

Die harmonische 13er-Figur

auch

Harmonische Grundfigur

oder

Harmonische Fundamentalstruktur

Alexander Stolzenburg

Manches ist in ähnlicher Form schon in. meinem Buch „Projektive Geometrie“ von 2009
enthalten, einiges Weitere ist für die 2. Auflage vorgesehen.

Die harmonische 13er-Figur

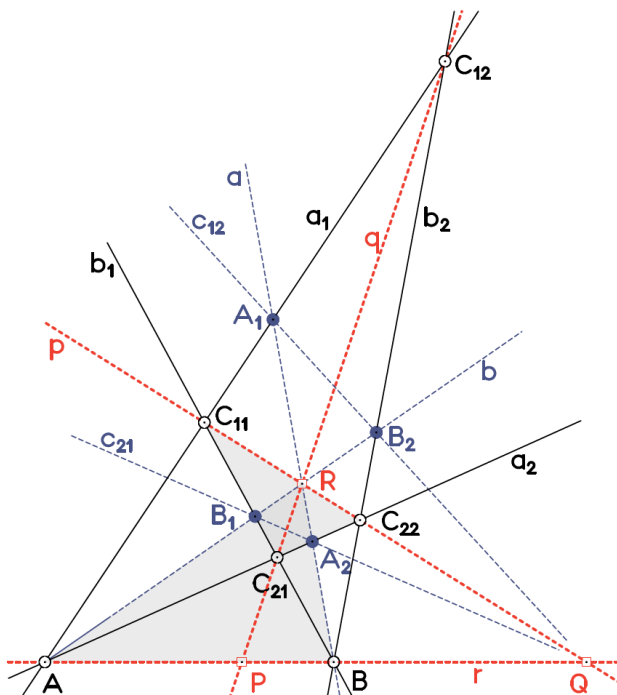
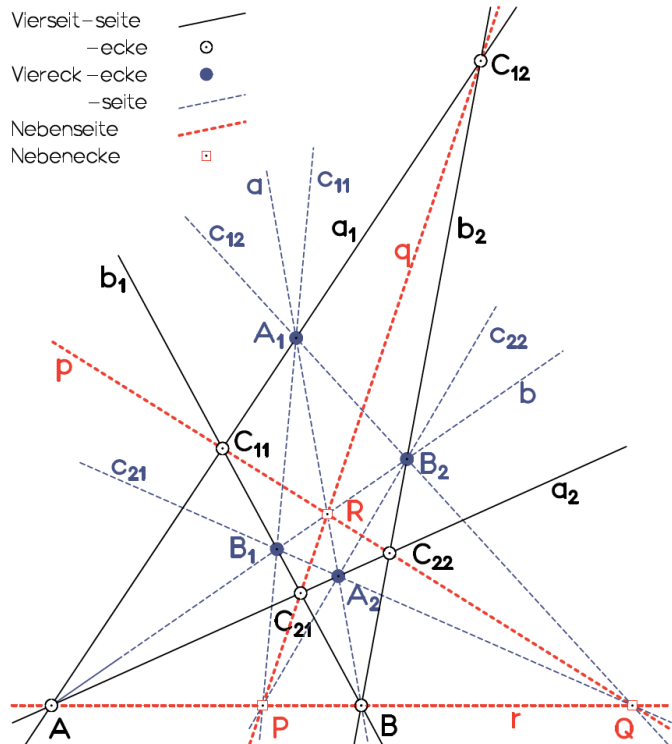
Die harmonische 13er-Figur besteht aus einem vollständigen Vierseit und einem vollständigen Viereck mit einem gemeinsamen Nebendreieit. Sie besteht somit aus

- einem vollständigen Vierseit mit 4 Seiten und 6 Ecken,
- einem vollständigen Viereck mit 6 Seiten und 4 Ecken,
- einem gemeinsamen Nebendreieit/-dreieck mit 3 Seiten und 3 Ecken,

also insgesamt 13 Punkten und 13 Geraden, woher sie auch ihren Namen hat. Oft heißt sie auch „harmonische Fundamentalstruktur“ oder „harmonische Grundfigur“ o.ä.

Zur Konstruktion beginnen wir mit einem vollständigen Vierseit und ermitteln dann ein vollständiges Viereck mit demselben Nebendreieit. Es seien $a_1 a_2 b_1 b_2$ die vier Seiten und $A = a_1 \cdot a_2$, $B = b_1 \cdot b_2$ und weiter $C_{ik} = a_i \cdot b_k$ ($i, k = 1, 2$) die sechs Ecken. Die Nebenseiten sind dann $p = \overline{C_{11}C_{22}}$, $q = \overline{C_{12}C_{21}}$ und $r = \overline{AB}$ und die Nebenecken $P = q \cdot r$, $Q = p \cdot r$, $R = p \cdot q$.

Das vollständige Vierseit ist fertig, und wir beginnen mit dem Ausbau zur 13er-Figur, indem wir R mit A und B durch die „erzeugenden“ Geraden b und a verbinden. Sie ergeben die vier Ecken des Vierecks $A_i = a \cdot a_i$, $B_i = b \cdot b_i$ ($i = 1, 2$). Dabei inzidieren die Seiten des Vierseits und die Ecken des Vierecks.



Dass die „ergänzenden“ Geraden $c_{ik} = \overline{A_i B_k}$ sich wirklich in P und Q treffen, kann mit dem Satz von DESARGUES bewiesen werden: Die Dreiecke $C_{11}C_{22}C_{21}$ und ABR sind zentral-perspektiv mit Zentrum C_{12} , also auch axial-perspektiv, und die Achse geht durch A_2 , B_1 und Q , denn die entsprechenden Seiten $\overline{C_{11}C_{22}} = p$ und $\overline{AB} = r$ treffen sich in Q (nach Konstruktion), ebenso $\overline{C_{11}C_{21}} = b_1$ und $\overline{AR} = b$ in B_1 sowie $\overline{C_{22}C_{21}} = a_2$, $\overline{BR} = a$ in A_2 . $\overline{A_2 B_1} = c_{21}$ geht also wirklich durch Q . Genauso folgt aus den Dreiecken $C_{11}C_{22}C_{21}$ und $C_{11}C_{22}C_{12}$, dass auch c_{12} durch Q geht. Und analog, dass c_{11} und c_{22} durch P gehen (s. Zeichng. oben). Die A_i und B_i bilden ein Viereck mit den Seiten a, b, c_{ik} ($i, k = 1, 2$); diese treffen sich außerdem noch in P, Q und R – und damit ist das Nebendreieck des Vierecks dasselbe wie das des Vierseits.

Damit haben wir den Aufbau der harmonischen 13er-Figur komplett geleistet, und wir können nun ihre Eigenschaften untersuchen. Diese bestehen vor allem in einer Fülle von harmonischen Lagebeziehungen. Außerdem ist die Figur vollständig dual zu sich selbst.

Weiterhin können wir die Viereckseiten, die durch zwei Nebenecken gehen, (c_{11} , c_{22} durch P bzw. c_{12} , c_{21} durch Q) auffassen als die Seiten eines weiteren Vierseits mit den Ecken $PQA_1A_2B_1B_2$ und dem Nebendreieck abt. Die beiden ursprünglichen Viereckseiten a, b sind offenbar dessen Nebenseiten. Sie gehen durch zwei Ecken (A, B) dieses Vierseits. Das heißt: Zwei Ecken (P, Q) des neuen Vierseits sind Nebenecken des ursprünglichen und die Nebenecken (A, B) des neuen sind Ecken des alten Vierseits. Und damit haben wir endlich gezeigt, dass die beiden Punktpaare (A, B) und (P, Q) gleichberechtigt sind: es kommt nicht darauf an, welches aus Ecken und welches aus Nebenecken besteht. Welches der beiden Vierseite $a_1a_2b_1b_2$ oder $c_{11}c_{22}c_{12}c_{21}$ man nimmt, ist ja für die harmonische Lage der vier Punkte ohne Bedeutung.

Harmonische Punktwürfe liegen in den drei Seiten des Nebendreiecks und in den vier Seiten des Vierseits.

Man betrachte die harmonischen Punkte in einer Nebenseite und bilde ihren Schein aus der gegenüberliegenden Nebenecke; dieser besteht offenbar aus zwei Viereckseiten und zwei Nebenseiten, also aus harmonischen Geradenpaaren. Dieser Schein wird weiter von den Viereckseiten in harmonischen Punktpaaren geschnitten.

Von zwei harmonischen Punktpaaren kann man eines als Paar von Nebenecken auffassen; für den Aufbau einer harmonischen 13er-Figur daraus kann eine dritte Nebenecke beliebig gewählt werden.

Das heißt: Werden vier in einer Geraden liegende harmonische Punkte verbunden mit einem außerhalb dieser Geraden liegenden Punkt, so entsteht in diesem Punkt ein harmonischer Geradenwurf.

Oder: Der Schein eines harmonischen Punktwurfs ist ein harmonischer Geradenwurf.

Harmonische Geradenwürfe gehen durch die drei Ecken des Nebendreiecks und in den vier Ecken des Vierecks.

Man betrachte die harmonischen Geraden durch eine Nebenecke und bilde ihren Schnitt mit der gegenüberliegenden Nebenseite; dieser besteht offenbar aus zwei Vierseitecken und zwei Nebenecken, also aus harmonischen Punktpaaren. Der Schein dieser Punktpaare aus den Viereckecken besteht aus harmonischen Geradenpaaren.

Von zwei harmonischen Geradenpaaren kann man eines als Paar von Nebenseiten auffassen; für den Aufbau einer harmonischen 13er-Figur daraus kann eine dritte Nebenseite beliebig gewählt werden.

Das heißt: Werden vier durch einen Punkt gehende harmonische Geraden geschnitten von einer nicht durch diesen gehenden Geraden, so entsteht in dieser Geraden ein harmonischer Punktwurf.

Oder: Der Schnitt eines harmonischen Geradenwurfs ist ein harmonischer Punktwurf.

Alle diese Überlegungen werden zusammengefasst in dem einen sehr wichtigen

Satz: Die harmonische Lage ist eine projektive Invariante.

Man kann also schneiden und verbinden, soviel man will – einmal harmonisch heißt: immer harmonisch.

Verschiedene Lesarten der harmonischen 13er-Figur

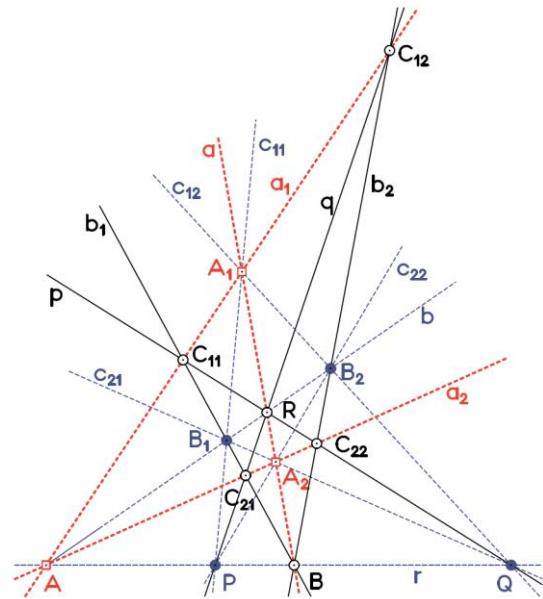
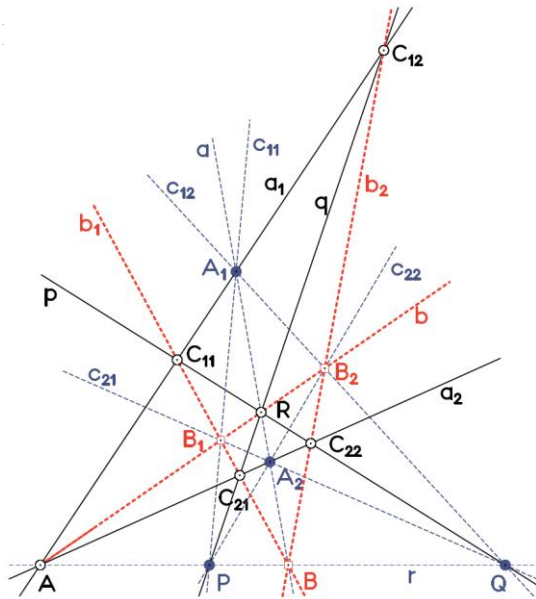
Die ursprünglichen Vierseiteiten sind hier die a_i , b_i ($i = 1, 2$). Es stellt sich die Frage, ob auch andere Geraden diese Rolle übernehmen können. Dabei ist zu bemerken, dass man die a's mit den b's vertauschen kann und unabhängig davon die Indizes 1 und 2, ohne dass sich an den Inzidenzen irgendetwas verändert. R und r haben allerdings eine Sonderrolle, denn die gegebene

nen Punkte A, B lagen auf r und die erzeugenden Geraden a, b sind von R aus an die Punkte A, B gezogen worden. Man hätte auch von P aus erzeugende Geraden nach C_{11} und C_{22} ziehen können oder von Q aus nach C_{12} und C_{21} , hätte dann auch harmonische 13er-Figuren erhalten, aber andere. Also können p und q nur gemeinsam auftreten oder garnicht. Die c_{ik} kommen nicht in Frage, weil sie nur drei Punkte tragen, die Vierseiteiten aber vier haben müssen: zwei Ecken des Vierseits, eine des Vierecks und eine Nebenecke.

Das sind außer dem Vierseit $a_1a_2b_1b_2$ (s.o.) noch a_1a_2pq und wegen der Vertauschbarkeit der a 's und b 's auch b_1b_2pq :

Vierseit mit den Seiten: a_1a_2pq .
 Viereck mit den Ecken: A_1A_2PQ .
 Nebendreieit / -eck: b_1b_2b / B_1B_2B

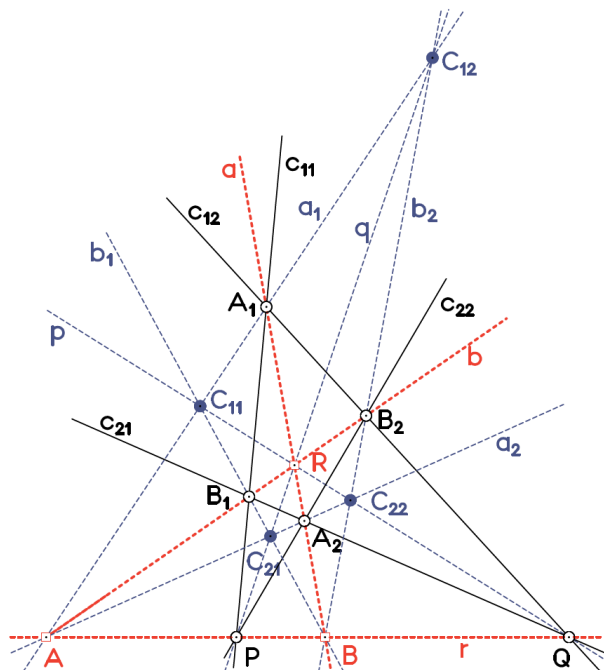
Vierseit mit den Seiten: b_1b_2pq .
 Viereck mit den Ecken: B_1B_2PQ .
 Nebendreieit / -seit: A_1A_2A / a_1a_2a



Die andere Möglichkeit besteht darin, die in der ersten Konstruktion ergänzenden Geraden c_{ik} , also die vier Geraden mit nur drei Punkten, als die Seiten eines Vierseits zu betrachten. Es zeigt sich, dass sich trotz anderer Deutungen wieder eine harmonische 13er-Figur innerhalb derselben Punkte und Geraden ergibt, bei der aber die Ecken des Vierecks und die Seiten des Vierseits nicht inzidieren.

Wir wählen in derselben Figur $c_{11}c_{12}c_{21}c_{22}$ als das zugrundeliegende Vierseit. Seine Ecken sind dann $A_1A_2B_1B_2PQ$, das Nebendreieit ist abr , das Nebendreieck ABR .

Nun werden alle Nebenecken mit den noch freien Ecken verbunden durch $\overline{AA_1} = a_1$, $\overline{AA_2} = a_2$, $\overline{BB_1} = b_1$, $\overline{BB_2} = b_2$, $\overline{RP} = q$ und $\overline{RQ} = p$. Diese sechs Geraden treffen sich zu je dreien in vier neuen Punkten C_{ik} ($i, k = 1, 2$): nämlich a_1, b_1, p in C_{11} ; a_1, b_2, q in C_{12} ; a_2, b_1, q in C_{21} und a_2, b_2, p in C_{22} . Die Seiten des damit gewonnenen Vierecks $C_{11}C_{12}C_{21}C_{22}$ sind dann natürlich $a_1a_2b_1b_2pq$. Sie haben in ABR noch drei weitere Punkte gemeinsam, welche das Nebendreieck bilden – wieder dasselbe.



Der in der folgenden Zeichnung angedeutete Zusammenhang mit der Polarität bezüglich eines Kegelschnitts wird später dargestellt. Jetzt nur so viel: Alle bis auf Groß- oder Kleinschreibung gleich benannten Elemente sind zueinander polar, d.h. sind Pol und Polare bezüglich des Kegelschnitts.

Hier dieselbe Figur mit anderen Bezeichnungen, die für die folgenden Überlegungen besser geeignet sind.

Vierseit

Seiten $g_1 g_2 g_3 g_4$

Ecken $H_{12} H_{34} H_{13} H_{24} H_{14} H_{23}$

mit $H_{ik} = g_i \cdot g_k$

Nebenseiten $p_1 p_2 p_3$

Nebenecken $P_1 P_2 P_3$

Damit verwobenes Viereck

Ecken $G_1 G_2 G_3 G_4$

mit $G_i = h_j \cdot h_k \cdot h_l$

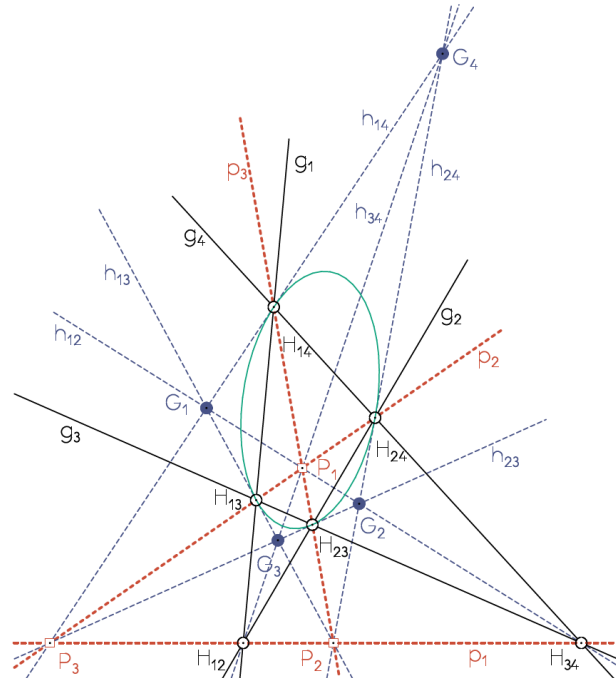
Seiten $h_{12} h_{34} h_{13} h_{24} h_{14} h_{23}$

mit $h_{ik} = \overline{G_i G_k}$

Nebenecken $P_1 P_2 P_3$

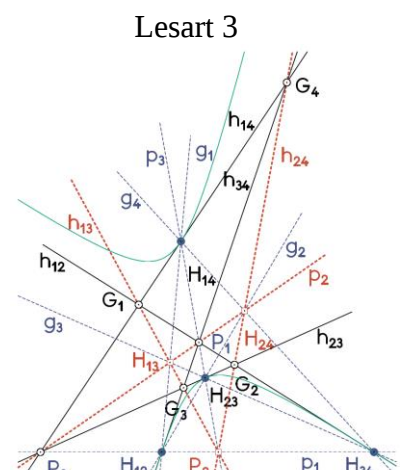
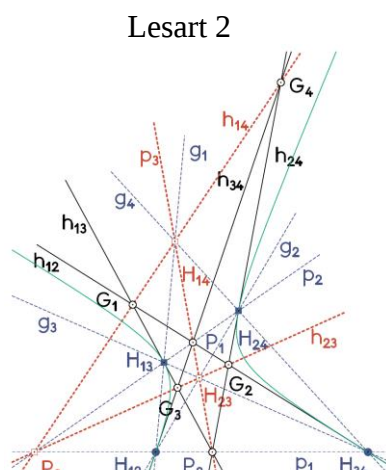
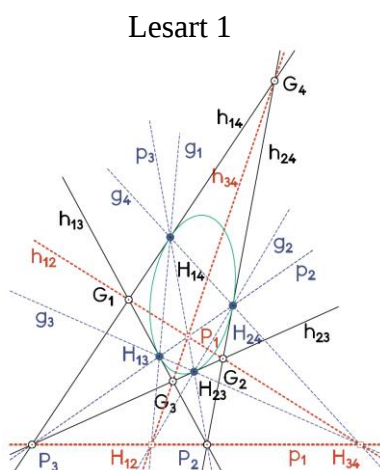
Nebenseiten $p_1 p_2 p_3$

Die Ecken des Vierecks und die Seiten des Vierseits inzidieren nicht – anders als bei den erstgenannten drei Lesarten.



Mit den neuen Bezeichnungen gilt für die ersten drei Lesarten:

	Lesart 1	Lesart 2	Lesart 3	Lesart 0
<u>Vierseit:</u>				
Seiten	$h_{13} h_{24} h_{14} h_{23}$	$h_{12} h_{34} h_{14} h_{23}$	$h_{12} h_{34} h_{13} h_{24}$	$g_1 g_2 g_3 g_4$
Ecken	$P_2 P_3 G_1 G_2 G_3 G_4$	$P_1 P_3 G_1 G_2 G_3 G_4$	$P_1 P_2 G_1 G_2 G_3 G_4$	$H_{12} H_{34} H_{13} H_{24} H_{14} H_{23}$
Nebenseiten	$h_{12} h_{34} p_1$	$h_{13} h_{24} p_2$	$h_{14} h_{23} p_3$	$p_1 p_2 p_3$
Nebenecken	$H_{12} H_{34} P_1$	$H_{13} H_{24} P_2$	$H_{14} H_{23} P_3$	$P_1 P_2 P_3$
<u>Verwobenes Viereck:</u>				
Ecken	$H_{13} H_{24} H_{14} H_{23}$	$H_{12} H_{34} H_{14} H_{23}$	$H_{12} H_{34} H_{13} H_{24}$	$G_1 G_2 G_3 G_4$
Seiten	$p_2 p_3 g_1 g_2 g_3 g_4$	$p_1 p_3 g_1 g_2 g_3 g_4$	$p_1 p_2 g_1 g_2 g_3 g_4$	$h_{12} h_{34} h_{13} h_{24} h_{14} h_{23}$
Nebenecken	$H_{12} H_{34} P_1$	$H_{13} H_{24} P_2$	$H_{14} H_{23} P_3$	$P_1 P_2 P_3$
Nebenseiten	$h_{12} h_{34} p_1$	$h_{13} h_{24} p_2$	$h_{14} h_{23} p_3$	$p_1 p_2 p_3$



Natürlich kann man genauso gut mit dem Viereck beginnen und dann das damit verwobene Vierseit aufsuchen. Auf die Kegelschnitte gehen wir später ein.

Die Sonderrolle von R und r reduziert sich auf eine Ausnahme bei den Inzidenzen von H_{ik} und h_{ik} : diese gilt nicht für $i, k=3,4$; dafür inzidiert nun H_{34} mit h_{12} und H_{12} mit h_{34} .

Man kann die Notation noch weiter vereinheitlichen, wenn man denn Spaß daran hat: Dazu ist es dienlich die Indizes $1 \dots 4$ passend zu gruppieren: Zu einem Paar (i) von Indizes besteht das komplementäre Paar $\neg(i)$ aus denjenigen Indizes, die im Paar (i) nicht vorkommen; wir nummerieren die Paare mit $(1) := \{1,2\}$, also $\neg(1) = \{3,4\}$, $(2) := \{1,3\}$ und $(3) := \{1,4\}$. Die Reihenfolge innerhalb eines Paares ist gleichgültig und natürlich gilt $\neg(\neg(k)) = (k)$.

Für Lesart i ($i = 1, 2$ oder 3) geht man aus von den Seiten h_{ik} (bzw. den Ecken H_{ik}), die die Paare (i) , $\neg(i)$ nicht als Indizes enthalten; für die Lesart 0 beginnt man mit den Seiten g_i bzw. den Ecken G_i , $i = 1 \dots 4$.

Damit sind in der k -ten Lesart – wobei im Folgenden i, j alle Werte $\neq k$ durchlaufen – die Seiten $h_{(i)}h_{\neg(i)}$ $h_{(j)}h_{\neg(j)}$, die Ecken P_iP_j $G_1G_2G_3G_4$, die Nebenseiten $h_{(k)}h_{\neg(k)}p_k$, die Nebenecken $H_{(k)}H_{\neg(k)}$ P_k , die Ecken des verwobenen Vierecks $H_{(i)}H_{\neg(i)}$ $H_{(j)}H_{\neg(j)}$, seine Seiten $p_i p_j$ $g_1 g_2 g_3 g_4$ und die Nebenecken $H_{(k)}H_{\neg(k)}P_k$.

Diese Paarbildung ist zwingend, sonst wären die vier Seiten des Vierseits aus vier Geraden h_{ik} nicht mehr in allgemeiner Lage: es gingen drei Seiten durch einen Punkt.

Wir wissen schon $H_{ik} = g_i \cdot g_k$ und $h_{ik} = \overline{G_i G_k}$. Außerdem gilt: in G_k treffen sich alle drei Geraden h_{ij} mit $i, j \neq k$ und sonst keine, in g_k liegen die drei Punkte H_{ij} mit $i, j \neq k$ und sonst keine.

H_{ik} und h_{ik} inzidieren – mit Ausnahme der Paare (1) und $\neg(1)$: $H_{(1)}$ inzidiert mit $h_{\neg(1)}$. Ausnahmslos aber gilt: $H_{(i)}$ und $h_{(i)}$ sind polar bezüglich des oben angedeuteten Kegelschnitts.

Die Nebenseiten p_k gehen durch $H_{(k)}$ und $H_{\neg(k)}$, außerdem durch P_i , P_j , $i, j \neq k$. Durch die Nebenecken gehen $h_{(i)}$ und $h_{\neg(i)}$, außerdem p_i , p_j , $i, j \neq k$.

Dies sind die einzig möglichen Lesarten

Ein System von 13 Punkten und 13 Geraden ist dann eine harmonische 13er-Figur, wenn in vier der Geraden je drei Punkte und in neun Geraden je vier Punkte liegen und wenn weiter durch vier der Punkte drei Geraden gehen und durch neun Punkte vier Geraden. Das System kann dann immer in den angegebenen Lesarten gedeutet werden.

Beweis: (Er geht auf Herrn Peter Baum (Kassel) zurück, der auch zu den Lesarten entscheidend beigetragen hat.

Für eine harmonische 13er-Figur sind 5 Bedingungen notwendig zu erfüllen:

- (1) Keine drei der vier Seiten gehen durch einen Punkt.
- (2) Die sechs Schnittpunkte der vier Seiten gehören zu der Figur.
- (3) Das Nebendreieck gehört zur Figur.
- (4) Das Nebendreieck gehört zur Figur.
- (5) Durch jede Nebenecke gehen außer zwei Nebenseiten zwei weitere Geraden der Figur.

Wir stützen uns im Folgenden auf eine der letzten Zeichnungen (deren Bezeichnungen sind identisch). Für die Versuche die Figur zu verifizieren, kommen in Betracht: Die 4 g -Geraden, die 6 h -Geraden und die 3 p -Geraden.

Fall 1: Werden vier der sechs h-Geraden gewählt, dann muss zu jedem vorkommenden Index-paar auch das komplementäre dabei sein, sodass insgesamt jeder Index zweimal vorkommt. Das führt zu den angegebenen Beispielen einer harmonischen 13er-Figur mit Inzidenz von Ecken und Seiten (Lesarten 1 – 3). Hält man das nicht ein, so kommt ein Index dreimal vor und die zugehörigen drei Geraden gingen durch einen Punkt – ein Verstoß gegen (1).

Die weiteren Fälle werden nach abnehmender Anzahl von g-Geraden geordnet:

Fall 2: Für die Wahl von allen vier g-Geraden als Seiten des Vierseits erhält man die harmonische 13er-Figur, bei der die Ecken und Seiten nicht inzidieren.

Fall 3: Bei der Wahl von genau drei g-Geraden, etwa $g_1g_2g_3$, müsste die vierte Gerade durch einen Punkt gehen, der auch auf g_1 liegt, weil dort eine Ecke des Vierseits liegen muss. Auf g_1 liegen nur H_{12} , H_{13} und H_{14} . Durch H_{12} geht schon g_2 und durch H_{13} schon g_3 , also kommen Geraden durch H_{12} oder H_{13} wegen (1) nicht in Frage. Durch H_{14} gehen nur noch p_3 und h_{14} (g_4 ist in diesem Fall ausgeschlossen). Mit p_3 hätte man in H_{23} einen Verstoß gegen (1), mit h_{14} einen zu (2), weil h_{14} und g_3 keinen Schnittpunkt innerhalb der Figur besitzen.

Fall 4: Wählt man genau zwei g-Geraden, etwa g_1 und g_2 , kann dazu keine h-Gerade kommen, denn eine h-Gerade müsste g_1 in einem Punkt der Figur schneiden, d.h. in H_{12} , H_{13} oder H_{14} .

Fall 4a: Durch H_{12} gehen aber schon g_1 und g_2 : (1) steht dem entgegen.

Fall 4b: Durch H_{13} gehen noch h_{13} und p_2 , aber beide zugleich sind nicht möglich wegen (1). Mit h_{13} ergibt sich innerhalb der Figur kein Schnittpunkt von h_{13} und g_2 im Widerspruch zu (2). p_2 legt schon mal drei Ecken fest: $g_1 \cdot g_2 = H_{12}$, $g_1 \cdot p_2 = H_{13}$, $g_2 \cdot p_2 = H_{24}$. Als vierte Seite benötigt man eine Gerade der Figur, die alle schon gewählten Seiten g_1 , g_2 , p_2 in genau einem Punkt der Figur schneidet und außerdem durch keinen der schon vorhandenen Ecken geht. Das tun h_{14} , h_{23} und p_3 . Jetzt müssen die Ecken und dann die Nebenseiten der drei Vierseite $g_1g_2p_2h_{14}$, $g_1g_2p_2h_{23}$, $g_1g_2p_2p_3$ untersucht werden: Für das erste fehlt die Ecke $p_2 \cdot h_{14}$, für das zweite $g_1 \cdot h_{23}$. (3) ist also nicht erfüllt. Es verbleibt $g_1g_2p_2p_3$ mit den Ecken $H_{12}H_{13}H_{14}H_{23}H_{24}P_1$ und den Nebenseiten $h_{34} = \overline{H_{12}P_1}$, $g_3 = \overline{H_{13}H_{23}}$, $g_4 = \overline{H_{14}H_{24}}$, wobei die Nebenecken $g_3 \cdot h_{34}$ und $g_4 \cdot h_{34}$ nicht existieren, entgegen (4).

Fall 4c: Analog zu Fall 4b: Durch H_{14} sind h_{14} oder p_3 möglich. h_{14} liefert keine Ecke. p_3 ergibt die drei Ecken H_{12} , H_{14} , H_{23} . Als vierte Seite (durch keine der drei Ecken, jede Seite schneidend) kommen hier nur h_{13} , h_{24} , p_2 in Frage. Zu untersuchen sind die Vierseite $g_1g_2p_3h_{24}$, $g_1g_2p_3h_{13}$, $g_1g_2p_3p_2$. Dem ersten fehlen die Ecken $g_3 \cdot h_{24}$, dem zweiten $g_2 \cdot h_{13}$. Das dritte wurde unter Fall 4b schon abgehandelt.

Fall 5: Bei nur genau einer g-Geraden, etwa g_1 , muss durch jeden der drei Punkte H_{12} , H_{13} , H_{14} auf g_1 eine weitere Seite gehen. Zur Auswahl stehen die drei h-Geraden h_{34} , h_{13} , h_{14} sowie die drei p-Geraden p_1 , p_2 , p_3 .

Die Wahl von zwei h-Geraden, etwa h_{34} , h_{13} , scheitert an (3), da die Gerade durch die Ecken $G_3 = h_{34} \cdot h_{13}$ und H_{14} nicht zu der Figur gehört.

Bei der Wahl von nur einer h-Geraden, etwa h_{34} , geht diese im Widerspruch zu (1) mit den beiden noch zur Verfügung stehenden Geraden p_2 und p_3 durch einen Punkt (P_1).

Immerhin liefert die Wahl der p-Geraden das Vierseit $g_1p_1p_2p_3$ mit den Ecken $H_{12}H_{13}H_{14}P_1P_2P_3$ und den Nebenseiten $\overline{H_{12}P_1} = h_{34}$, $\overline{H_{13}P_2} = h_{13}$, $\overline{H_{14}P_3} = h_{14}$ und dann den Nebenecken $G_1G_3G_4$. Durch diese gehen aber nicht durch, wie von (5) verlangt, vier Geraden.

Dann existiert noch das damit verwobene Viereck mit den noch freien Punkten als Ecken: $H_{23}H_{24}H_{34}G_2$, und den Seiten $g_2g_3g_4, h_{23}h_{24}h_{12}$. Die Nebenecken $g_2 \cdot h_{12}$, $g_3 \cdot h_{24}$, $g_4 \cdot h_{23}$ allerdings sind in der Figur nicht enthalten; (4) ist verletzt.

Es folgen nun die Fälle ohne g-Geraden, geordnet nach abnehmender Anzahl von p-Geraden:

Fall 6: Bei drei p-Geraden bliebe als vierte Gerade, da ohne g-Gerade vorausgesetzt ist, nur eine h-Gerade. Aber von denen gehen alle durch einen P-Punkt, ist also (1) nicht erfüllt.

Fall 7: Bei zwei p-Geraden, etwa p_1 und p_2 sind noch zwei h-Geraden denkbar, nicht h_{14} und nicht h_{23} wegen Punkt P_3 und Bedingung (1), also nur noch zwei von h_{12} , h_{13} , h_{24} und h_{34} . Deren Schnittpunkte dürfen nicht auf p_1 und p_2 liegen – wieder wegen (1); das schränkt die Möglichkeiten ein auf entweder h_{12} und h_{24} oder h_{13} und h_{34} . Das Viereit $p_1p_2h_{12}h_{24}$ hat die Ecken $P_3H_{34}P_2P_1H_{24}G_2$ und die Nebenseiten h_{23} , g_4 , p_3 . Aber die Nebenecke $h_{12} \cdot g_4$ ist in der Figur nicht enthalten. Entsprechendes gilt für das Viereit $p_1p_2h_{13}h_{34}$: die Ecken sind $P_3P_2H_{12}H_{13}P_1G_3$, die Nebenseiten $h_{23}p_3g_1$, und die Nebenecke $h_{23} \cdot g_1$ ist nicht vorhanden. Beide Male ist (4) verletzt.

Fall 8: Für die Wahl von einer p-Geraden sind alle Möglichkeiten schon oben enthalten: Für außer der einen p- noch drei g-Geraden siehe Fall 3. Zwei g- und eine h-Geraden sind in Fall 4 enthalten, eine g- und zwei h-Geraden in Fall 5.

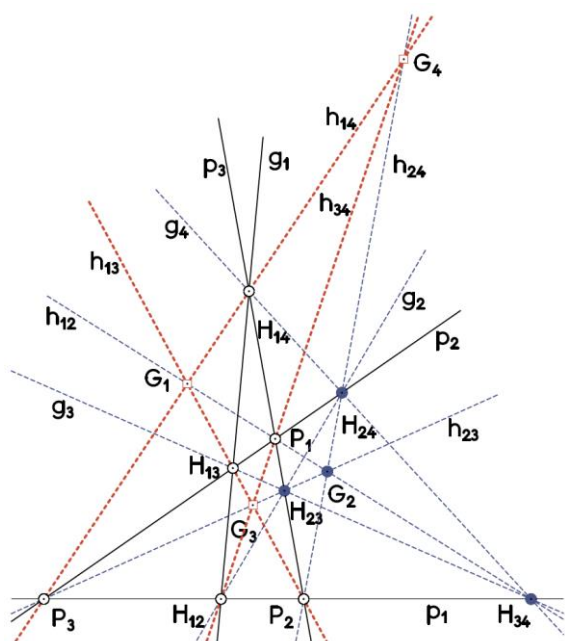
Fall 9: Keine p-Gerade heißt nur h-Geraden (siehe Fall 1) oder mindestens eine, höchstens vier g-Geraden: siehe die Fälle 5, 4, 3, 2.

Damit sind alle Möglichkeiten ausgeschöpft. Es verbleiben nur die 4 Lesarten. **qed**

Wir sind hier, wie so oft, von einem Viereit ausgegangen, hätten aber genauso gut ein Viereck als Grundlage nehmen können.

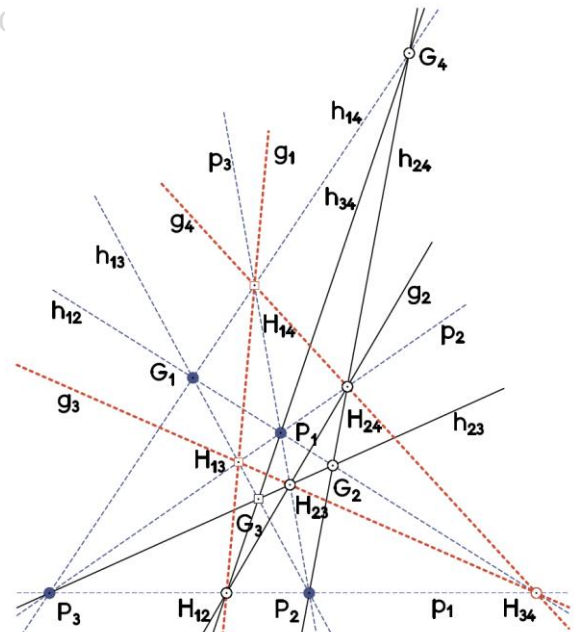
Immerhin liefert Fall 5 Beispiele, die fast erfolgreich sind:

Ausgehend von einem Viereit, z.B. mit $g_1 p_1 p_2 p_3$ findet man ein Nebendreieit / -dreieck in $h_{13}h_{14}h_{34}$, auch das damit verwobene Viereit $G_2H_{23}H_{24}H_{14}$. Dessen Nebendreieit existiert natürlich, allerdings nicht innerhalb des gegebenen Systems von Punkten und Geraden.



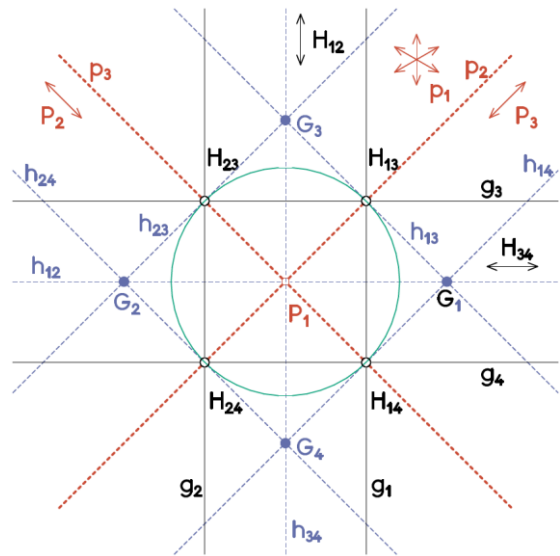
Ausgehend von einem Viereit, z.B. mit $G_1 P_1 P_2 P_3$ findet man ein Nebendreieit / -dreieck in $H_{13}H_{14}H_{34}$, auch das damit verwobene Viereit $g_2h_{23}h_{24}h_{14}$. Dessen Nebendreieit existiert natürlich, allerdings nicht innerhalb des gegebenen Systems von Punkten und Geraden.

H(



Zugang aus der Euklidischen Geometrie

Alle harmonischen 13er-Figuren sind, da man von einem Vierseit oder einem Vierseit ausgeht, gemäß dem Fundamentalsatz zueinander projektiv, weil Inzidenzen und harmonische Lagebeziehungen erhalten bleiben. Alle sind also projektiv zu der nebenstehenden 13er-Figur, bei der sich die Vierseitseiten in Fernpunkten treffen und für die eine Nebenecke ebenfalls Fernpunkt ist, (eine weitere ist es automatisch dann auch). Die Seiten bilden dann ein Parallelogramm, hier bequemerweise als Quadrat angenommen. Eine Anleihe bei der euklidischen Geometrie ergibt sofort alle Inzidenzen und die auf neun Geraden (die Ausnahmen sind die g_i mit nur drei Punkten) vorhandenen euklidischen Mittelpunkte, die ja harmonische Mitten bezüglich eines Fernpunktes sind.

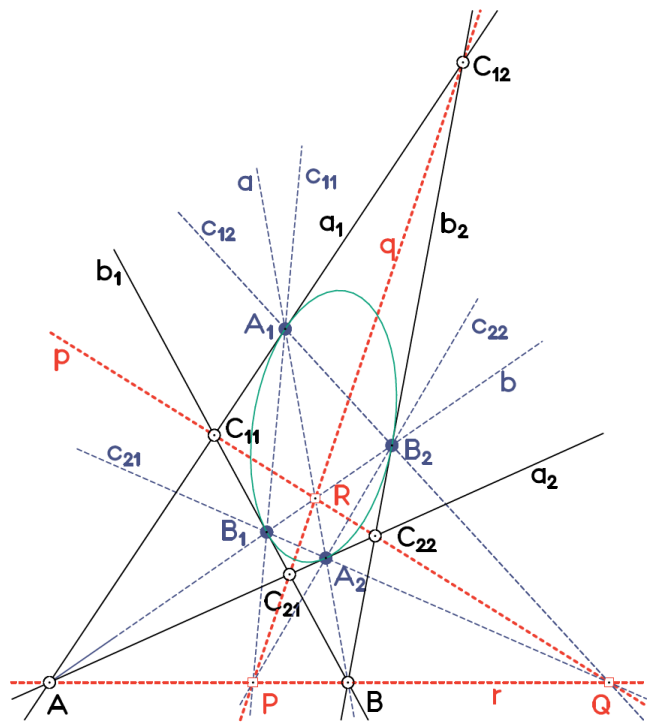


Vermittelnder Kegelschnitt als Polarisator

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass es einen Kegelschnitt k gibt, bezüglich dessen sich die vielfältigen harmonischen Lagebeziehungen der 13er-Figur in allen Einzelheiten als Pol-Polaren-Beziehungen darstellen.

Wir blicken noch einmal zurück auf die einführende Zeichnung zur harmonischen 13er-Figur und verwenden die hier besser geeignete alte Bezeichnungsweise.

Die vier Ecken $A_1A_2B_1B_2$ bestimmen ein Kegelschnittbüschel und unter den Kegelschnitten dieses Büschels gibt es genau einen, k , der eine Seite berührt, z.B. a_1 mit dem Berührungspunkt A_1 . Dass dann k auch die gegenüberliegende Seite a_2 in A_2 berührt, kann mit dem Satz von PASCAL bewiesen werden, ebenso, dass dann k auch a_3 in A_3 und a_4 in A_4 berührt.



Allgemein zur Konstruktion eines Punktes mit dem Satz von PASCAL:

Gegeben: 5 Punkte 12345. *Gesucht:* 6 = Punkt auf einer beliebigen Gerade g durch 5.

Konstruktion: $U = \overline{12} \cdot \overline{45}$, $V = \overline{23} \cdot \overline{56} = \overline{23} \cdot g$, da 6 in g liegen soll und g durch 5 geht. $z = \overline{UV}$ ist die PASCAL'sche Gerade, auf welcher auch $W = \overline{34} \cdot \overline{61} = \overline{34} \cdot z$ liegen muss. Damit ist $6 = \overline{1W} \cdot g$.

Wenn in der Nummerierung benachbarte Punkte zusammenfallen, wird als Verbindungsgerade die Tangente in diesem Punkt genommen.

Zu zeigen ist hier, dass dann auch die übrigen drei Vierseit-Seiten k in den entsprechenden Viereck-Ecken berühren.

Voraussetzung: a_1 ist Tangente von k in A_1 .

Schritt 1: Der Punkt A_2^* wird konstruiert als Punkt von k in a_2 . Wenn dann A_2^* mit A_2 zusammenfällt, ist die Gerade a_2 Tangente an den Kegelschnitt in A_2 :

$1 = B_1, 2 = 3 = A_1$ (mit $\overline{23} = a_1$), $4 = B_2, 5 = A_2, g = \overline{56}, 6 (= A_2^*)$ unbekannt in a_2 .

Damit $X = \overline{12} \cdot \overline{45} = c_{11} \cdot c_{22} = P, Y = \overline{23} \cdot \overline{56} = a_1 \cdot a_2 = A$, damit ist die PASCAL'sche Gerade $z = \overline{PA} = r$ und $Z = \overline{34} \cdot z = c_{12} \cdot r = Q$ und $A_2^* = \overline{1Z} \cdot g = c_{21} \cdot a_2 = A_2$.

Schritt 2: Auch der Berührungspunkt B_1^* von b_1 fällt mit B_1 zusammen:

$1 = 2 = A_1$ (mit $\overline{12} = a_1$), $3 = A_2, 4 = B_2, 5 = B_1, g = \overline{56} = b_1, 6 = B_1^*$ unbekannt in b_1 .

Damit $X = \overline{12} \cdot \overline{45} = a_1 \cdot b = A, Y = \overline{23} \cdot \overline{56} = a \cdot b_1 = B$, damit $z = r$ und $Z = \overline{34} \cdot z = c_{22} \cdot r = Q$ und $B_1^* = \overline{1Z} \cdot g = c_{11} \cdot b_1 = B_1$. qed

Da man die A's und B's vertauschen kann, ist auch b_2 Tangente in B_2

Nebenbei: Der Kegelschnitt k lässt sich mit dem Satz von PASCAL punktweise konstruieren aus den vier Eckpunkten und der Tangente in einem dieser Punkte.

Polar bezüglich k sind:

p und P, q und Q, r und R, a und A, b und B , sowie die a_i und A_i, b_i und B_i und die c_{ik} und C_{ik} . pqr ist ein Polardreiseit dieses Kegelschnitts und PQR ein Polardreieck.

Oder: Bezüglich k sind polar: Vierseit-Seiten und Vierseit-Ecken, Viereck-Ecken und Viereck-Seiten, Nebenseiten und Nebenecken.

Hier noch einmal der Kegelschnitt der Lesart 1 in der neuen Bezeichnungsart, passend auch zur Lesart 0.

Polar zueinander sind dann:

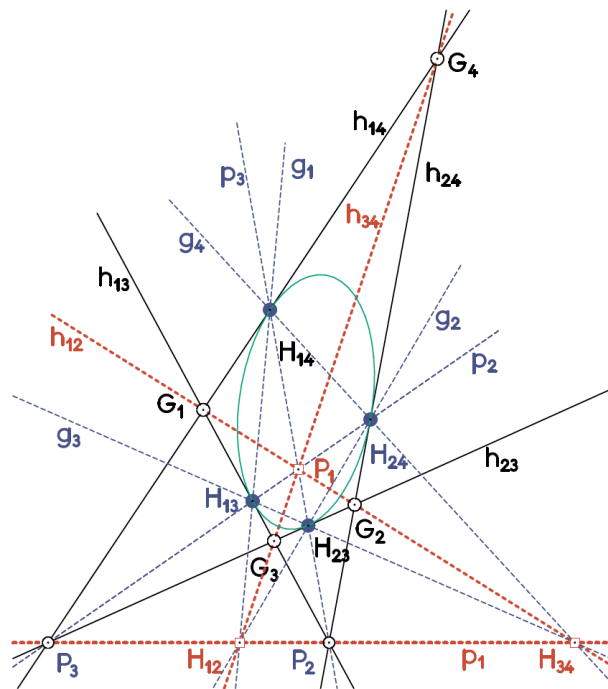
P_i und p_i

G_i und g_i ,

H_{ik} und h_{ik}

– ausnahmslos alle 13 vorkommenden Paare von Elementen.

k ist der Kernkegelschnitt der hier vorliegenden Polarität π (die ja eine involutorische Korrelation ist), d.h. der Ort der Punkte P , für die die Polare $\pi(P)$ mit P inzidiert, und er wird eingehüllt von den Geraden p , für die der Pol $\pi(p)$ mit p inzidiert.



Natürlich gehört auch zu den weiteren zwei Lesarten der 13er-Figur ein vermittelnder Kegelschnitt, jeweils ein anderer (Zeichnungen S. 5). Die verschiedenen Nebendreiecke sind Polardreiecke aller drei Kegelschnitte.

Alle drei Kegelschnitte sind auch maßgebend für die Lesart 0 – die Pol-Polare-Beziehungen hängen nur von der 13er-Figur ab.

Die Nebendreiecke der Lesarten hinwieder sind auch Polardreiecke für die drei Kegelschnitte. Polardreiecke sind auch noch weitere Dreiecke innerhalb der Figur. Beispiele in der ersten Lesart: $G_4H_{14}H_{24}$ bzw. $g_4h_{14}h_{24}$ für die Ellipse oder $H_{12}H_{34}P_1$ bzw. $h_{12}h_{34}p_1$ für die beiden Hyperbeln.

Für die 0-te Lesart (ohne Inzidenz) gelten für den Kegelschnitt der 1. Lesart die kanonischen Polaritäten $G_i - g_i$, $H_{ik} - h_{ik}$, $P_i - p_i$.

Komplizierter ist es für die 2. und 3. Lesart. Nur die Polaritäten $P_i - p_i$ gelten fort.

2. Lesart:

$G_1 - g_4$, $G_2 - g_3$, $G_3 - g_2$, $G_4 - g_1$; $H_{12} - h_{34}$, $H_{13} - h_{24}$, $H_{14} - h_{14}$, $H_{23} - h_{23}$, $H_{24} - h_{13}$, $H_{34} - h_{12}$.

3. Lesart:

$G_1 - g_3$, $G_2 - g_4$, $G_3 - g_1$, $G_4 - g_2$; $H_{12} - h_{34}$, $H_{13} - h_{13}$, $H_{14} - h_{23}$, $H_{23} - h_{14}$, $H_{24} - h_{24}$, $H_{34} - h_{12}$.

Die Begründungen sind einfach: manchmal sind die Punkte schon Berührungspunkte, oft kann man vom Punkt zwei Tangenten anlegen und hat die Polare dann in der Berührsehne, manchmal braucht man auch den Hauptsatz der Polarentheorie, z.B. für H_{13} in der 2. Lesart: $H_{13} = g_1 \cdot g_3$; polar zu g_1, g_3 sind G_4, G_2 , also ist $\overline{G_4 G_2} = h_{24}$ die Polare vom H_{13} .

Oben (S, 5) waren zwei der drei vermittelnden Kegelschnitte Hyperbeln, einer eine Ellipse. Die Frage ist naheliegend, ob das immer so ist.

Für endliche Punkte G_i kommt es dabei darauf an, ob sie in Viereckslage oder Dreieckslage sind (wenn Fernpunkte beteiligt sind, ist die Unterscheidung in Vierecks- oder Dreieckslage ja sinnlos).

Drei Punkte bestimmen durch ihre Verbindungsgeraden vier dreiseitig begrenzte Gebiete; eines von ihnen wird von der Ferngerade nicht getroffen. Dieses heißt das Innere des Dreiecks. Genaueres siehe [Sto, S. 36].

Die vier Punkte sind in Viereckslage, wenn kein Punkt im Inneren der drei anderen liegt.



Die vier Punkte sind in Dreieckslage, wenn genau ein Punkt im Inneren der drei anderen liegt; das ist nur für einen der vier Punkte möglich.



Satz: Wenn ein Viereck ABCD in Dreieckslage ist, dann liegt keines der drei 4-seitig aus gegenüberliegenden Seitenpaaren begrenzten Punktgebiete ganz im Endlichen.

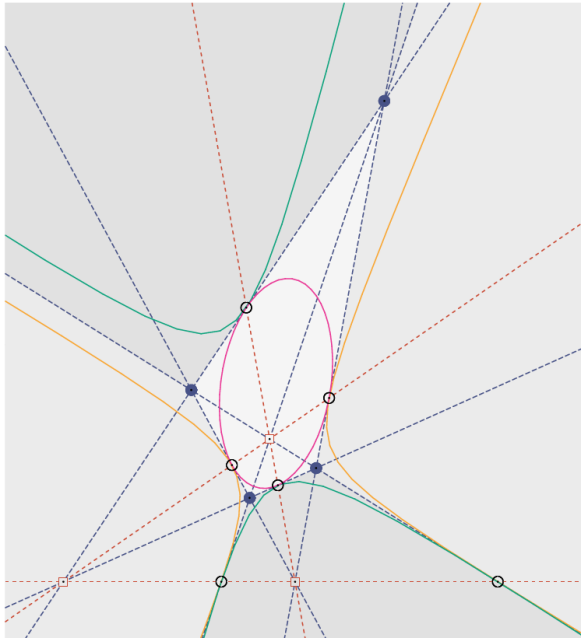
Wenn ein Viereck ABCD in Viereckslage ist, dann liegt genau eines der drei 4-seitig aus gegenüberliegenden Seitenpaaren begrenzten Punktgebiete ganz im Endlichen.

Sechs Geraden in allgemeiner Lage gliedern die Ebene in 16 Gebiete [Sto, S. 27]. Die sechs Geraden h_{ik} treffen sich aber zu je dreien in den vier Punkten G_i . Dadurch fallen vier Gebiete weg und es verbleiben 12 vierseitig begrenzte Gebiete. In jeder Gerade h_{ik} liegen zwei G-Punkte, nämlich G_i und G_k , außerdem ein H-Punkt und ein P-Punkt. Die letzteren sind von den G-Punkten harmonisch getrennt, also getrennt. Damit sind auf jeder Nebenseite die P-Punkte und die H-Punkte getrennt. Um jeden P-Punkt gliedern sich vier dreiseitig durch h-Geraden begrenzte Gebiete an, diese kann man zu je vierseitig begrenzten Gebieten zusammenfassen, die sich nicht überlappen und zusammen die ganze Ebene ausfüllen.

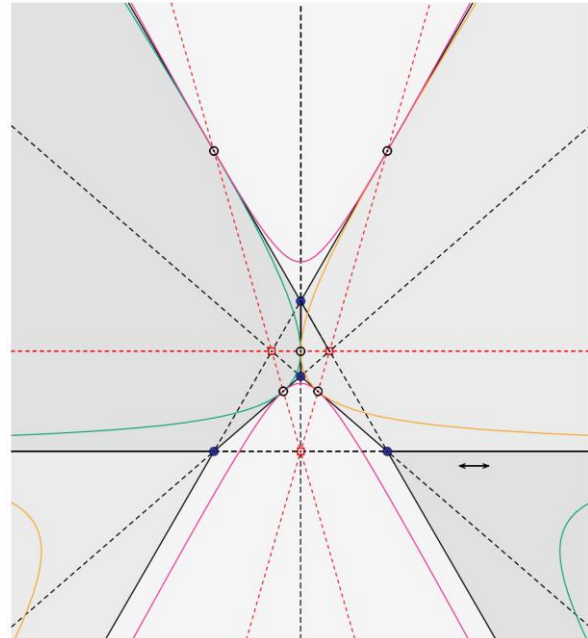
Im Falle der Viereckslage ist eines dieser Gebiete endlich, im Falle der Dreieckslage keines. Die Kegelschnitte berühren die h-Geraden in deren H-Punkten, und zwar, wie wir bewiesen haben, dann gleich alle H-Punkte auf denjenigen h-Geraden, die als Vierseit-Seiten gewählt werden. Das zieht nach sich, dass der vermittelnde Kegelschnitt in jeder der Lesarten 1 – 3 ganz innerhalb eines dieser drei Gebiete verläuft

Im Falle der Viereckslage ist eines der Gebiete endlich, dieser vermittelnde Kegelschnitt also eine Ellipse; die beiden anderen Gebiete überqueren die Ferngerade; die Berührungspunkte ihrer Kegelschnitte sind getrennt von der Ferngerade und den Punkten im endlichen Gebiet, d.h. die Kegelschnitte müssen die Ferngerade passieren, sind also Hyperbeln.

Im Falle der Dreieckslage berühren sich zwei der Kegelschnitte in demjenigen H-Punkt, der im Inneren von 3 G-Punkten liegt; dieser ist durch zwei Nebenecken von den Fernpunkten getrennt. Es gibt also zwei Hyperbeln, der dritte Kegelschnitt kann Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein. Man kann nämlich zu einem gegebenen Kegelschnitt harmonische 13er-Figur aufbauen, für welche dieser Kegelschnitt der Polarisator ist (s.u.).



$G_1G_2G_3G_4$ in Viereckslage
2 Hyperbeln, eine Ellipse



$G_1G_2G_3G_4$ in Dreieckslage
hier 3 Hyperbeln

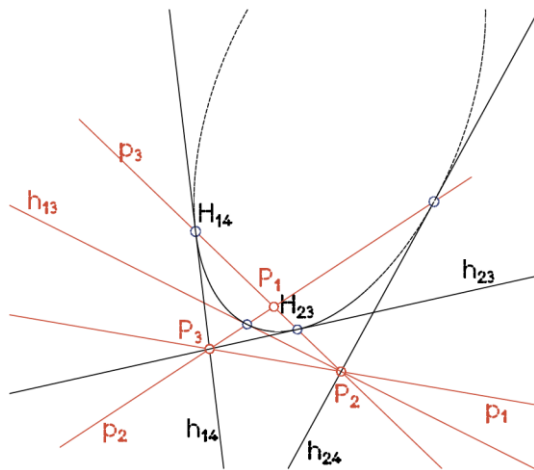
Es gibt, haben wir gesehen, drei Möglichkeiten, h-Geraden zu Vierseit-Seiten zu wählen: h_{12} und h_{34} , h_{13} und h_{24} , h_{14} und h_{23} (alle Indizes 1...4 müssen genau einmal vorkommen).

Die Kegelschnitte berühren nach Konstruktion jeder genau vier h-Geraden.

Das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist ein Polardreieck für alle diese drei Kegelschnitte – aber nicht auch Nebendreieck in den verschiedenen Lesarten. In jedem der drei 4-seitig begrenzten Gebiete liegt genau eine Ecke des Polardreiecks $P_1P_2P_3$ und zu jedem P_i liegt die gegenüberliegende Polare p_i ganz innerhalb der beiden komplementären Punktgebiete.

Solange die G-Punkte endlich sind, gilt: Je zwei der drei Kegelschnitte berühren sich in zwei gegenüberliegenden H-Punkten, für jede der drei Lesarten mit Inzidenz gibt es einen Kegelschnitt; einer ist eine Ellipse, die zwei anderen sind Hyperbeln, wenn die vier G_i in Viereckslage sind. Sind sie in Dreieckslage, hat man zwei Hyperbeln und einen dritten, der Ellipse, Parabel oder (wie im letzten Beispiel) Hyperbel sein kann.

Harmonische 13er-Figuren zu einem gegebenen Kegelschnitt



Wir gehen aus von einem beliebigen Kegelschnitt. In der nebenstehenden Zeichnung ist das eine Ellipse.

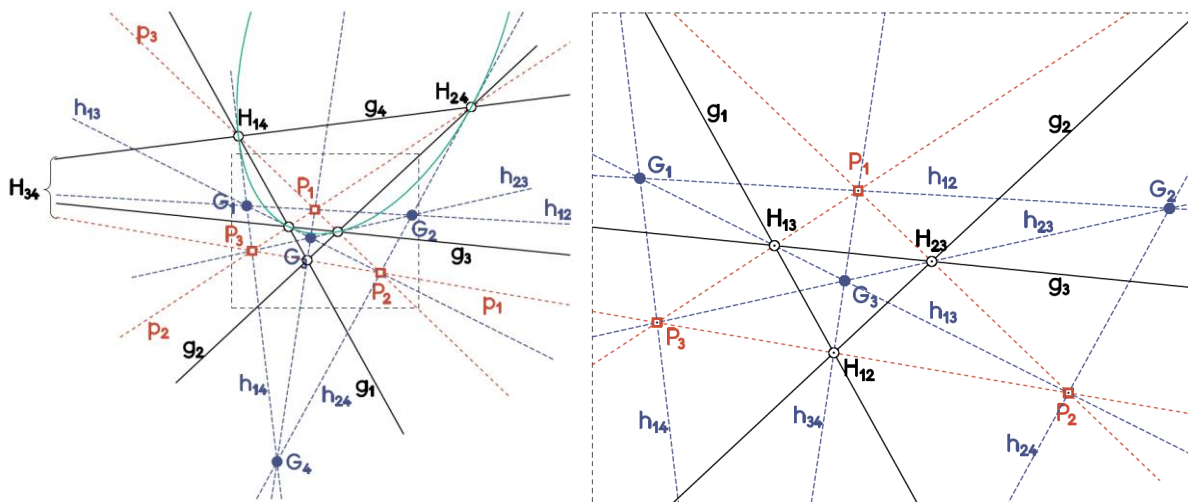
Wir wählen drei Punkte der Kurve samt Tangente aus, etwa H_{14} und h_{14} , H_{24} und h_{24} , H_{23} und h_{23} und zeigen, dass dann H_{13} und h_{13} konstruiert werden können:

$p_3 = \overline{H_{14}H_{23}}$, $P_3 = h_{14} \cdot h_{23}$ und $P_2 = h_{24} \cdot p_3$; p_2 ist dann $\overline{H_{24}P_3}$ (oder die Polare von Polare von P_2). Damit hat man $P_1 = p_2 \cdot p_3$.

H_{13} ist dann der 4. harmonische Punkt auf p zu H_{24} für das Paar (P_1, P_3) und h_{13} ist die Gerade $\overline{H_{13}P_2}$.

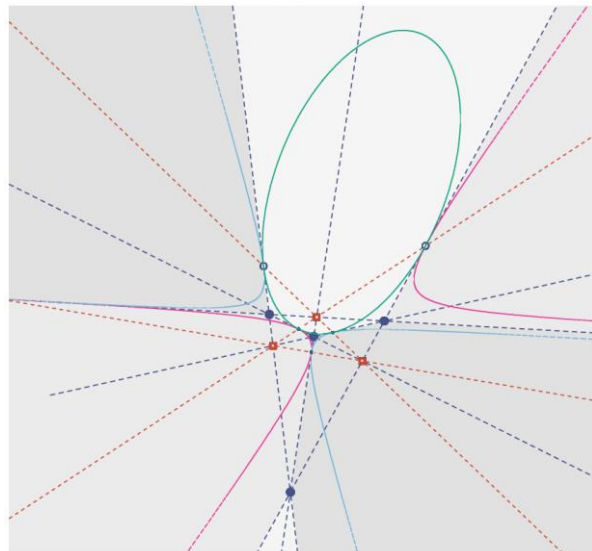
Aus den vier Seiten $h_{13}h_{24}h_{14}h_{23}$ kann nun die harmonische 13er-Figur eindeutig aufgebaut werden. Damit ist auch gezeigt, dass im Falle der Dreieckslage der vier G-Punkte der dritte mögliche Kegelschnitt neben den zwei Hyperbeln grundsätzlich eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein kann.

Das Ergebnis samt der Vergrößerung des zentralen Teils:



Zu guter Letzt noch die Übersicht über die weiteren Kegelschnitte – zwei Hyperbeln natürlich.

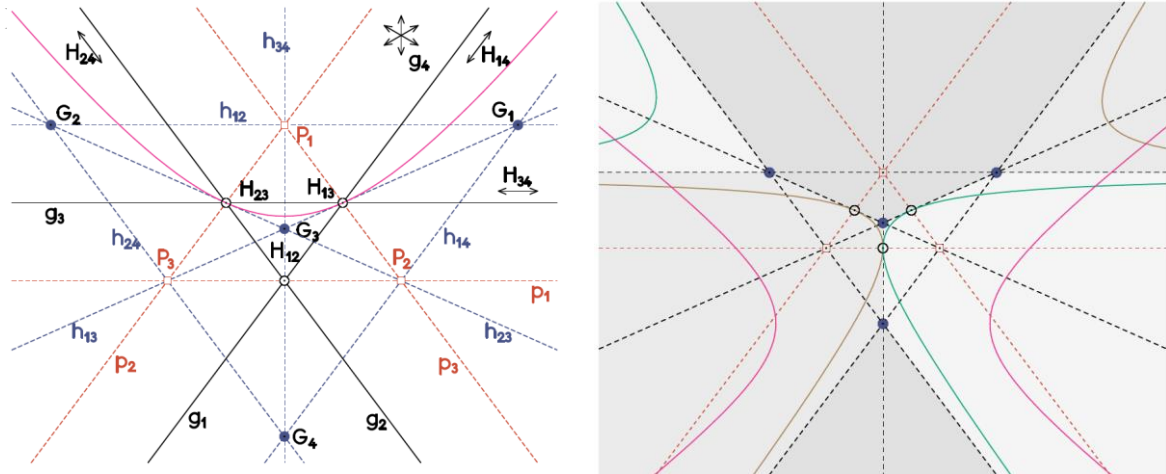
Die G-Punkte sind in Dreieckslage. In dieser könnten die Kegelschnitte auch Parabeln oder Hyperbeln sein: Man wählt sie frei und wählt dann drei ihrer Linienelemente (Kurvenpunkte samt Tangenten) in geeigneter Weise und konstruiert die dazu gehörende harmonische 13er-Figur.



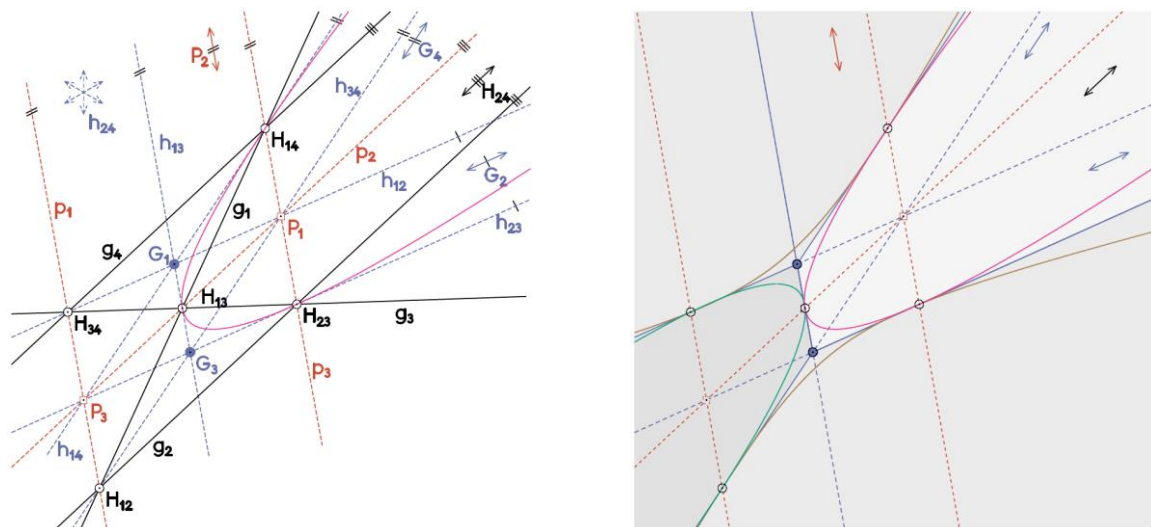
Harmonische 13er-Figuren mit unendlichen Elementen

Wenn Elemente der harmonischen 13er-Figur unendlich sind, gibt es noch weitere Besonderheiten.

1. Ein G-Punkt, etwa G_4 , ist ein Fernpunkt, dann sind die Geraden h_{14} , h_{24} , h_{34} zueinander parallel, aber sonst geschieht nicht viel Besonders. Der Kegelschnitt der Lesart 1 ist eine Ellipse.
2. Eine g-Gerade ist unendlich, etwa g_4 , dann sind H_{14} , H_{24} , H_{34} Fernpunkte.

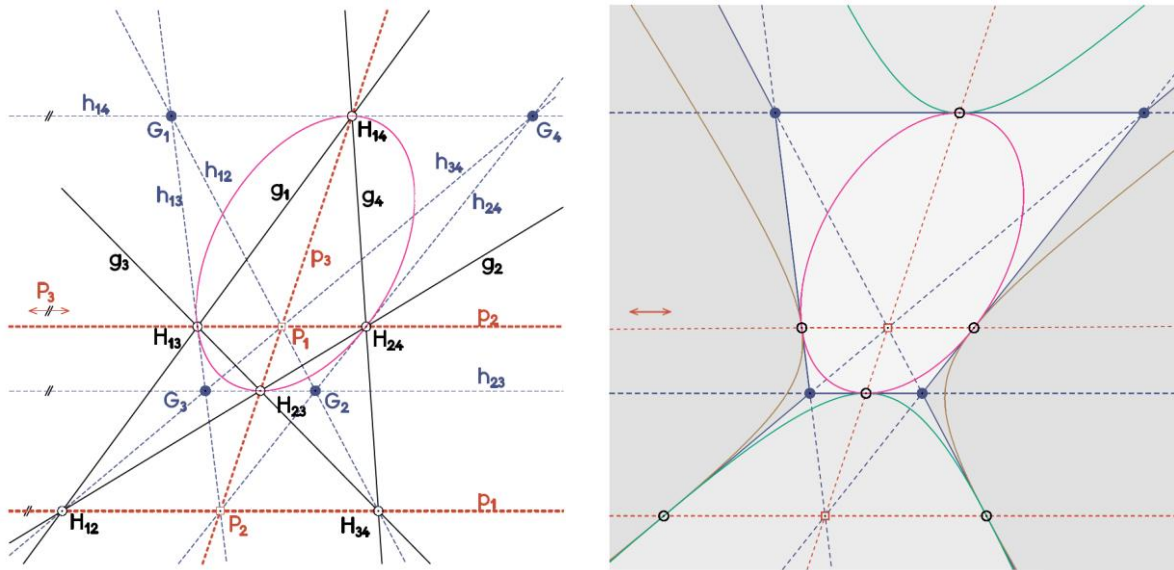


3. Wenn ein H-Punkt ein Fernpunkt ist, dann sind zwei der Kegelschnitte Hyperbeln, die die zu diesem Punkt gehörige h-Gerade zur Asymptote haben, an die sie sich von gegenüberliegenden Ufern aus nähern.
4. Eine h-Gerade, etwa h_{24} , ist die Ferngerade, damit sind G_2 , G_4 , H_{24} und P_2 Fernpunkte. Dann ist H_{24} Berührungspunkt mit der Ferngerade als Tangente für einen der Kegelschnitte und dann auch noch für einen zweiten, da sich in jedem H-Punkt zwei der Kegelschnitte berühren. Damit sind zwei der Kegelschnitte Parabeln; sie haben zueinander parallele Achsen, bestimmt durch den Fernpunkt H_{24} , und berühren sich ein zweites Mal in dem gegenüberliegenden Linienelement $H_{13} * h_{13}$. Der dritte Polarisator ist dann eine Hyperbel.



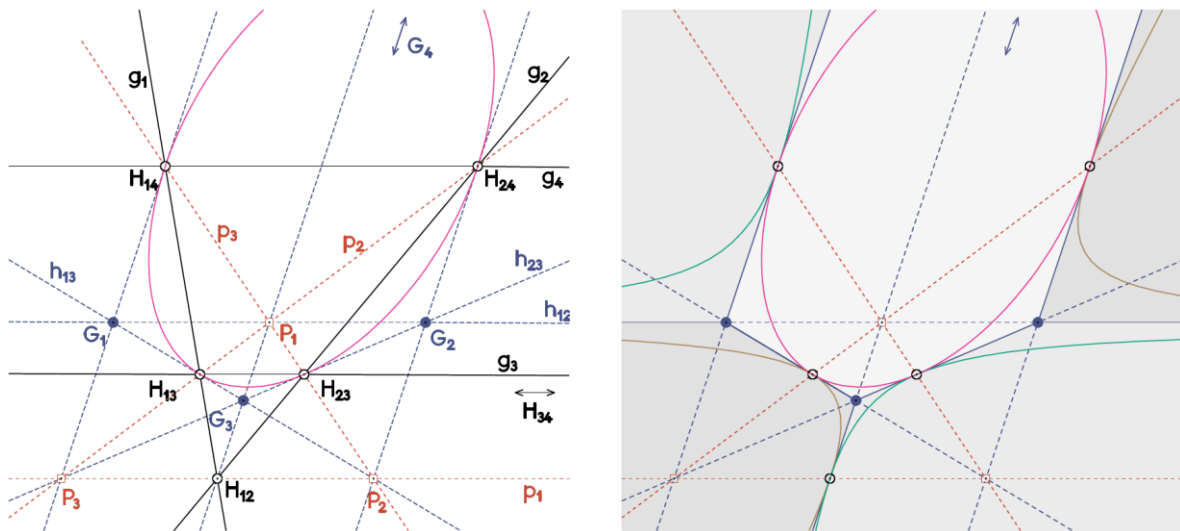
5. Eine p-Gerade ist Ferngerade: Siehe die Zeichnung zur euklidisch erzeugten Figur. Das Quadrat könnte dabei noch zu einem Parallelogramm verzogen werden.

6. Ein P-Punkt, etwa P_3 ist ein Fernpunkt, dann sind p_1, p_2, h_{23}, h_{14} zueinander parallel.



7. Zwei Fernpunkte: Die einzige noch nicht abgehandelte Möglichkeit ist ein G-Punkt und ein H-Punkt, der nicht schon mit diesem durch eine Gerade der Figur verbunden ist. Im Einzelnen sind die die Paare G_1 mit H_{12}, H_{23} oder H_{24} ; bzw. G_2 mit H_{12}, H_{13}, H_{14} ; oder G_3 mit H_{14}, H_{24}, H_{34} ; zuletzt G_4 mit H_{13}, H_{23}, H_{34} .

Im Beispiel hier sind G_4 und H_{34} die gewählten Fernpunkte.



Andere Paare von Punkten verschiedener Art haben stets eine Gerade gemeinsam, wie man leicht nachprüft. Und für solche Paare von Punkten würde auch die Ferngerade zur Figur gehören und das haben wir oben schon untersucht.

Bemerkenswert sind die vielfältigen Zusammenhänge zwischen der harmonischen 13er-Figur mit der harmonischen Lage, den Symmetrieeigenschaften von Körpern im Raum, den Kegelschnitten, der Polarität und zuletzt den Kegelschnittbüscheln und der Gliederung der Ebene durch Geraden – hier durch Strecken. Und das alles in einer Figur!