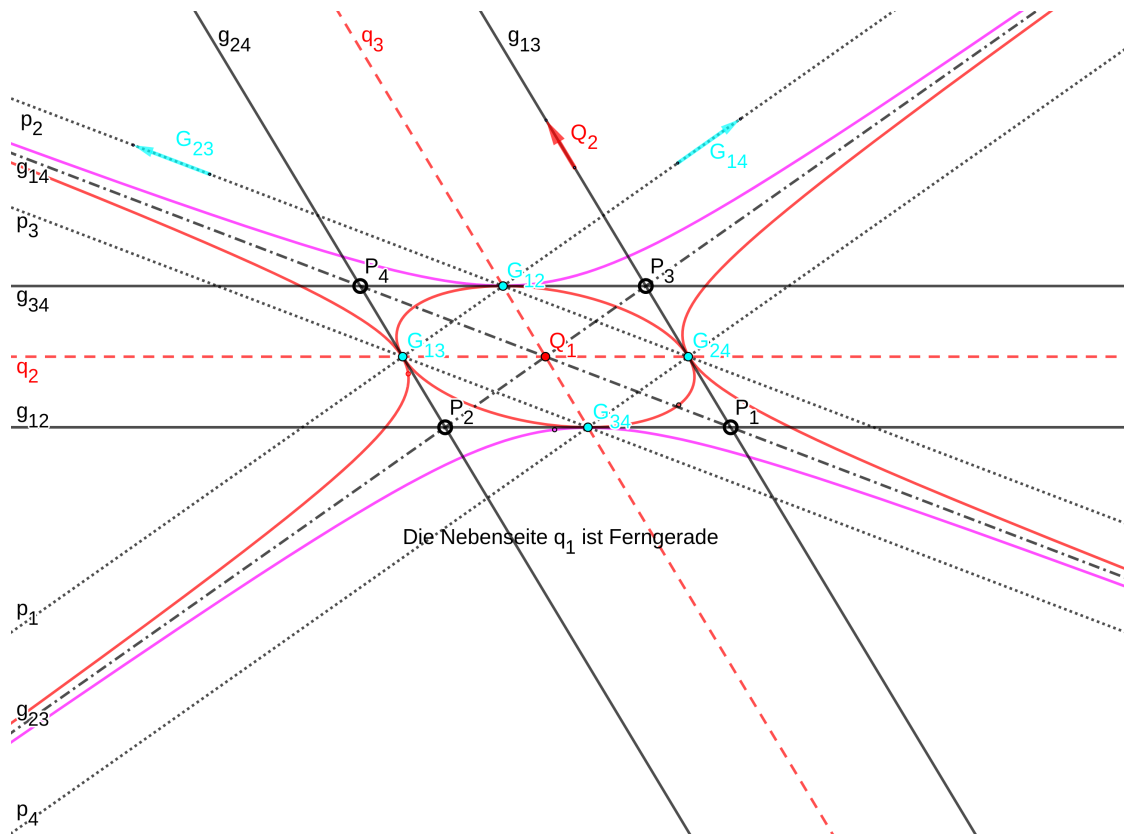


Abbildung 5: Eine Nebenseite ist Ferngerade

Satz 5. Ist eine der 3 Nebenseiten q_i die Ferngerade, so handelt es sich bei den drei Kegelschnitten um eine Ellipse und zwei Hyperbeln (Abb. 5).

Beweis. Es sei q_1 die Ferngerade. Dann sind die Punkte Q_2, Q_3, G_{14} und G_{23} Fernpunkte und das Viereck P_1, P_2, P_3, P_4 ist ein Parallelogramm, dessen Seiten Tangenten einer Ellipse sind mit den Berührungspunkten G_{12}, G_{34}, G_{13} und G_{24} . Die beiden Geraden q_2 und q_3 sind Asymptoten zweier Hyperbeln mit den Fernpunkten G_{14} und G_{23} . □

Satz 6. Ist eine der 6 Geraden g_{ik} die Ferngerade, so ist der mit ihr inzidierende Punkt G_{mn} ein Fernpunkt und bei den Kegelschnitten handelt es sich um zwei Parabeln und eine Hyperbel (siehe Abb. 6).

Beweis. Es sei g_{12} die Ferngerade. Dann ist G_{34} ein Fernpunkt. Der Kegelschnitt, der durch die vier Punkte $G_{12}G_{13}G_{24}G_{34}$ geht, hat dann die Ferngerade als Tangente und ist daher eine Parabel. Dasselbe gilt für den Kegelschnitt, der durch die vier Punkte $G_{12}G_{14}G_{23}G_{34}$ geht. Die vier Punkte $G_{13}G_{14}G_{23}G_{24}$ bilden ein Parallelogramm, daher kann der durch sie gehende Kegelschnitt keine Parabel sein. Für jede durch die vier Punkte gehende Ellipse sind die beiden Tangentschnittpunkte P_3 und P_4 innere Punkte, im Widerspruch zur Bemerkung 1, daher kann der durch $G_{13}G_{14}G_{23}G_{24}$ gehende Kegelschnitt nur eine Hyperbel sein. □

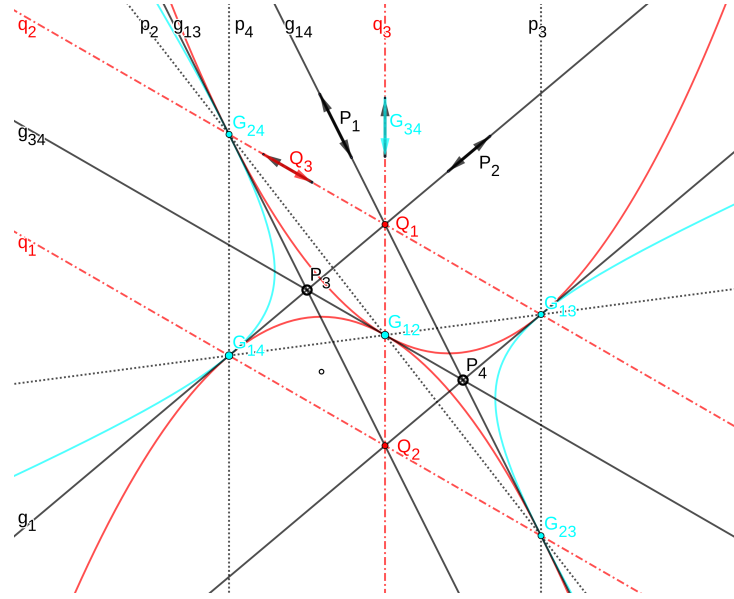


Abbildung 6: Parabeln und Hyperbel

Satz 7. Ist eine der vier Geraden p_i die Ferngerade, so enthält jedes der drei Vierecke zwei Fernpunkte und die drei Kegelschnitte sind Hyperbeln (siehe Abb. 7).

Satz 8. Für jeden der 3 Kegelschnitte ist die Polare eines der 13 Punkte eine der 13 Geraden der harmonischen 13er-Figur. Dabei ist stets das Nebendreieck $Q_1Q_2Q_3$ ein Polarendreieck, des jeweiligen Kegelschnitts, und q_i ist die Polare von Q_i für jeden der 3 Kegelschnitte.

Beweis. Es genügt, den Beweis für das Viereck $G_{12}G_{24}G_{13}G_{34}$ zu führen, da man jedes der drei Vierecke so bezeichnen könnte.

Offenbar sind die zugehörigen Tangenten g_{34} , g_{13} , g_{24} , g_{12} die Polaren dieser Ecken. Dann ist aber nach dem Hauptsatz der Polarentheorie auch

- $g_{12}g_{13} = P_1$ der Pol von $G_{34}G_{24} = p_4$
- $g_{12}g_{24} = P_2$ der Pol von $G_{34}G_{13} = p_3$
- $g_{13}g_{34} = P_3$ der Pol von $G_{24}G_{12} = p_2$
- $g_{24}g_{34} = P_4$ der Pol von $G_{13}G_{12} = p_1$
- $G_{23} = p_2p_3$ der Pol von $P_3P_2 = g_{23}$
- $G_{14} = p_1p_4$ der Pol von $P_4P_1 = g_{14}$
- $Q_1 = g_{14}g_{23}$ der Pol von $G_{14}G_{23} = q_1$
- $Q_2 = g_{24}g_{13}$ der Pol von $G_{13}G_{24} = q_2$
- $Q_3 = g_{34}g_{12}$ der Pol von $G_{12}G_{34} = q_3$

qed. □

Für die anderen beiden Vierecke aus Punkten G_{ik} ergeben sich entsprechend folgende Paare (Pol, Polare) in Bezug auf den jeweiligen zugehörigen Kegelschnitt:

Viereck $G_{12}G_{14}G_{23}G_{34}$ mit

Vierseit $g_{34}g_{23}g_{14}g_{12}$:

$(G_{12}, g_{34}), (G_{14}, g_{23}), (G_{23}, g_{14}), (G_{34}, g_{12})$
 $(P_1, p_3), (P_2, p_4), (P_3, p_1), (P_4, p_2)$
 $(G_{13}, g_{13}), (G_{24}, g_{24})$
 $(Q_1, q_1), (Q_2, q_2), (Q_3, q_3)$

Viereck $G_{13}G_{14}G_{23}G_{24}$ mit

Vierseit $g_{24}g_{23}g_{14}g_{13}$:

$(G_{13}, g_{24}), (G_{14}, g_{23}), (G_{23}, g_{14}), (G_{24}, g_{13})$
 $(P_1, p_2), (P_2, p_1), (P_3, p_4), (P_4, p_3)$
 $(G_{12}, g_{12}), (G_{34}, g_{34})$
 $(Q_1, q_1), (Q_2, q_2), (Q_3, q_3)$

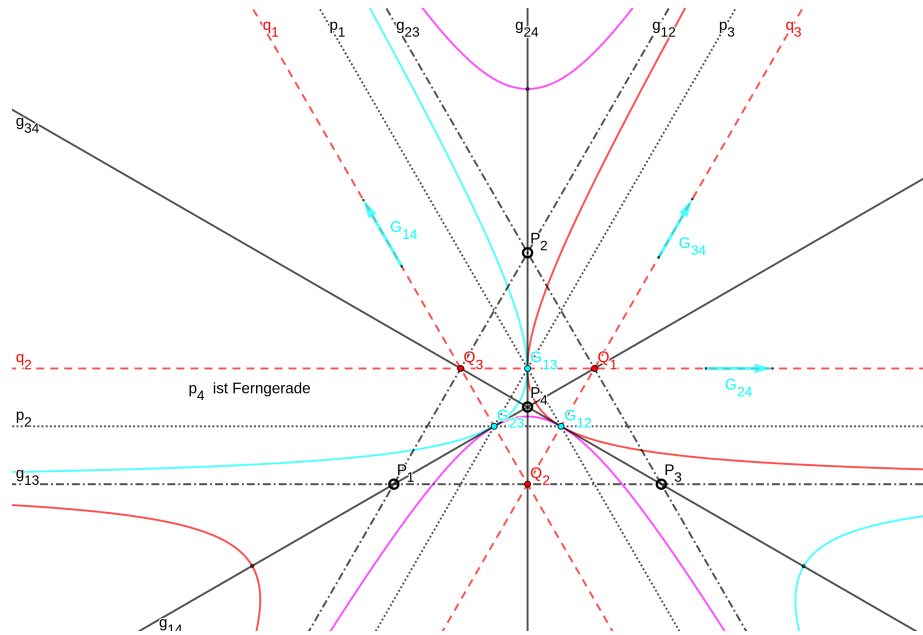


Abbildung 7: Hyperbeln

Bemerkung 2. Um zu klären, welche Tripel von Kegelschnitten gemäß Satz 1 überhaupt möglich sind, kann man auch folgendermaßen argumentieren. Wir stellen zunächst fest: Von den drei Vierecken

$$G_{12}G_{13}G_{24}G_{34}$$

$$G_{12}G_{14}G_{23}G_{34}$$

$$G_{13}G_{14}G_{23}G_{24}$$

einer HGF haben offenbar je zwei von ihnen genau 2 Punkte mit ihren Tangenten gemeinsam. Daraus folgt, dass sich je zwei der drei Kegelschnitte in genau zwei Punkten berühren müssen. Für welche Kegelschnitte ist dies möglich?

Zwei verschiedene Parabeln können sich nur dann in zwei Punkten berühren, wenn einer davon der gemeinsame Fernpunkt ist (wie in Abb. 6). Denn andernfalls ist eine Parabel durch zwei Punkte P und Q mit ihren beiden Tangenten p und q eindeutig bestimmt. Ist nämlich $T = pq$ und M der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$, so ist der Mittelpunkt R von $\overline{TM}$ ein fünfter Parabelpunkt, da P und Q doppelt zählen.

Berühren sich zwei Ellipsen in zwei Punkten, so liegt die eine ganz im Inneren der anderen. Ist $g_{12}g_{13}g_{24}g_{34}$ das Tangentenvierseit der äußeren Ellipse, so sind G_{23} und G_{14} äußere Punkte der äußeren Ellipse (nach Bemerkung 1), können also nicht auf der inneren Ellipse liegen. Daher kann eine HGF keine zwei Ellipsen enthalten.

Berührt eine Ellipse eine Parabel in zwei Punkten, so liegt sie ganz im Inneren der Parabel. Ist $g_{12}g_{13}g_{24}g_{34}$ das Tangentenvierseit der Parabel, so sind nach Bemerkung 1 G_{23} und G_{14} äußere Punkte der Parabel, können also nicht auf der Ellipse liegen. Daher kann eine HGF keine Parabel *und* eine Ellipse enthalten. Somit sind nur folgende Tripel von Kegelschnitten in einer HGF möglich:

- drei Hyperbeln,
- eine Ellipse und zwei Hyperbeln,
- eine Parabel und zwei Hyperbeln,
- zwei Parabeln und eine Hyperbel.

3 Aufbau einer HGF

Im Abschnitt 1 wurde die HGF einerseits durch vier Punkte P_i und andererseits dual dazu durch vier Geraden erzeugt. Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, aus den 26 Elementen der HGF einige auszuwählen, die dann alle anderen nach sich ziehen. Zu jeder Auswahl gibt es dann – wie im Abschnitt 1

– eine zu ihr duale Auswahl. Eine vollständige Liste wäre sicher ziemlich umfangreich. Hier seien daher nur einige notiert. Die Konstruktion sei dem Leser überlassen. Man beachte, dass man den vierten harmonischen Punkt (oder die vierte harmonische Gerade) konstruieren kann, wenn drei Punkte auf einer Geraden (oder drei Gerade durch einen Punkt) bekannt sind.

Q_1, Q_2, Q_3, P_i	q_1, q_2, q_3, p_i
Q_1, Q_2, Q_3, p_i	q_1, q_2, q_3, P_i
P_1, P_2, P_3, p_4	p_1, p_2, p_3, P_4
$G_{12}, G_{23}, G_{34}, G_{14}$	$g_{12}, g_{23}, g_{34}, g_{14}$

4 Desargues-Figuren

Wieviele Desargues-Figuren sind in einer HGF vorhanden?

Will man die HGF auf eine Desargues-Figur reduzieren, muss man drei Punkte und drei Geraden entfernen. Unter den dann verbleibenden 10 Punkten muss also mindestens einer der vier Punkte P_i existieren. Um alle möglichen Desargues-Figuren zu finden genügt es also, alle Figuren mit $P_i = Z$ als Zentrum, $i = 1, 2, 3, 4$ aufzulisten.

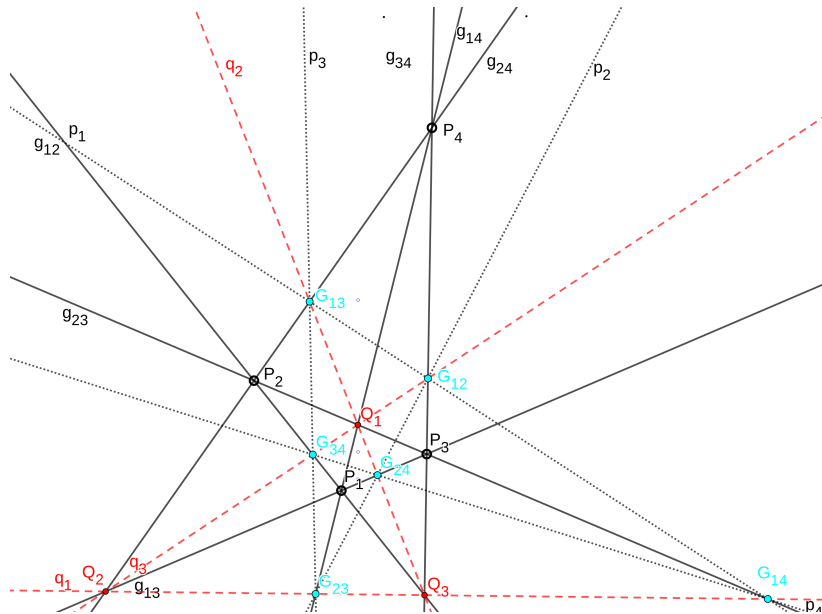


Abbildung 8: HGF

4.1 P_4 ist Zentrum

In der Abb. 8 erkennt man, dass mit $P_4 = Z$ folgende 9 Dreiecke verbunden sind, von denen jeweils zwei durch P_4 zentriert werden können (unter jedem Punkt steht jeweils die gegenüberliegende Seite):

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_1P_2P_3$	$Q_1Q_2Q_3$	$G_{23}G_{13}G_{12}$	$P_1Q_2Q_3$	$Q_1P_2Q_3$	$Q_1Q_2P_3$	$Q_1G_{13}G_{12}$	$G_{23}Q_2G_{12}$	$G_{23}G_{13}Q_3$
$g_{23}g_{13}g_{12}$	$q_1q_2q_3$	$p_1p_2p_3$	$q_1g_{12}g_{13}$	$g_{12}q_2g_{23}$	$g_{13}g_{23}q_3$	$p_1q_3q_2$	$q_3p_2q_1$	$q_2q_1p_3$

Je zwei dieser 9 Dreiecke liefern mit dem Zentrum P_4 nur dann eine Desargues-Figur mit 10 Punkten und 10 Geraden, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt enthalten. Z.B. enthält das Dreieckspaar 14 den gemeinsamen Punkt P_1 . Von den $\binom{9}{2} = 36$ möglichen Dreiecks-Paaren enthalten die folgenden vierundzwanzig Paare einen gemeinsamen Punkt:

14, 15, 16, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 37, 38, 39, 45, 46, 48, 49, 56, 57, 59, 67, 68, 78, 79, 89.

Somit verbleiben die zwölf möglichen Paare 12, 13, 17, 18, 19, 23, 34, 35, 36, 47, 58, 69. Die drei Paare 34, 35, 36 kommen ebenfalls nicht in Betracht, da die Schnittpunkte p_2g_{12} , p_1g_{12} , p_1g_{13} nicht der HGF angehören. Somit bleiben nur 9 Desargues-Figuren mit $P_4 = Z$ als Zentrum übrig. Die zu entfernenden drei Punkte und Geraden sind in den letzten beiden Zeilen der Tabelle aufgeführt. Die untereinander stehenden Punkte der beiden Dreiecke entsprechen sich jeweils, liegen also auf einer durch P_4 gehenden Geraden.

Nr.	1	2	3	4
Paare:	12	13	17	18
Dreieck 1:	$P_1P_2P_3$	$P_1P_2P_3$	$P_1P_2P_3$	$P_1P_2P_3$
Dreieck 2:	$Q_1Q_2Q_3$	$G_{23}G_{13}G_{12}$	$Q_1G_{13}G_{12}$	$G_{23}Q_2G_{12}$
Achse z:	$G_{14}G_{24}G_{34} = p_4$	$G_{14}G_{24}G_{34} = p_4$	$G_{14}Q_2Q_3 = q_1$	$Q_1G_{24}Q_3 = q_2$
Entfernt:	$G_{12}G_{13}G_{23}$	$Q_1Q_2Q_3$	$G_{23}G_{24}G_{34}$	$G_{13}G_{14}G_{34}$
Entfernt:	$p_1p_2p_3$	$q_1q_2q_3$	$p_1p_2p_3$	$p_1p_3p_4$

Nr.	5	6	7	8	9
Paare:	19	23	47	58	69
Dreieck 1:	$P_1P_2P_3$	$Q_1Q_2Q_3$	$P_1Q_2Q_3$	$Q_1P_2Q_3$	$Q_1Q_2P_3$
Dreieck 2:	$G_{23}G_{13}Q_3$	$G_{23}G_{13}G_{12}$	$Q_1G_{13}G_{12}$	$G_{23}Q_2G_{12}$	$G_{23}G_{13}Q_3$
Achse z:	$Q_1Q_2G_{34} = q_3$	$G_{14}G_{24}G_{34} = p_4$	$G_{14}G_{34}G_{24} = p_4$	$G_{34}G_{24}G_{14} = p_4$	$G_{24}G_{14}G_{34} = p_4$
Entfernt:	$G_{12}G_{14}G_{24}$	$P_1P_2P_3$	$P_2P_3G_{23}$	$P_1P_3G_{13}$	$P_1P_2G_{12}$
Entfernt:	$p_1p_2p_4$	$g_{12}g_{13}g_{23}$	$p_2p_3g_{23}$	$p_1p_3g_{13}$	$p_1p_2g_{12}$

4.2 P_1 ist Zentrum

Da die 4 Punkte P_i untereinander völlig gleichwertig sind, gibt es auch 9 Desargues-Figuren mit $P_1 = Z$ als Zentrum. Das sind zunächst die obigen 6 Figuren Nr. 1, 2, 3, 4, 5, 7, in denen P_1 und P_4 enthalten sind, in denen man ja auch insbesondere P_1 als Zentrum wählen kann. Zu diesen 6 Figuren kommen also noch 3 Figuren mit $P_1 = Z$ hinzu, in denen P_4 fehlt. Gemäß der Struktur der drei Figuren Nr. 6, 8 und 9 im vorigen Abschnitt müssen es folgende neue Figuren sein:

Nr.	10	11	12
Dreieck 1:	$Q_1Q_2Q_3$	$P_2Q_1Q_2$	$P_3Q_1Q_3$
Dreieck 2:	$G_{23}G_{24}G_{34}$	$Q_3G_{23}G_{24}$	$Q_2G_{23}G_{34}$
Achse z:	$G_{14}G_{13}G_{12} = p_1$	$G_{12}G_{13}G_{14} = p_1$	$G_{13}G_{12}G_{14} = p_1$
Entfernt:	$P_2P_3P_4$	$P_3P_4G_{34}$	$P_2P_4G_{24}$
Entfernt:	$g_{23}g_{24}g_{34}$	$p_3p_4g_{34}$	$p_2p_4g_{24}$

4.3 P_2 ist Zentrum

Analoge Überlegungen wie im vorigen Abschnitt führen zu folgenden beiden neuen Desargues-Figuren mit $P_2 = Z$:

Nr.	13	14
Dreieck 1:	$Q_1Q_2Q_3$	$P_3Q_2Q_3$
Dreieck 2:	$G_{14}G_{13}G_{34}$	$Q_1G_{13}G_{34}$
Achse z:	$G_{23}G_{24}G_{12} = p_2$	$G_{23}G_{12}G_{24} = p_2$
Entfernt:	$P_1P_3P_4$	$P_1P_4G_{14}$
Entfernt:	$g_{13}g_{14}g_{34}$	$p_1p_4g_{14}$

4.4 P_3 ist Zentrum

Da in 8 von den bisher ermittelten 14 Desargues-Figuren der Punkt P_3 enthalten ist und somit auch als Zentrum auftreten kann, gibt es nur noch eine neue Desargues-Figur mit P_3 als Zentrum, nämlich

Nr.	15
Dreieck 1:	$Q_1Q_2Q_3$
Dreieck 2:	$G_{14}G_{24}G_{12}$
Achse z:	$G_{23}G_{13}G_{34} = p_3$
Fehl-Punkte	$P_1P_2P_4$
Fehl-Geraden	$g_{12}g_{14}g_{24}$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 9. Eine HGF enthält 15 verschiedene Desargues-Figuren.

5 Polaritäten der Desargues-Figuren

Bekanntlich definiert jede Desargues-Figur eine Polarität in der Ebene. Um diese zu erkennen, hat sich folgende Bezeichnung bewährt: Es seien A_i und B_i jeweils für $i = 1, 2, 3$ die beiden durch das Zentrum Z mit den Strahlen $c_i = ZA_iB_i$ zugeordneten Dreiecke. Die Seiten von A_i seien a_i , die von B_i seien b_i in üblicher Reihenfolge. Weiterhin seien $C_i = a_ib_i$ die Punkte auf der Achse z . Dann ist die Polarität als eine involutorische Korrelation der Ebene folgendermaßen definiert:

Pol:	Z	A_i	B_i	C_i
Polare:	z	b_i	a_i	c_i

Inzidiert irgend ein Punkt der Ebene mit seiner Polaren, so ist dies noch für unendlich viele andere Punkte, die alle auf einem die Polarität erzeugenden Kegelschnitt liegen, der Fall, und man nennt die Polarität hyperbolisch. Gibt es in der ganzen Ebene kein inzidierendes Pol-Polare Paar, heißt die Polarität elliptisch.

Um bei den 15 Desargues-Figuren die Pol-Polare Beziehung leichter zu erkennen, stellen wir die Pol-Polaren Paare in Tabelle 1 zusammen:

Nr.	Zz	A_1b_1	A_2b_2	A_3b_3	B_1a_1	B_2a_2	B_3a_3	C_1c_1	C_2c_2	C_3c_3	Es fehlen:	
1	P_4p_4	P_1q_1	P_2q_2	P_3q_3	Q_1g_{23}	Q_2g_{13}	Q_3g_{12}	$G_{14}g_{14}$	$G_{24}g_{24}$	$G_{34}g_{34}$	$G_{12}G_{13}G_{23}$	$p_1p_2p_3$
2	P_4p_4	P_1p_1	P_2p_2	P_3p_3	$G_{23}g_{23}$	$G_{13}g_{13}$	$G_{12}g_{12}$	$G_{14}g_{14}$	$G_{24}g_{24}$	$G_{34}g_{34}$	$Q_1Q_2Q_3$	$q_1q_2q_3$
3	P_4q_1	P_1p_1	P_2q_3	P_3q_2	Q_1g_{23}	$G_{13}g_{13}$	$G_{12}g_{12}$	$G_{14}g_{14}$	Q_2g_{24}	Q_3g_{34}	$G_{23}G_{24}G_{34}$	$p_1p_2p_3$
4	P_4q_2	P_1q_3	P_2p_2	P_3q_1	$G_{23}g_{23}$	Q_2g_{13}	$G_{12}g_{12}$	Q_1g_{14}	$G_{24}g_{24}$	Q_3g_{34}	$G_{13}G_{14}G_{34}$	$p_1p_3p_4$
5	P_4q_3	P_1q_2	P_2q_1	P_3p_3	$G_{23}g_{23}$	$G_{13}g_{13}$	Q_3g_{12}	Q_1g_{14}	Q_2g_{24}	$G_{34}g_{34}$	$G_{12}G_{14}G_{24}$	$p_1p_2p_4$
6	P_4p_4	Q_1p_1	Q_2p_2	Q_3p_3	$G_{23}q_1$	$G_{13}q_2$	$G_{12}q_3$	$G_{14}g_{14}$	$G_{24}g_{24}$	$G_{34}g_{34}$	$P_1P_2P_3$	$g_{12}g_{13}g_{23}$
7	P_4p_4	P_1p_1	Q_2q_3	Q_3q_2	Q_1q_1	$G_{13}g_{12}$	$G_{12}g_{13}$	$G_{14}g_{14}$	$G_{34}g_{24}$	$G_{24}g_{34}$	$P_2P_3G_{23}$	$g_{23}p_2p_3$
8	P_4p_4	Q_1q_3	P_2p_2	Q_3q_1	$G_{23}g_{12}$	Q_2q_2	$G_{12}g_{23}$	$G_{34}g_{14}$	$G_{24}g_{24}$	$G_{14}g_{34}$	$P_1P_3G_{13}$	$p_1p_3g_{13}$
9	P_4p_4	Q_1q_2	Q_2q_1	P_3p_3	$G_{23}g_{13}$	$G_{13}g_{23}$	Q_3q_3	$G_{24}g_{14}$	$G_{14}g_{24}$	$G_{34}g_{34}$	$P_1P_2G_{12}$	$p_1p_2g_{12}$
10	P_1p_1	Q_1p_4	Q_2p_2	Q_3p_3	$G_{23}q_1$	$G_{24}q_2$	$G_{34}q_3$	$G_{14}g_{14}$	$G_{13}g_{13}$	$G_{12}g_{12}$	$P_2P_3P_4$	$g_{23}g_{24}g_{34}$
11	P_1p_1	P_2p_2	Q_1q_2	Q_2q_1	Q_3q_3	$G_{23}g_{24}$	$G_{24}g_{23}$	$G_{13}g_{12}$	$G_{12}g_{14}$	$G_{14}g_{13}$	$P_3P_4G_{34}$	$p_3p_4g_{34}$
12	P_1p_1	P_3p_3	Q_1q_3	Q_3q_1	Q_2q_2	$G_{23}g_{34}$	$G_{34}g_{23}$	$G_{13}g_{13}$	$G_{12}g_{14}$	$G_{14}g_{12}$	$P_4P_2G_{24}$	$p_2p_4g_{24}$
13	P_2p_2	Q_1p_3	Q_2p_4	Q_3p_1	$G_{14}q_1$	$G_{13}q_2$	$G_{34}q_3$	$G_{23}g_{23}$	$G_{24}g_{24}$	$G_{12}g_{12}$	$P_1P_3P_4$	$g_{13}g_{14}g_{34}$
14	P_2p_2	P_3p_3	Q_2q_3	Q_3q_2	Q_1q_1	$G_{13}g_{34}$	$G_{34}g_{13}$	$G_{23}g_{23}$	$G_{12}g_{24}$	$G_{24}g_{12}$	$P_1P_4G_{14}$	$p_1p_4g_{14}$
15	P_3p_3	Q_1p_2	Q_2p_1	Q_3p_4	$G_{14}q_1$	$G_{24}q_2$	$G_{12}q_3$	$G_{23}g_{23}$	$G_{13}g_{13}$	$G_{34}g_{34}$	$P_1P_2P_4$	$g_{12}g_{14}g_{24}$

Tabelle 1: Pol-Polare

In 14 Figuren gibt es Pol-Polare Paare, die miteinander inzidieren, wie man an Abb. 8 sieht. Die Inzidenzen sind in Tabelle 2 notiert.

1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Q_1g_{23}	Q_1g_{23}	Q_2g_{13}	Q_3g_{12}	G_{23q_1}	Q_2q_3	Q_1q_3	Q_1q_2	G_{23q_1}	Q_1q_2	Q_1q_3	G_{14q_1}	Q_2q_3	G_{14q_1}
Q_2g_{13}	Q_2g_{24}	Q_1g_{14}	Q_1g_{14}	G_{13q_2}	Q_3q_2	Q_3q_1	Q_2q_1	G_{24q_2}	Q_2q_1	Q_3q_1	G_{13q_2}	Q_3q_2	G_{24q_2}
Q_3g_{12}	Q_3g_{34}	Q_3g_{34}	Q_2g_{24}	G_{12q_3}	–	–	–	G_{34q_3}	–	–	G_{34q_3}	–	G_{34q_3}

Tabelle 2: Inzidenzen

Die durch diese Desargues-Figuren gestifteten Polaritäten sind also alle hyperbolisch. Ihre Kegelschnitte sind schon durch zwei Punkte mit ihren Tangenten und einem dritten Punkt oder einer dritten Tangente eindeutig bestimmt. Dies ist der Fall bei den Figuren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 13, 15 (siehe Tabelle 2). Die punktweise Konstruktion der Kegelschnitte gelingt durch Strahlenbüschel in den Berührungspunkten und dem Tangentenschnittpunkt, sowie durch die zwei Sekanten, die den dritten Punkt mit den Berührungspunkten verbinden.³

Sind nur zwei Punkte mit ihren Tangenten gegeben (Figuren 7, 8, 9, 11, 12, 14), kann der Kegelschnitt noch durch ein weiteres Pol-Polare Paar (aus Tabelle 1) festgelegt werden. Wie man ihn dann konstruieren kann, ist ein interessantes Problem.

Um zu entscheiden, ob die durch Figur 2 definierte Polarität hyperbolisch oder elliptisch ist, wenden wir ein Verfahren von COXETER an.⁴ Wir betrachten das Dreieck aus den Punkten P_4 , G_{14} und dem nicht zur HGF gehörenden Schnittpunkt $p_{4g_{14}} = S$, es ist selbstpolar. Die Gerade p_3 verläuft ganz außerhalb dieses Polardreiecks, der Pol P_3 von p_3 liegt aber innerhalb des Polardreiecks, also ist die Polarität dieser Desargues-Figur elliptisch.

Bemerkung 3. Mit jeder HGF sind nach Satz 1 drei Kegelschnitte verbunden. Jeder dieser Kegelschnitte definiert eine Polarität in der Ebene und damit auch in der HGF mit der Eigenschaft, dass die Polare eines der 13 Punkte der HGF auch eine der 13 Geraden der HGF ist (Satz 8). Vierzehn in der HGF enthaltene Desargues-Figuren definieren ebenfalls eine hyperbolische Polarität und damit jeweils einen Kegelschnitt. Aber nur bei den Figuren 2, 7, 8, 9, 11, 12, 14 sind die Polaren der fehlenden drei Punkte auch die fehlenden drei Geraden (siehe die letzten beiden Spalten der Tabelle 1).

Bemerkung 4. Es fällt auf, dass bei 14 Desargues-Figuren einer HGF immer alle Punkte Q_i und Geraden q_i des Nebendreiecks enthalten sind, während die Figur Nr. 2 keines dieser Elemente enthält.⁵ In der Tat nimmt das Nebendreieck Q_i mit den Seiten q_i eine zentrale Stellung in der HGF ein und die Q_i und q_i sind die einzigen der 13 Punkte und Geraden mit folgender Eigenschaft:

Jeder Punkt Q_i ist Träger von vier Geraden der HGF, die ihrerseits *alle* Träger von vier Punkten sind.

Jede Gerade q_i ist Träger von vier Punkten der HGF, die ihrerseits *alle* Träger von vier Geraden sind.

³siehe z.B. Baum: *Projektive Erzeugung der Kegelschnitte*, in *Mathematikthemen für die 11. Klasse*, Kassel 2019

⁴H.S.M. Coxeter: *Reelle projektive Geometrie der Ebene*, München 1955, S. 73

⁵Hinweis von Alexander Stolzenburg